

CLASSE DE TECHNOLOGIE, PHYSIQUE ET CHIMIE (TPC)

PROGRAMME (A partir de Septembre 2000)

MATHEMATIQUES

Seconde année

→ (Ce nouveau programme présente des modifications par rapport à l'ancien programme)

ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE

I. ALGÈBRE LINÉAIRE

Dans cette partie le corps de base \mathcal{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

1. Espaces vectoriels ; applications linéaires

a) Base adaptée à un sous-espace vectoriel

Définition d'une base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel de E , à une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$.

b) Image et noyau d'une application linéaire

Relation $\dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u = \dim E$.

c) Trace d'un endomorphisme

Trace d'une matrice carrée ; linéarité de la trace, Le rang d'un projecteur est égal à sa trace.
relations $\text{Tr } AB = \text{Tr } BA$, $\text{Tr } PMP^{-1} = \text{Tr } M$. Trace
d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de
dimension finie.

2. Déterminants

a) Déterminant de n vecteurs

Formes n -linéaires alternées sur un espace vectoriel de dimension n . Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n . Caractérisation des bases.

La démonstration de l'existence du déterminant est hors programme.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer.

b) Déterminant d'un endomorphisme

Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.

Application à l'orientation d'un espace vectoriel réel de dimension 2 ou 3.

c) Déterminant d'une matrice carrée

Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices, de la transposée d'une matrice. Développement par rapport à une ligne ou une colonne ; cofacteurs.

La preuve de la relation $\text{Det } {}^t M = \text{Det } M$ est hors programme.

Travaux pratiques

§ Exemples d'étude de l'indépendance linéaire d'une famille de vecteurs. Exemples de construction de bases et de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et d'emploi de bases, de supplémentaires, de sommes directes et de changements de bases, notamment pour l'étude des équations linéaires.

§ Exemples d'étude de systèmes d'équations linéaires.

§ Emploi des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice à coefficients numériques pour la résolution des systèmes de Cramer par l'algorithme du pivot de Gauss, le calcul de déterminants, l'inversion de matrices.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels d'endomorphismes, de matrices, de polynômes, de suites et de fonctions.

II. RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES

Dans cette partie le corps de base \mathfrak{K} est \mathbb{R} ou \mathbb{C} et les espaces vectoriels considérés sont de dimension finie.

a) Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition d'un sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme u d'un espace vectoriel E .

Définition des valeurs propres, des vecteurs propres (le vecteur nul n'est pas un vecteur propre), des sous-espaces propres $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda I_E)$ d'un endomorphisme u de E .

Pour que λ soit une valeur propre de u , il faut et il suffit que $u - \lambda I_E$ ne soit pas inversible ; l'ensemble des valeurs propres de u est alors appelé spectre de u et noté $Sp(u)$.

Éléments propres des homothéties, des projecteurs, des symétries.

Toute famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est libre.

b) Valeurs propres, vecteurs propres d'une matrice carrée

Définition des valeurs propres, des vecteurs propres, des sous-espaces propres et du spectre d'un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathfrak{K})$.

Les éléments propres de M sont définis comme étant ceux de l'endomorphisme u de \mathfrak{K}^n canoniquement associé à M .

Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; le spectre de M dans \mathbb{R} est contenu dans le spectre de M dans \mathbb{C} .

Définition des matrices semblables.

Spectre de deux matrices semblables.

c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice, d'un endomorphisme ; ordre de multiplicité d'une valeur propre.

Lorsque ce polynôme est scindé, expression de la trace et du déterminant en fonction des valeurs propres.

d) Réduction d'un endomorphisme en dimension finie

Endomorphisme diagonalisable (par définition, $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u).

Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme des dimensions des sous-espaces propres de u soit égale à $\dim E$.

Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et a toutes ses racines simples est diagonalisable, et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

Définition d'une matrice carrée diagonalisable. Pour que M soit diagonalisable, il faut et il suffit que M soit semblable à une matrice diagonale.

Lorsque M est diagonalisable, M s'écrit sous la forme PDP^{-1} , où D est diagonale et où P est une matrice de passage de la base canonique de \mathbb{C}^n à une base de vecteurs propres de M .

Travaux pratiques

§ Exemples d'étude de suites numériques satisfaisant à une relation de récurrence linéaire à coefficients constants.

§ Exemples de réduction à la forme diagonale de matrices carrées sur \mathbb{C} ou \mathbb{R} .

Il convient de donner quelques exemples de matrices non diagonalisables, mais aucune méthode générale de réduction à la forme triangulaire n'est exigible des étudiants.

§ Exemples d'études du comportement des puissances d'une matrice diagonalisable.

§ Pratique de la résolution de l'équation $X' = AX$, où A est une matrice diagonalisable à éléments réels ou complexes.

III. ESPACES EUCLIDIENS, GÉOMÉTRIE EUCLIDIENNE

1. Espaces préhilbertiens réels ou complexes

a) Produit scalaire

Produit scalaire sur un \mathbb{R} -espace vectoriel ; définition d'un espace préhilbertien réel. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distance associées.

Relation entre produit scalaire et norme, polarisation.

Produit scalaire $(x,y) \mapsto (x|y)$ sur un \mathbb{C} -espace vectoriel (linéaire à droite, semi-linéaire à gauche) ; définition d'un espace vectoriel préhilbertien complexe. Inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire ; norme et distances associées.

Relation

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x|y).$$

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, notamment le produit scalaire canonique de \mathbb{R}^n et les produits scalaires usuels sur les espaces de fonctions.

L'étude de ces notions doit être illustrée par de nombreux exemples, et notamment :

- le produit scalaire canonique de \mathbb{C}^n ;

- $(f,g) \mapsto (f|g) = \int_{[a,b]} \bar{f}g$ dans $\mathcal{C}([a,b])$;

- $(f,g) \mapsto (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi]} \bar{f}g$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues 2π -

périodiques sur \mathcal{J} à valeurs complexes.

b) Orthogonalité

Vecteurs unitaires. Vecteurs orthogonaux, sous-espaces vectoriels orthogonaux, orthogonal F° (ou F^\perp) d'un sous-espace vectoriel F de E .

Familles orthogonales, familles orthonormales ; relation de Pythagore pour une famille orthogonale finie.

Sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux.

Projecteurs orthogonaux.

Extension des notions précédentes aux espaces préhilbertiens complexes.

2. Espaces euclidiens

a) Bases orthonormales

Définition d'un espace vectoriel euclidien : espace préhilbertien réel de dimension finie.

Existence de bases orthonormales, complétion d'une famille orthonormale en une base orthonormale.

Expression dans une base orthonormale des coordonnées et de la norme d'un vecteur, du produit scalaire de deux vecteurs, de la distance entre deux points.

Toute forme linéaire f sur un espace vectoriel euclidien E s'écrit de manière unique sous la forme $f(x) = (a/x)$ où a est un vecteur de E .

Extension des notions précédentes au cas d'un espace vectoriel hermitien, c'est-à-dire d'un espace préhilbertien complexe de dimension finie.

b) Projections orthogonales

Dans un espace préhilbertien réel E (de dimension finie ou non), l'orthogonal F° d'un sous-espace vectoriel F de dimension finie est un supplémentaire de ce sous-espace vectoriel, appelé supplémentaire orthogonal de F ; définition de la projection orthogonale $p_F(x)$ d'un vecteur x de E sur F . Lorsque F est de dimension finie,

Expression de $p_F(x)$ lorsque F est muni d'une base orthonormale (e_1, e_2, \dots, e_n)

$$p_F(x) = \sum_{j=1}^n (e_j | x) e_j.$$

$$\dim F^\circ + \dim F = \dim E \quad \text{et} \quad (F^\circ)^\circ = F.$$

Définition de la distance $d(x, F)$ d'un élément x de E à F .

Inégalité de Bessel

$$\sum_{j=1}^n |(e_j | x)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Expression de cette distance à l'aide de $p_F(x)$; la fonction qui à tout élément z de F associe $\|x - z\|$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $p_F(x)$; relation

$$\|x\|^2 = \|p_F(x)\|^2 + d(x, F)^2.$$

Extension des notions précédentes au cas des espaces préhilbertiens complexes.

c) Automorphismes orthogonaux

Dans ce paragraphe, les espaces considérés sont des espaces euclidiens.

Définition d'un automorphisme orthogonal d'un

Caractérisation d'un automorphisme orthogonal par

espace vectoriel euclidien E (c'est-à-dire d'un automorphisme de E conservant le produit scalaire). Caractérisation à l'aide de la conservation de la norme.

l'image d'une (de toute) base orthonormale et par sa matrice dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

Définition du groupe orthogonal $O(E)$; symétries orthogonales; réflexions.

L'étude générale du groupe orthogonal est hors programme, mais, en liaison avec le programme de première année, on décrira le groupe orthogonal en dimension deux et trois (et seulement dans ces cas).

Définition des matrices orthogonales et du groupe orthogonal $O(n)$. Caractérisation des matrices orthogonales par leurs vecteurs colonnes.

Les matrices orthogonales sont définies à partir de l'automorphisme de \mathbb{R}^n associé. Caractérisation des matrices orthogonales par l'une des relations ${}^t M M = I_n$ ou $M {}^t M = I_n$.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'un automorphisme orthogonal; déterminant d'une réflexion.

La notion de rotation ne figure au programme qu'en dimension 2 et 3.

d) Endomorphismes autoadjoints

Dans ce paragraphe, les espaces considérés sont des espaces euclidiens.

Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique) par la relation $(u(x)/y) = (x/u(y))$.

Les endomorphismes autoadjoints constituent un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint, à l'aide de la matrice associée dans une (toute) base orthonormale. Changement de base orthonormale.

Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E , alors u est diagonalisable dans une base orthonormale.

Diagonalisation d'une matrice symétrique au moyen d'une matrice orthogonale.

Travaux pratiques

§ Exemples de construction et d'emploi de bases orthonormales et de supplémentaires orthogonaux.

Il convient d'exploiter les espaces vectoriels \mathbb{R}^n et \mathbb{C}^n ainsi que les espaces vectoriels de polynômes et de fonctions.

§ Exemples de calcul et d'emploi de la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, de la distance à un tel sous-espace.

Il convient notamment d'exploiter l'approximation des fonctions.

§ Exemples de réduction d'endomorphismes et de matrices en base orthonormale.

ANALYSE

I. SUITES ET FONCTIONS

Séries de nombres réels ou complexes

a) Suites et séries

Série $\sum u_n$ associée à une suite (u_n) de nombres réels ou complexes, suite (s_p) des sommes partielles de cette série.

Définition d'une série convergente et de sa somme, notée $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Espace vectoriel des séries convergentes.

Caractérisation de la convergence d'une série de nombres complexes à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Convergence d'une série alternée dont la valeur absolue du terme général décroît et tend vers 0 ; majoration du reste.

b) Séries de nombres réels positifs

Pour qu'une série $\sum u_n$ de nombres positifs converge, il faut et il suffit que la suite (s_p) des sommes partielles soit majorée.

Théorème de comparaison des séries de nombres réels positifs : comparaison des convergences de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ dans le cas où $u_n \leq v_n$ et dans le cas où $u_n \sim v_n$.

c) Série de nombres réels ou complexes

Séries absolument convergentes (c'est-à-dire telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n| < +\infty$). Toute série absolument convergente est convergente.

Série géométrique : la série $\sum z^n$, où z appartient à \mathbb{C} , est absolument convergente si et seulement si

$$|z| < 1. \text{ Sa somme est alors égale à } \frac{1}{1-z}.$$

Série exponentielle : pour tout nombre complexe z , la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est absolument convergente.

Comparaison d'une série de nombres réels positifs à une intégrale : étant donnée une fonction f continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles positives, décroissante, la série $\sum f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.

Il convient de mettre en valeur et d'exploiter la correspondance bijective entre suites et séries.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors u_n tend vers 0 ; la réciproque est fautive.

Aucune autre connaissance spécifique sur les séries semi-convergentes n'est exigible des étudiants.

Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann, règle de d'Alembert. La règle « $n^\alpha u_n$ » n'est pas à mémoriser.

Développement décimal d'un nombre réel positif.

$$\text{En outre, } \left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

En outre, si $|z| \geq 1$, cette série diverge.

$$\text{Par définition, } \exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Encadrement du reste.

§ Exemples d'obtention de majorations et de minoration d'expressions réelles ou du module d'expressions complexes ; exemples d'emploi pour l'étude de suites et de fonctions.

§ Exemples d'étude du comportement global et asymptotique de suites de nombres réels, de nombres complexes.

§ Exemples d'étude de séries de nombres réels ou complexes.

§ Pour une série de nombres réels positifs, exemples d'encadrement du reste d'une série convergente, des sommes partielles d'une série divergente ; exemples de recherche de valeurs approchées de la somme d'une série convergente.

Il convient d'entraîner les étudiants à exploiter la comparaison aux suites de référence et à classer des ordres de grandeur.

Il convient notamment d'exploiter la comparaison d'une série à une intégrale.

II. FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE

Cette partie est l'occasion de consolider les acquis de première année concernant la dérivation et l'intégration des fonctions à valeurs réelles ou complexes.

Les fonctions étudiées sont définies sur un intervalle I de \mathcal{R} et à valeurs réelles ou complexes.

1. Intégrales dépendant d'un paramètre

Continuité sous le signe \int : soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes continue sur $A \times [a, b]$, où A est un intervalle de \mathcal{R} . Alors la fonction g définie sur A par la relation $g(x) = \int_a^b f(x, t) dt$ est continue sur A .

La démonstration des résultats de ce paragraphe est hors programme.

Dérivation sous le signe \int (formule de Leibniz) : lorsque f est continue sur $A \times [a, b]$ et admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $A \times [a, b]$, alors g est de classe \mathcal{C}^1 sur A , et $g'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$.

Extension aux fonctions de classe \mathcal{C}^k .

2. Intégrales impropres

a) Définition d'une intégrale convergente

Si f est une application continue sur $[a, b[$ l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, par définition, si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers b , en restant dans $[a, b[$.

On aura soin de distinguer, dans la présentation, le cas où f est une fonction continue non bornée sur un intervalle $[a, b[$ borné, et le cas où l'intervalle est non borné (du type $[a, +\infty[$ par exemple).

Définition des intégrales divergentes.

Nature des intégrales

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \text{ et } \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R},$$
$$\int_0^1 \ln t \, dt \text{ et } \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt, \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}_+^*.$$

b) Intégrales des fonctions positives

Relations entre la convergence ou la divergence des intégrales de f et de g , dans le cas où $f \leq g$, et dans le cas où $f \sim g$.

c) Intégrales absolument convergentes

Définition d'une intégrale absolument convergente.
Comparaison en module à des fonctions réelles positives du type : $|f| \leq g$ ou $|f| \sim g$.

Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi du calcul différentiel et intégral pour l'étude globale des fonctions.

Obtention de majorations et de minorations de suites et de fonctions, recherche d'extremums.

§ Exemple de méthodes de calcul de valeurs approchées d'intégrales et de comparaison de leurs performances.

La démarche consiste à subdiviser l'intervalle d'intégration et à approcher, sur chaque sous-intervalle, la fonction à intégrer par une fonction polynomiale.

§ Exemples d'étude d'une fonction définie par une intégrale dépendant d'un paramètre.

III. SÉRIES ENTIÈRES, SÉRIES DE FOURIER

1. Séries entières

Les séries entières considérées dans ce paragraphe sont à coefficients réels ou complexes.

a) Convergence d'une série entière

Définition des séries entières d'une variable complexe.

Étude de la convergence : rayon de convergence, disque (ouvert) de convergence.

Dans le cas où le rayon de convergence est un nombre $R > 0$, toute étude systématique de la convergence sur le cercle $C(0, R)$ est exclue.

b) Somme d'une série entière d'une variable réelle

Intervalle de convergence.

Propriétés (admisses) de la fonction somme d'une série entière sur l'intervalle (ouvert) de convergence : continuité, dérivation et intégration terme à terme (avec conservation du rayon de convergence).

On admettra que si le rayon de convergence est un nombre $R > 0$, et si de plus la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour $x = R$ (respectivement pour $x = -R$), la somme est continue sur $[0, R]$ (respectivement sur $[-R, 0]$).

La somme f d'une série entière $\sum a_n t^n$ d'une variable réelle dont le rayon de convergence R est

En particulier, pour tout entier k positif ou nul,

$$a_k = \frac{1}{k!} D^k f(0).$$

strictement positif est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R, R[$. En outre, pour tout $k \geq 1$, $D^k f$ s'obtient par dérivation terme à terme.

Définition d'une fonction développable en série entière sur un intervalle $] -r, r[$, où $r > 0$.

Définition de la série de Taylor d'une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur un intervalle $] -r, r[$, où $r > 0$.

Développement en série entière autour de 0 de $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x , $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ et $(1+x)^\alpha$, où α est réel.

2. Séries de Fourier

Dans ce chapitre, les fonctions considérées sont à valeurs complexes et 2π -périodiques et continues sur ρ (le cas des fonctions T -périodiques s'y ramène par changement de variable). Il convient d'effectuer une brève extension au cas des fonctions continues par morceaux (la définition des fonctions continues par morceaux, de classe \mathcal{C}^k par morceaux, sera donnée à cette occasion); les démonstrations concernant cette extension seront admises.

a) Coefficients de Fourier

Espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes, 2π -périodiques et continues par morceaux sur ρ .

Intégrale sur une période d'une fonction f à valeurs complexes, 2π -périodique et continue par morceaux sur ρ .

Définition des coefficients de Fourier d'une telle fonction

$$\hat{f}(n) = c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Expression des coefficients de Fourier sous forme de cosinus et de sinus.

Pour tout entier naturel p , définition de la somme partielle

$$S_p(f)(x) = \sum_{n=-p}^p c_n(f) e^{inx}.$$

b) Convergence en moyenne quadratique

Produit scalaire $(f|g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) g(t) dt$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions 2π -périodiques continues sur ρ ; norme associée $f \mapsto \|f\|_2$.

La projection orthogonale d'un élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur le sous-espace vectoriel \mathcal{P}_p engendré par les e_n , où $|n| \leq p$, est la somme partielle $S_p(f)$.

Relation

$$\|f\|^2 = (\|S_p(f)\|_2)^2 + d(f, \mathcal{P}_p)^2.$$

Définition d'une fonction 2π -périodique continue par morceaux f à partir d'une fonction g continue par morceaux sur un segment de longueur 2π .

Coefficients de Fourier de f ; cas d'une fonction à valeurs réelles. Coefficients de Fourier de $t \mapsto f(-t)$; cas d'une fonction paire, d'une fonction impaire. Effet d'une translation: coefficients de Fourier de $t \mapsto f(t+a)$.

Lorsqu'en un point x de ρ les sommes partielles $S_p(f)$ convergent, la série de Fourier est dite convergente au point x et la somme de la série de Fourier est, par définition, la limite des sommes $S_p(f)(x)$.

Les fonctions $t \mapsto e_n(t) = e^{int}$, où n parcourt, forment une famille orthonormale et, pour tout n , $c_n(f) = (e_n|f)$.

En particulier, l'application qui à tout élément P de \mathcal{P}_p associe $\|f - P\|_2$ atteint son minimum en un point et un seul, à savoir $S_p(f)$.

Inégalité de Bessel

$$\sum_{n=-p}^p |c_n(f)|^2 \leq \|f\|_2^2.$$

Convergence en moyenne quadratique : pour tout élément f de $\mathcal{C}_{2\pi}$, les sommes partielles $S_p(f)$ convergent en moyenne quadratique vers f .

c) Convergence ponctuelle

Théorème de Dirichlet : soit f une fonction 2π -périodique de classe \mathcal{C}^1 par morceaux sur \mathcal{J} , alors pour tout nombre réel x , la série de Fourier de f converge en ce point et sa somme est égale à $\frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x+h) + f(x-h)]$. En particulier, en tout point x où f est continue, la somme de la série de Fourier de f est égale à $f(x)$.

En particulier, $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ tendent vers 0.

Formule de Parseval : expression du carré de la norme et du produit scalaire à l'aide des coefficients de Fourier.

Travaux pratiques

§ Exemples de recherche et d'emploi de développements en série entière ou en série de Fourier de fonctions d'une variable réelle : exemples d'utilisation de tels développements pour l'approximation d'une fonction.

Il convient de mettre en valeur l'emploi de séries entières pour la recherche et l'étude de solutions d'équations différentielles.

IV. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

1. Équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2

Équation $a(t)x' + b(t)x = c(t)$ où a , b et c sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes.

Structure de l'espace des solutions lorsque a ne s'annule pas sur I .

Équation $a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = d(t)$ où a , b , c et d sont continues sur I à valeurs réelles ou complexes. Lorsque a ne s'annule pas sur I , existence et unicité de la solution sur I du problème de Cauchy.

La démonstration de ce résultat est hors programme.

Structure de l'espace des solutions de l'équation homogène ; systèmes fondamentaux de solutions. Résolution de l'équation par la méthode de variation des constantes.

Expression des solutions dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène associée ne s'annulant pas sur I .

2. Notions sur les équations différentielles non linéaires

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient d'introduire quelques notions sur les équations différentielles non linéaires mais, en mathématiques, aucune connaissance sur ce point n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Exemple d'étude de solutions d'équations

différentielles linéaires d'ordre 1 et 2.

V. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES RÉELLES

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont définies sur une partie de \mathcal{J}^p et à valeurs dans \mathcal{J}^q . On se limitera aux cas où $n \leq 3$ et $p \leq 3$. On ne soulèvera aucune difficulté liée aux ensembles de définition des fonctions considérées.

1. Continuité

Aucune difficulté théorique ne peut être soulevée sur les notions étudiées dans ce paragraphe et tous les résultats sont admis.

En outre, ces notions ne pourront constituer le thème principal d'aucune question d'écrit ou d'oral.

a) Normes dans \mathcal{J}^m

Norme et distance dans \mathcal{J}^m . Définition des boules, des parties ouvertes, des parties fermées, des parties bornées.

On admettra que toutes les normes sont équivalentes.

Dans la pratique, on utilisera les normes

$$\text{"sup"} \left(\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |x_i| \right)$$

et euclidienne $\left(\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq m} |x_i|^2} \right)$.

b) Continuité des fonctions de plusieurs variables

Limite et continuité en un point a d'une fonction définie sur un ouvert U .

Espace vectoriel $\mathcal{C}(U)$ des fonctions continues sur U .

Si f est à valeurs réelles, alors pour tout nombre réel α , l'ensemble des points x tels que $f(x) \geq \alpha$, ou tels que $f(x) = \alpha$, est une partie fermée de \mathcal{J}^n ; l'ensemble des points x tels que $f(x) > \alpha$ est une partie ouverte de \mathcal{J}^n .

Il convient de souligner l'intérêt de ces résultats pour démontrer qu'une partie est ouverte (ou fermée).

L'image d'une partie fermée bornée par une fonction continue est fermée et bornée.

2. Calcul différentiel

a) Dérivées partielles premières

Définition de la dérivée de f en un point a de U selon un vecteur h , notée $D_h f(a)$. Définition des dérivées partielles, notées $D_j f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$.

Il existe un nombre réel $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $t \in [-\delta, \delta]$, $a + th$ appartienne à U : on pose alors $\varphi_h(t) = f(a + th)$. Si φ_h est dérivable à l'origine, on dit que f admet une dérivée au point a de U selon le vecteur h , et l'on pose $D_h f(a) = \varphi'_h(0)$.

Définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 (ou continûment dérivable): les dérivées partielles $D_j f(a)$ sont continues sur U . Espace vectoriel $\mathcal{C}^1(U)$ des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur U .

Théorème fondamental : si f est de classe \mathcal{C}^1 sur U ,

La démonstration de ce résultat est hors programme.

alors f admet, en tout point a de U , une dérivée selon tout vecteur h , et

$$D_h f(a) = \sum_{j=1}^p h_j D_j f(a).$$

En particulier, l'application $h \mapsto D_h f(a)$ est une forme linéaire appelée différentielle de f au point a et notée $df(a)$.

Dans l'espace vectoriel euclidien \mathcal{E}^p , le gradient d'une fonction à valeurs réelles f est défini par $df(a)(h) = D_h f(a) = (\text{grad} f(a)/h)$.

Coordonnées du gradient.

Points critiques d'une fonction numérique de classe \mathcal{C}^1 . Condition nécessaire d'existence d'un extremum local.

b) Matrice jacobienne

Matrice jacobienne, jacobien.

Matrice jacobienne d'une application composée ou d'une application réciproque (les applications considérées étant de classe \mathcal{C}^1).

Application aux changements de variables.

c) Dérivées partielles d'ordre $k \geq 2$

Théorème de Schwarz pour une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur U .

La démonstration du théorème de Schwarz est hors programme.

d) Coordonnées polaires

Repère polaire (\vec{u}, \vec{v}) du plan euclidien \mathcal{E}^2 défini, pour tout nombre réel θ , par

$$\begin{aligned} \vec{u}(\theta) &= \cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2 \\ \vec{v}(\theta) &= -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \end{aligned}$$

où (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est la base canonique de \mathcal{E}^2 .

Coordonnées polaires d'un point de \mathcal{E}^2 .

Relations

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v}, \quad \frac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u}$$

Expression des coordonnées du gradient d'une fonction à valeurs réelles f de classe \mathcal{C}^1 en fonction des dérivées partielles de la fonction $(\rho, \theta) \mapsto F(\rho, \theta) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$.

3. Calcul intégral

a) Intégrales doubles

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les intégrales doubles et triples :

- Intégrales doubles : linéarité, croissance, additivité par rapport au domaine d'intégration, calcul par intégrations successives, exemples simples de changements de variables.
- Brève extension aux intégrales triples.
- Exemples d'applications aux calculs d'aires planes et de volumes.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

b) Champs de vecteurs du plan et de l'espace

En vue de l'enseignement des autres disciplines scientifiques, il convient de donner quelques notions sur les champs de vecteurs du plan et de l'espace : divergence, rotationnel, circulation, potentiel scalaire.

En mathématiques, aucune connaissance sur ces différents points n'est exigible des étudiants.

Travaux pratiques

§ Exemples d'emploi de coordonnées polaires, cylindriques ou sphériques.

§ Exemples de recherches d'extremum locaux ou globaux.

§ Exemples de recherche de solutions d'équations aux dérivées partielles par séparation ou changements de variables.