Classe préparatoire ATS Métiers de la chimie
Programme de mathématiques

Table des matières

Objectifs de formation **2**
Compétences développées 2
Description et prise en compte des compétences 2
Unité de la formation scientifique 3
Architecture et contenu du programme 4
Organisation du texte 4

Usage de la liberté pédagogique **5**

PROGRAMME **6**
Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement 6
Pratique calculatoire 8
Nombres complexes 10
Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles 11
Géométrie élémentaire du plan 13
Géométrie élémentaire de l'espace 14
Équations différentielles linéaires 15
Systèmes linéaires 16
Nombres réels et suites numériques 17
Limites, continuité et dérivabilité 19
A - Limites et continuité 19
B - Dérivabilité 20
Intégration sur un segment 22
Développements limités 23
Polynômes 24
Calcul matriciel 25
Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et applications linéaires 26
A - Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ 26
B - Dimension de $\mathbb{R}^n$ et de ses sous-espaces vectoriels 27
C - Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et représentations matricielles 27
Déterminants 28
Réduction d'endomorphismes 29
Intégration d'une fonction continue sur un intervalle 30
Séries numériques 31
Séries de Fourier 32

Probabilités **33**
Probabilités sur un univers fini 33
Variables aléatoires réelles sur un univers fini 34
Couples de Variables aléatoires réelles sur un univers fini 35

Objectifs de formation

Le programme de mathématiques d'ATS Métiers de la chimie s'inscrit entre deux continuités : en amont avec les programmes de BTS et DUT, en aval avec les enseignements dispensés dans les grandes écoles, et plus généralement les poursuites d'études universitaires. Il est conçu pour amener progressivement tous les étudiants au niveau requis pour poursuivre avec succès un cursus d'ingénieur, de chercheur, d'enseignant, de scientifique, et aussi pour leur permettre de se former tout au long de la vie.
En mathématiques comme dans les autres disciplines, il est demandé aux étudiants de prendre du recul par rapport à leurs savoirs opérationnels afin de progresser vers une approche plus conceptuelle. C'est cette greffe d'un enseignement plus théorique sur une pratique professionnelle maîtrisée à un certain niveau qui fait l'originalité et la richesse de la filière ATS.

Compétences développées

Les étudiants des classes préparatoires doivent acquérir les compétences nécessaires aux scientifiques et technologues, qu'ils soient ingénieurs, chercheurs, enseignants, pour identifier les situations auxquelles ils sont confrontés, dégager les meilleures stratégies pour y faire face, prendre avec un recul suffisant des décisions dans un contexte complexe.
Dans ce cadre, la formation mathématique vise le développement des compétences générales suivantes :

- **s'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies ;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer ;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique ...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre ;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture ;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats ;
- **communiquer à l'écrit et à l'oral** : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

Ces compétences sont dans le prolongement des compétences développées dans les sections de technicien supérieur.

Description et prise en compte des compétences

S'engager dans une recherche, mettre en œuvre des stratégies
Cette compétence vise à développer les attitudes de questionnement et de recherche, au travers de réelles activités mathématiques, prenant place au sein ou en dehors de la classe. Les différents temps d'enseignement (cours, travaux dirigés, heures d'interrogation) doivent privilégier la découverte et l'exploitation de problématiques, la réflexion sur les démarches suivies, les hypothèses formulées et les méthodes de résolution. Le professeur ne saurait limiter son enseignement à un cours dogmatique : afin de développer les capacités d'autonomie des étudiants, il doit les amener à se poser eux-mêmes des questions, à prendre en compte une problématique mathématique, à utiliser des outils logiciels, et à s'appuyer sur la recherche et l'exploitation, individuelle ou en équipe, de documents.
Les travaux proposés aux étudiants en dehors des temps d'enseignement doivent combiner la résolution d'exercices d'entraînement relevant de techniques bien répertoriées et l'étude de questions plus complexes. Posées sous forme de problèmes ouverts, elles alimentent un travail de recherche individuel ou collectif, nécessitant la mobilisation d'un large éventail de connaissances et de capacités.

Modéliser
Le programme présente des notions, méthodes et outils mathématiques, permettant de modéliser l'état et l'évolution de systèmes déterministes ou aléatoires issus de la rencontre du réel et du contexte, et éventuellement du traitement qui en a été fait par la mécanique, la physique, la chimie, les sciences industrielles de l'ingénieur. Ces interprétations viennent en retour éclairer les concepts fondamentaux de l'analyse, de l'algèbre linéaire ou de la géométrie. La modélisation contribue ainsi de façon essentielle à l'unité de la formation scientifique et valide les approches interdisciplinaires. À cet effet, il importe de promouvoir l'étude de questions mettant en œuvre des interactions entre les différents champs de connaissance scientifique (mathématiques et physique, mathématiques et chimie, mathématiques et sciences industrielles de l'ingénieur, mathématiques et informatique).

Représenter
Un objet mathématique se prête en général à des représentations issues de différents cadres ou registres : algébrique, géométrique, graphique, numérique. Élaborer une représentation, changer de cadre, traduire des informations dans plusieurs registres sont des composantes de cette compétence. Ainsi, en analyse, le concept de fonction s'appréhende à travers diverses représentations (graphique, numérique, formelle) ; en algèbre, un problème linéaire se prête à des représentations de nature géométrique, matricielle ou algébrique. Le recours régulier à des figures ou à des croquis permet de développer une vision géométrique des objets abstraits et favorise de fructueux transferts d'intuition.

Raisonner, argumenter
La pratique du raisonnement est au cœur de l'activité mathématique. Basé sur l'élaboration de liens déductifs ou inductifs entre différents éléments, le raisonnement mathématique permet de produire une démonstration, qui en est la forme aboutie et communicable. La présentation d'une démonstration par le professeur (ou dans un document) permet aux étudiants de suivre et d'évaluer l'enchaînement des arguments qui la composent ; la pratique de la démonstration leur apprend à créer et à exprimer eux-mêmes de tels arguments. L'intérêt de la construction d'un objet mathématique ou de la démonstration d'un théorème repose sur ce qu'elles apportent à la compréhension-même de l'objet ou du théorème : préciser une perception intuitive, analyser la portée des hypothèses, éclairer une situation, exploiter et réinvestir des concepts et des résultats théoriques.

Calculer, manipuler des symboles, maîtriser le formalisme mathématique
Le calcul et la manipulation des symboles sont omniprésents dans les pratiques mathématiques. Ils en sont des composantes essentielles, inséparables des raisonnements qui les guident ou qu'en sens inverse ils outillent.
Mener efficacement un calcul simple fait partie des compétences attendues des étudiants. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils de calcul formel ou numérique. La maîtrise des méthodes de calcul figurant au programme nécessite aussi la connaissance de leur cadre d'application, l'anticipation et le contrôle des résultats qu'elles permettent d'obtenir.

Communiquer à l'écrit et à l'oral
La phase de mise au point d'un raisonnement et de rédaction d'une solution permet de développer les capacités d'expression. La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements, constituent des objectifs très importants. La qualité de structuration des échanges entre le professeur et sa classe, entre le professeur et chacun de ses étudiants, entre les étudiants eux-mêmes, doit également contribuer à développer des capacités de communication (écoute et expression orale) à travers la formulation d'une question, d'une réponse, d'une idée, d'hypothèses, l'argumentation de solutions ou l'exposé de démonstrations. Les travaux individuels ou en petits groupes proposés aux étudiants en dehors du temps d'enseignement, au lycée ou à la maison, (interrogations orales, devoirs libres, comptes rendus de travaux dirigés ou d'interrogations orales) contribuent fortement à développer cette compétence. La communication utilise des moyens diversifiés : les étudiants doivent être capables de présenter un travail clair et soigné, à l'écrit ou à l'oral, au tableau ou à l'aide d'un dispositif de projection.

L'intégration des compétences à la formation des étudiants permet à chacun d'eux de gérer ses propres apprentissages de manière responsable en repérant ses points forts et ses points faibles, et en suivant leur évolution. Les compétences se recouvrent largement et il importe de les considérer globalement : leur acquisition doit se faire dans le cadre de situations suffisamment riches pour nécessiter la mobilisation de plusieurs d'entre elles.

Unité de la formation scientifique

Il est important de mettre en valeur l'interaction entre les différentes parties du programme, tant au niveau du cours que des thèmes des travaux proposés aux étudiants. À titre d'exemples, la géométrie apparaît à la fois comme un terrain propice à l'introduction de l'algèbre linéaire, mais aussi comme un champ d'utilisation des concepts développés dans ce domaine du programme ; les équations différentielles sont au cœur des activités de modélisation pour les sciences physiques et chimiques.
C'est ainsi que le programme valorise les interprétations des concepts de l'analyse, de l'algèbre linéaire et de la géométrie en termes de paramètres modélisant l'état et l'évolution de systèmes mécaniques, physiques ou chimiques (mouvement, vitesse et accélération, signaux continus ou discrets, mesure des grandeurs mécaniques ou physiques…).
La coopération des enseignants d'une même classe ou d'une même discipline et, plus largement, celle de l'ensemble des enseignants d'un cursus donné, doit contribuer de façon efficace et cohérente à la qualité de ces interactions, notamment dans le cadre des travaux d'initiative personnelle encadrés.
Les professeurs de mathématiques doivent régulièrement accéder aux laboratoires afin de favoriser l'établissement de liens forts entre la formation mathématique et les formations dispensées dans les enseignements scientifiques et technologiques. Cet accès permet de :
- prendre appui sur les situations expérimentales rencontrées dans ces enseignements ;
- connaître les logiciels utilisés et l'exploitation qui peut en être faite pour illustrer les concepts mathématiques ;
- prendre en compte les besoins mathématiques des autres disciplines.

Il importe aussi que le contenu culturel et historique des mathématiques ne soit pas sacrifié au profit de la seule technicité. En particulier, il pourra s'avérer pertinent d'analyser l'interaction entre un problème spécifique et la construction, pour le résoudre, d'outils conceptuels qui, pris ensuite par les mathématiciens comme objets d'étude, ont pu ultérieurement servir au traitement d'autres classes de problèmes.

Architecture et contenu du programme

Le programme s'en tient à un cadre et à un vocabulaire théorique bien délimités, mais suffisamment efficaces pour l'étude de situations usuelles, et assez riches pour servir de support à une formation solide.
Les grands équilibres du programme n'ont pas été modifiés. C'est ainsi que les deux grands axes « Analyse et géométrie » et « Algèbre et géométrie » demeurent présents. Si le choix a été fait de ne pas introduire les probabilités dans les contenus du programme, on pourra cependant illustrer certaines notions du programme à l'aide d'exemples faisant intervenir des probabilités.

Le programme encourage la démarche algorithmique et le recours à l'outil informatique (calculatrices, logiciels). Il identifie un certain nombre d'algorithmes qui doivent être connus et pratiqués par les étudiants.

La géométrie, en tant qu'outil de modélisation et de représentation, est intégrée à l'ensemble du programme, qui préconise le recours à des figures pour aborder l'algèbre linéaire et les fonctions de variable réelle. En introduction à l'algèbre linéaire, le chapitre sur les systèmes linéaires permet de rappeler les propriétés élémentaires relatives aux droites du plan, aux droites et plans de l'espace.

Ces aménagements devraient permettre de constituer un programme cohérent autour de quelques notions essentielles, en dégageant les idées majeures et leur portée, en fournissant des outils puissants et efficaces, en évitant toute technicité gratuite, et en écartant les notions qui ne pourraient être traitées que de façon superficielle.

Organisation du texte

Les programmes définissent les objectifs de l'enseignement et décrivent les connaissances et les capacités exigibles des étudiants ; ils précisent aussi certains points de terminologie et certaines notations. Ils fixent clairement les limites à respecter tant au niveau de l'enseignement qu'à celui des épreuves d'évaluation, y compris par les opérateurs de concours.
Le programme est décliné en chapitres. Chaque chapitre comporte un bandeau définissant les objectifs essentiels et délimitant le cadre d'étude des notions qui lui sont relatives et un texte présenté en deux colonnes : à gauche figurent les contenus du programme (connaissances et méthodes) ; à droite un commentaire indique les capacités exigibles des étudiants, précise quelques notations ainsi que le sens ou les limites à donner à certaines questions. Dans le cadre de sa liberté pédagogique et dans le respect de la cohérence de la formation globale, le professeur décide de l'organisation de son enseignement et du choix de ses méthodes.
En particulier, l'ordre de présentation des différents chapitres ne doit pas être interprété comme un modèle de progression et on évitera en particulier de regrouper en un seul bloc l'enseignement de l'algèbre. Parmi les connaissances (définitions, notations, énoncés, démonstrations, méthodes, algorithmes...) et les capacités de mobilisation de ces connaissances, le texte du programme délimite trois catégories :

- celles qui sont exigibles des étudiants : il s'agit de l'ensemble des points figurant dans la colonne de gauche des différents chapitres ;
- celles qui sont indiquées dans les bandeaux et la colonne de droite comme étant « hors programme ». Elles ne doivent pas être traitées et ne peuvent faire l'objet d'aucune épreuve d'évaluation ;
- celles qui relèvent d'activités possibles ou souhaitables, mais qui ne sont pas exigibles des étudiants. Il s'agit des activités proposées pour illustrer les différentes notions du programme (visualisations à l'aide de l'outil informatique, activités en lien avec les autres disciplines).

Pour les démonstrations des théorèmes dont l'énoncé figure au programme et qui sont repérées dans la colonne de droite par la locution « démonstration non exigible », le professeur est libre d'apprécier, selon le cas, s'il est souhaitable de démontrer en détail le résultat considéré, d'indiquer seulement l'idée de sa démonstration, ou de l'admettre.
Les liens avec les disciplines scientifiques et technologiques sont identifiés par le symbole ⇆ PC pour la physique et la chimie, ⇆ P pour la physique, ⇆ GP pour le génie des procédés et ⇆ I pour l'informatique.
On pourra aussi se reporter à l'annexe aux programmes *Outils mathématiques pour la physique-chimie*.
Afin de faciliter l'organisation du travail des étudiants et de montrer l'intérêt des notions étudiées, on prendra soin d'organiser les enseignements en commençant par donner aux étudiants les bases mathématiques utiles aux autres disciplines. Cette organisation, construite par le professeur en coordination avec les autres disciplines scientifiques et technologiques pourra en particulier concerner les chapitres suivants : pratique calculatoire, nombres complexes, géométrie élémentaire du plan et de l'espace, étude globale d'une fonction d'une variable réelle, équations différentielles linéaires, fonctions vectorielles et courbes paramétrées. On notera que le premier chapitre, vocabulaire ensembliste et méthode de raisonnement, n'a pas vocation à être traité d'un bloc en début d'année mais que les notions qui y figurent doivent au contraire être introduites de manière progressive en cours d'année.

Usage de la liberté pédagogique

Dans le cadre de la liberté pédagogique qui lui est reconnue par la loi, le professeur choisit ses méthodes, sa progression, ses problématiques. Il peut organiser son enseignement en respectant deux grands principes directeurs :

— pédagogue, il privilégie la mise en activité des étudiants en évitant tout dogmatisme : l'acquisition des connaissances et des capacités est d'autant plus efficace que les étudiants sont acteurs de leur formation. La pédagogie mise en œuvre développe la participation, la prise d'initiative et l'autonomie des étudiants. Le choix des problématiques et des méthodes de résolution favorise cette mise en activité ;

— didacticien, il choisit le contexte favorable à l'acquisition des connaissances et au développement des compétences. La mise en perspective d'une problématique avec l'histoire des sociétés, des sciences et des techniques, mais aussi des questions d'actualité ou des débats d'idées, permet de motiver son enseignement.

PROGRAMME

Vocabulaire ensembliste et méthodes de raisonnement

Ce chapitre regroupe les différents points de vocabulaire, notations et raisonnements nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique. Ces notions sont introduites progressivement et trouvent naturellement leur place dans les autres chapitres, en vue d'être acquises en cours d'année. Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme. Plusieurs groupes classiques étant rencontrés dans le cadre du programme, la terminologie associée peut être utilisée, mais aucune connaissance théorique n'est exigible.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensembles

Cette partie a entre autres des applications aux probabilités. On se limite à une approche naïve. Aucun développement n'est fait sur la théorie des ensembles.

Appartenance, inclusion.	Démontrer une égalité, une inclusion de deux ensembles.
Sous-ensemble (ou partie) de E. Ensemble vide.	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, complémentaire.	Maîtriser le lien entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes. Notations $\complement_E A$, $\overline{A}$, $E \setminus A$.
Produit cartésien de deux ensembles, d'un nombre fini d'ensembles. Ensemble des parties d'un ensemble.	Un élément de E^p est appelé p-liste ou p-uplet d'éléments de E.

b) Rudiments de logique

Quantificateurs.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant les quantificateurs. Formuler une négation. Les étudiants doivent savoir employer les quantificateurs pour formuler de façon précise certains énoncés et leur négation. En revanche, l'emploi des quantificateurs en guise d'abréviations est exclu.
Connecteurs logiques : disjonction (ou), conjonction (et), implication, équivalence.	Passer du langage naturel au langage formalisé en utilisant des connecteurs. Formuler une négation.

c) Méthodes de raisonnement

Raisonnement par contraposition.	Écrire la contraposée d'une assertion.
Raisonnement par l'absurde.	Mener un raisonnement par l'absurde.
Raisonnement par récurrence	On se limitera aux récurrences simples
Principe d'analyse/synthèse.	Distinguer condition nécessaire et condition suffisante. L'objectif est de donner une méthode de résolution détaillée pour les exemples du programme nécessitant ce type de raisonnement. On se limite à des exemples simples. Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Applications d'un ensemble E dans un ensemble F.	
Application (ou fonction) d'un ensemble E dans un ensemble F. Graphe d'une application.	Manipuler le langage élémentaire des applications. Faire le lien avec la notion de graphe. Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Toute formalisation est hors programme.
Restrictions.	Notation $f_{\mid I}$.
Image directe	Les notions d'injectivité et de surjectivité ne sont pas exigibles. Reconnaître une fonction composée.
bijection, réciproque d'une bijection, composée de bijections. Application identité.	Résoudre des équations.

Pratique calculatoire

Ce chapitre a pour but de mettre en œuvre des techniques de calcul indispensables en mathématiques et dans les autres disciplines scientifiques. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul intégral et différentiel sont différées à des chapitres ultérieurs. Le point de vue adopté ici est principalement pratique. Le professeur organise ce chapitre de la façon qui lui semble la plus appropriée, en tenant compte des acquis des étudiants et des besoins des autres disciplines. Il est nécessaire d'insister sur ces notions tôt dans l'année afin de faciliter le reste de l'apprentissage.
Les objectifs de formation sont les suivants :

- *une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;*
- *l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;*
- *la manipulation des fonctions classiques ;*
- *le calcul de limites, de dérivées et de primitives ;*
- *l'utilisation des notations techniques fondamentales du calcul algébrique.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Inégalités larges, inégalités strictes, intervalles de $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Dresser un tableau de signe. Résoudre des inéquations. Interpréter graphiquement une inéquation du type $f(x) \leqslant \lambda$. L'objectif est une maîtrise de la manipulation élémentaire des inégalités.
Valeur absolue, inégalité triangulaire.	Interpréter sur la droite réelle des inégalités du type $\lvert x-a\rvert \leqslant b$.
Majoration, minoration et encadrement de sommes, de produits et de quotients.	
b) Équations, inéquations polynomiales et trigonométriques	
Équation du second degré.	Déterminer le signe d'un trinôme.
Cercle trigonométrique, valeurs usuelles, formules exigibles : $$\cos(a+b), \sin(a+b), \cos(2x), \sin(2x)$$	Utiliser le cercle trigonométrique pour résoudre des équations et inéquations trigonométriques simples : $\cos x = \cos a$, $\sin x = \sin a$ et $\tan x = \tan a$; $\cos x \leqslant \cos a$, $\sin x \leqslant \sin a$ et $\tan x \leqslant \tan a$. Exprimer $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$.
	Déterminer l'ensemble de définition de fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles. Résolution d'équations du type $\cos x + \sin x = r$. $\leftrightarrows$ P Amplitude et phase.
c) Calcul de limites en un point ou à l'infini	
Aucune étude théorique de la limite n'est abordée à ce stade. On s'appuiera sur les connaissances des limites acquises au lycée.	
Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'un inverse. Exemples de formes indéterminées.	Lever, sur des exemples simples, certaines formes indéterminées à l'aide de limites de taux d'accroissement, à savoir : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x};$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\exp(x)-1}{x};\quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}.$$ On s'appuie sur l'étude de la dérivée faite au lycée.

Contenus	Capacités & Commentaires
Croissances comparées. Limite d'une fonction composée.	Calculer une limite par encadrement ou par comparaison.

d) Calcul de dérivées et de primitives

Contenus	Capacités & Commentaires
Dérivées des fonctions usuelles : $x \mapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}$, exp, ln, cos, sin.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées dans des cas simples. Aucune étude théorique de la dérivation n'est abordée à ce stade.
Opérations : somme, produit, quotient et composée. Dérivation de $t \mapsto \exp(\varphi(t))$ avec φ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Dérivées partielles de fonctions de plusieurs variables.	$\leftrightarrows$ P et GP : thermodynamique, mécanique des fluides, diffusion.
Primitive sur un intervalle.	Reconnaître des expressions du type $\frac{u'}{u}$, $u'u^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{u'}{u^n}$, $u'.(v' \circ u)$ où v est une fonction dérivable afin d'en calculer les primitives. $\leftrightarrows$ PC et GP : mécanique, cinétique.

e) Sommes et produits

Contenus	Capacités & Commentaires
Notations et règles de calcul.	Effectuer un changement d'indice. Sommes et produits télescopiques. L'objectif est de faire acquérir aux étudiants une aisance dans la manipulation des symboles $\sum$ et Π sur des exemples de difficulté raisonnable.
Factorielle, coefficients binomiaux.	Notations $n!$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ lue « k parmi n ». Aucun lien avec le dénombrement n'est attendu à ce stade.
Triangle de Pascal, formule de binôme de Newton.	Développer $(a \pm b)^n$.
Exemple de calcul de sommes : $\sum_{k=0}^{n} k \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k.$	

Nombres complexes

L'objectif est de consolider et d'approfondir les acquis du cycle terminal. Le programme combine plusieurs aspects :

— *équations algébriques ;*
— *interprétation géométrique des nombres complexes ;*
— *exponentielle complexe et applications à la trigonométrie.*

Il est recommandé d'illustrer le cours de nombreuses figures et de relier ce chapitre aux besoins des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes	
La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.	
Parties réelle et imaginaire, forme algébrique. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison : définition, compatibilité avec les opérations.	Notations $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$. Interpréter géométriquement le conjugué d'un nombre complexe. Notation $\overline{z}$.
Le plan étant muni d'un repère orthonormal, affixe d'un point, d'un vecteur et image d'un nombre complexe. Module d'un nombre complexe. Relation $\|z\|^2 = z\overline{z}$. Module d'un produit et d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormal direct. Interpréter géométriquement le module d'un nombre complexe. Interpréter géométriquement $\|z-a\|$ avec $a, z \in \mathbb{C}$.
b) Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1	
Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$, formules d'Euler. Description des éléments de $\mathbb{U}$. Relation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\mathrm{e}^{\mathrm{i}b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+b)}$. Formule de Moivre.	 Factoriser $1 \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Linéariser et factoriser des expressions trigonométriques. Retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$ pour de petites valeurs de n. Il s'agit de consolider une pratique du calcul, en évitant tout excès de technicité.
Définition de l'exponentielle d'un nombre complexe : $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$ où $z = x + iy$ et $x, y \in \mathbb{R}$.	
c) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Arguments d'un nombre complexe non nul. Coordonnées polaires.	Écrire un nombre complexe non nul sous la forme $z = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ (forme trigonométrique). Interpréter géométriquement un argument d'un nombre complexe.
Arguments d'un produit, d'un quotient. Forme exponentielle d'un nombre complexe.	 ⇆P : système sinusoïdal forcé (mécanique et électricité).
d) Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	
Racines carrées d'un nombre complexe.	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou trigonométrique.
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$. Exemples de recherche guidée de racines cubiques, racines quatrièmes. Les racines n-ièmes sont hors programme.

Étude globale d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles

Ce chapitre est naturellement à relier aux disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités sur les fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$	
Représentation graphique d'une fonction.	Représenter graphiquement une fonction donnée par son expression.
Reconnaître une bijection à partir d'une représentation graphique	
Fonctions paires, impaires, périodiques.	Interpréter géométriquement ces propriétés.
Somme, produit, composée. Monotonie. Fonctions majorées, minorées, bornées.	Interpréter géométriquement ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f \rvert$ est majorée.
Extremum, extremum local.	
b) Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	Interpréter géométriquement la dérivée d'une fonction en un point.
Application à l'étude des variations d'une fonction.	Dresser le tableau de variation d'une fonction. À ce stade, un tableau de variation clairement présenté, accompagné de la détermination du signe de la dérivée et des valeurs ou limites aux bornes, vaut justification de bijectivité.
Fonction réciproque.	Tracer le graphe d'une fonction réciproque. Calculer la dérivée d'une fonction réciproque. La dérivée de la réciproque est obtenue géométriquement à l'aide de la symétrie des tangentes.
c) Étude d'une fonction	
Plan d'étude d'une fonction.	Déterminer le domaine de définition d'une fonction Déterminer les symétries et les périodicités afin de réduire l'ensemble d'étude d'une fonction. Déterminer les variations et les limites d'une fonction. Déterminer les extremums éventuels d'une fonction. Tracer le graphe d'une fonction. Obtenir des inégalités grâce à une étude de fonction. Les asymptotes ainsi que la position des tangentes par rapport à la courbe seront traitées ultérieurement comme des applications des développements limités.
d) Fonctions usuelles	
Valeur absolue.	Représenter graphiquement la fonction.
Étude des fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions circulaires directes et réciproques : rappels sur les fonctions cos et sin, définition et étude des fonctions tan, arcsin, arccos, arctan .	Déterminer la dérivée, les variations et le graphe de ces fonctions.
Croissances comparées des fonctions logarithme népérien, puissances et exponentielle.	Comparer des fonctions au voisinage de l'infini.

Géométrie élémentaire du plan

Les étudiants connaissent le plan géométrique euclidien en tant qu'ensemble de points, la façon d'associer à deux points A et B le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ainsi que les propriétés opératoires usuelles. Il convient d'observer que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de deux vecteurs indépendants, c'est-à-dire non colinéaires. Dans le plan, les notions suivantes sont supposées connues : calcul vectoriel, distance euclidienne, orthogonalité, repère orthonormal, angles. La donnée d'un repère orthonormal identifie le plan à $\mathbb{R}^2$ ou à $\mathbb{C}$. La géométrie joue un rôle essentiel en mathématiques et dans les disciplines scientifiques et technologiques ; elle est au cœur des compétences de modélisation et de représentation. Ce chapitre doit être traité en liaison avec les autres disciplines. Il a d'autre part aussi la vocation d'introduire aux espaces vectoriels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans le plan	
Repère orthonormal (ou orthonormé). Coordonnées cartésiennes	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. Les coordonnées polaires seront vues en cours de physique. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ sinon.	Interpréter le produit scalaire en termes de projection orthogonale.
Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale. Caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs. Déterminer une mesure d'un angle non orienté. ⇆P et GP : travail d'une force en mécanique, flux en mécanique des fluides et en diffusion.
c) Déterminant dans une base orthonormée directe	
Définition géométrique : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls alors $$[\vec{u},\vec{v}] = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\sin(\vec{u},\vec{v})$$ et $[\vec{u},\vec{v}]=0$ sinon. Bilinéarité, antisymétrie.	Interpréter un déterminant en termes d'aire orientée d'un parallélogramme. Caractériser la colinéarité de deux vecteurs. La notion d'orientation du plan est admise, ainsi que celle de base orthonormale directe. Calculer le déterminant dans une base orthonormale directe.
d) Droites	
Définition, vecteur directeur, vecteur normal. Équation cartésienne et système d'équations paramétriques.	Passer d'une représentation paramétrique à une représentation cartésienne et inversement. Déterminer l'intersection de deux droites. Exemples de calcul de projeté orthogonal d'un point sur une droite et de distance d'un point à une droite en exercice.

Géométrie élémentaire de l'espace

Dans ce chapitre, on adapte à l'espace les notions étudiées dans le chapitre de géométrie plane. L'étude de ce contenu mathématique nouveau s'appuie de façon essentielle sur le chapitre de géométrie plane et sur l'intuition géométrique développée dans les autres disciplines. Des notions telles que le repérage dans l'espace et le produit vectoriel doivent être abordées en concertation avec les professeurs des disciplines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Repérage dans l'espace	
Repère orthonormal (ou orthonormé) de l'espace ; coordonnées cartésiennes.	Maîtriser le lien entre la géométrie pure et la géométrie repérée. On peut, à cette occasion, introduire le vocabulaire relatif à l'algèbre linéaire : famille libre, famille liée, vecteurs linéairement indépendants, vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires, combinaison linéaires de vecteurs.
b) Produit scalaire	
Définition géométrique. Bilinéarité, symétrie.	Exprimer le produit scalaire dans une base orthonormale directe. Démonstrations hors programme. ⇆P et GP : travail d'une force en mécanique, flux en mécanique des fluides et en diffusion.
c) Plans et droites	
Différents modes de définition d'un plan : par un point et deux vecteurs non colinéaires, un point et un vecteur normal, trois points non alignés.	Déterminer une équation cartésienne ou un système d'équations paramétriques d'un plan. Passer d'une représentation à l'autre.
Différents modes de définition d'une droite : par un point et un vecteur directeur, par deux points distincts, comme intersection de deux plans.	Déterminer un vecteur directeur d'une droite définie comme intersection de deux plans. Déterminer un système d'équations cartésiennes ou un système d'équations paramétriques d'une droite. Passer d'une représentation à l'autre. Étudier les intersections. Exemples de calcul de distance d'un point à un plan, distance d'un point à une droite et du projeté orthogonal d'un point sur une droite, sur un plan en exercice.

Équations différentielles linéaires

Les étudiants ont déjà étudié des exemples simples d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, du premier et du second ordre. Il s'agit dans ce chapitre de consolider et d'étendre cette étude. Les équations différentielles sont un domaine à la fois très riche pour les mathématiques, pour la physique et la chimie. Ce chapitre doit être traité en concertation avec les professeurs des autres disciplines afin de l'illustrer par des exemples issus des domaines scientifiques et technologiques.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Équation $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions, à valeurs réelles, définies et continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$.	Écrire et résoudre l'équation homogène associée. Utiliser le principe de superposition ou la méthode de variation de la constante pour trouver une solution particulière. Déterminer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Décrire l'ensemble des solutions. Les étudiants doivent savoir étudier des équations dans lesquelles la variable et la fonction inconnue sont représentées par d'autres lettres que x et y. À ce stade, la résolution ne doit pas faire appel à une intégration par parties ou à un changement de variable. ⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Théorème admis. Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. ⇆ P : modélisation des circuits électriques RC, RL et de systèmes mécaniques linéaires. ⇆ I : méthode d'Euler pour la recherche d'une solution approchée d'un problème de Cauchy.
b) Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' + ay' + by = f(t)$ où a et b sont des nombres réels et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Donner l'équation caractéristique. Résoudre l'équation homogène, notamment dans le cas d'une équation de la forme $y'' \pm \omega^2 y = 0$. Déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $P(x)\mathrm{e}^{\omega x}$ avec $\omega \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale. Utiliser le principe de superposition. Exprimer la solution générale de l'équation avec second membre comme la somme de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière. Aucune technique n'est exigible pour toute autre forme de second membre. ⇆ PC : régime libre, régime forcé ; régime transitoire, régime établi. ⇆ P : résistance des matériaux, pôles d'un système. ⇆ GP : réacteurs.
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	Théorème admis. Déterminer la solution vérifiant une condition initiale donnée. ⇆ P : modélisation des circuits électriques LC, RLC et de systèmes mécaniques linéaires.

Systèmes linéaires

Il s'agit d'introduire des notions nouvelles pour les étudiants. L'objectif est double :

- *maîtriser la théorie des systèmes linéaires du point de vue de la méthode du pivot, pour son intérêt mathématique et algorithmique, ainsi que pour ses applications aux disciplines scientifiques et technologiques ;*
- *préparer l'introduction de l'algèbre linéaire abstraite.*

Les résultats, présentés dans le cadre des systèmes à coefficients réels, sont étendus sans difficulté au cas des systèmes à coefficients complexes.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Systèmes linéaires	
Définition d'un système linéaire de n équations à p inconnues.	Reconnaître qu'un système donné est un système linéaire. Les solutions sont définies comme éléments de $\mathbb{R}^p$.
Système homogène.	Système homogène associé à un système quelconque.
Matrice A d'un système linéaire ; matrice augmentée $(A\|B)$ où B est la colonne des seconds membres.	Calculer le produit d'une matrice par une colonne. Écrire un système sous la forme matricielle $AX = B$.
Opérations élémentaires sur les lignes d'un système ou d'une matrice : échange des lignes L_i et L_j, multiplication de L_i par $\lambda \neq 0$, ajout de $\lambda \cdot L_j$ à L_i pour $i \neq j$.	Interpréter les opérations sur les lignes en termes de système linéaire. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$; $L_i \leftarrow \lambda L_i$; $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.
Résolution pratique par la méthode du pivot de Gauss. Inconnues principales, inconnues secondaires.	

Nombres réels et suites numériques

L'objectif est d'énoncer les propriétés fondamentales de la droite réelle, et de les appliquer à l'étude des suites, qui interviennent en mathématiques tant pour leur intérêt pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximations de nombres réels).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombres réels	
Ensembles usuels de nombres : entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels.	Il s'agit de brefs rappels. La construction de ces ensembles de nombres est hors programme.
Droite réelle.	Faire le lien avec la géométrie. La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
La relation d'ordre $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$: majorant, maximum, minorant, minimum.	
Partie entière d'un nombre réel	Notation $\lfloor x \rfloor$.
Approximations décimales d'un nombre réel.	Déterminer les valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
b) Généralités sur les suites réelles	
Modes de définition d'une suite.	Reconnaître une suite définie de façon explicite, implicite ou par récurrence.
Opérations. Monotonie, stricte monotonie.	
Suites minorées, majorées, bornées.	Manipuler sur des exemples des majorations et minorations. Une suite (u_n) est bornée si et seulement si $(\|u_n\|)$ est majorée.
Suites arithmétiques et suites géométriques.	
c) Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Prouver l'existence d'une limite ℓ en majorant $\|u_n - \ell\|$, notamment lorsque la suite vérifie une inégalité du type : $\|u_{n+1} - \ell\| \leqslant k\|u_n - \ell\|$. Notation $u_n \to \ell$.
Unicité de la limite. Suite convergente, suite divergente. Toute suite réelle convergente est bornée.	Notation $\lim u_n$.
Opérations sur les limites de suites : somme, multiplication par un scalaire, produit, inverse.	Lever une indétermination.
Cas des suites géométriques, arithmétiques. Passage à la limite dans une inégalité.	
d) Théorèmes d'existence d'une limite	
Théorèmes de convergence par encadrement.	
Divergence par comparaison : si (u_n) tend vers $+\infty$ et si, pour tout n, on a $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) tend vers $+\infty$.	Adapter cet énoncé aux suites tendant vers $-\infty$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de la limite monotone.	Théorème admis. Exploiter ce théorème sur des exemples.

e) Comparaisons de suites

Relations de comparaison : négligeabilité, équivalence.	Notations , $u_n = o(v_n)$ et $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n)$, n^α et $e^{\gamma n}$.	Traduire les croissances comparées à l'aide de o.
Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient, les puissances.	Exploiter ces résultats pour déterminer le comportement asymptotique de suites.
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	

Limites, continuité et dérivabilité

Ce chapitre est divisé en deux parties, consacrées aux limites et à la continuité pour la première, au calcul différentiel pour la seconde. On y formalise les résultats qui ont été utilisés d'un point de vue calculatoire dans le premier chapitre d'analyse.

Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.

Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles.

Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A, +\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

A - Limites et continuité

L'essentiel du paragraphe a) consiste à adapter au cadre continu les notions déjà abordées pour les suites. Le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Limite finie ou infinie en un point ou en $\pm\infty$	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	La définition quantifiée n'est pas exigible. Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, $f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \ell$.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.
Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I \setminus \{a\}$.	
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a.	Exploiter ces résultats sur des exemples. Adaptation des énoncés relatifs aux suites.
b) Comparaison des fonctions	
Passage à la limite dans une inégalité. Théorème d'encadrement pour les fonctions.	
Théorème de la limite monotone.	Démonstration non exigible.
Relations de négligeabilité et d'équivalence.	Adapter au cas des fonctions les définitions et les résultats étudiés sur les suites.
c) Continuité en un point	
Continuité de f en un point a de I.	
Continuité à droite et à gauche.	
Prolongement par continuité en un point.	Pour a n'appartenant pas à I, la fonction f a une limite finie en a si et seulement si elle se prolonge par continuité en a.
Opérations sur les fonctions continues : somme, produit, quotient, composition.	Exploiter ces résultats sur des exemples.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
d) Continuité sur un intervalle	
Définition. Opérations. Théorème des valeurs intermédiaires. Image d'un intervalle par une fonction continue.	La démonstration n'est pas exigible. ⇆ I : application de la dichotomie à l'approximation d'un zéro d'une fonction continue.
Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
e) Continuité et bijectivité	
Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$ dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$ et de même monotonie que f.	Appliquer ce résultat sur des exemples. Comparer la représentation graphique d'une fonction continue strictement monotone et celle de sa réciproque. La démonstration est hors programme.

B - Dérivabilité

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité de f en a, nombre dérivé.	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point particulier, à partir de la définition. Notation $f'(a)$. La droite d'équation $$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$ est appelée tangente au graphe de f au point d'abscisse a. Cette définition peut être justifiée (limite de sécantes). Interprétation cinématique. ⇆ I : méthode de Newton.
Dérivabilité à droite et à gauche en a.	
Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle.	
b) Opérations sur les fonctions dérivables	
Si f et g sont dérivables en a, dérivabilité et dérivée en a de $f+g$, fg et, si $g(a) \neq 0$, de $\frac{f}{g}$.	
Dérivabilité et dérivée en a de $g \circ f$ lorsque f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$.	
Si f est une fonction continue et strictement monotone (donc bijective) de l'intervalle I sur l'intervalle J et si f est dérivable en a, condition nécessaire et suffisante de dérivabilité de f^{-1} en $f(a)$ et calcul de la dérivée en ce point.	

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Propriétés des fonctions dérivables	
Notion d'extremum local. Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.	
Théorème de Rolle.	Utiliser le théorème de Rolle pour établir l'existence de zéros d'une fonction. Démonstration non exigible.
Égalité des accroissements finis.	Interpréter ce résultat de manière géométrique et cinématique. Démonstration non exigible.
Inégalité des accroissements finis : si une fonction f de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, vérifie pour tout t de $]a,b[$, $\|f'(t)\| \leqslant M$, alors, pour tous x, y de $[a,b]$, on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant M\|x-y\|$.	
Caractérisation des fonctions constantes, croissantes, strictement croissantes, parmi les fonctions dérivables.	Appliquer ces résultats sur des exemples.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle I, où k appartient à $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$,	Ensemble $\mathscr{C}^k(I,\mathbb{R})$.
Opérations : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.	Maîtriser le calcul des fonctions dérivées. Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

Intégration sur un segment

L'objectif de ce chapitre est de consolider, d'approfondir et d'étendre la notion d'intégrale étudiée au lycée. La présentation de l'intégrale d'une fonction positive sur un segment s'appuie sur la notion d'aire, mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale d'une fonction continue sur un segment	
Intégrale $\int_{[a,b]} f$ d'une fonction f continue sur un segment $[a,b]$ définie avec l'aire sous la courbe.	Interpréter géométriquement l'intégrale d'une fonction positive (aire sous la courbe). Modéliser une situation physique par une intégration. La construction est hors programme. Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$.
Valeur moyenne. Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.	
Inégalité $\left\|\int_{[a,b]} f\right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	Majorer et minorer une intégrale.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. ⇆ I : méthode des rectangles, des trapèzes.
b) Calcul intégral	
Si f est une fonction continue sur I et si x_0 est un point de cet intervalle, alors $$x \longmapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0. En particulier, toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.	Appliquer ce théorème sur des exemples. Deux primitives d'une fonction continue sur l'intervalle I, diffèrent d'une constante.
Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Pour f de classe $\mathscr{C}^1$: $$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b) - f(a).$$	
Intégration par parties. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors, pour tous a et b dans I, $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$	Appliquer ces techniques au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Les changements de variables seront donnés aux élèves.
Primitives des fonctions usuelles.	Savoir reconnaître des primitives usuelles.

Développements limités

L'objectif est la maîtrise du calcul de développements limités simples. Le calcul de développements limités à un ordre élevé n'est pas un objectif du programme ; il relève des outils logiciels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a.	Interpréter un développement limité comme approximation d'une fonction. Ramener un développement limité en 0 par translation. Adaptation au cas où f est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Unicité, troncature.	Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p \left(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o\left(h^n\right)\right)$$ ou encore $$f(x) \underset{x\to a}{=} (x-a)^p \left(a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right)\right)$$ avec $a_0 \neq 0$. Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0 h^p$; $f(x) \underset{x\to a}{\sim} a_0 (x-a)^p$.	Étudier le signe d'une fonction au voisinage d'un point à l'aide d'un développement limité.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit.	Exploiter la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement limité.
Composition, application au quotient.	Déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une fonction composée. Aucun résultat général sur ce point n'est exigible. La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Intégration terme à terme d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	Démonstration non exigible. Aucune autre formule dite de Taylor n'est exigible. Calculer le développement limité d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ à partir de ses dérivées successives.
Développements limités usuels.	Exploiter les développements limités usuels dans le cadre de calculs de développements limités simples. Exploiter des outils logiciels pour des développements limités plus complexes. Les étudiants doivent connaître les développements limités à tout ordre en 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$, ainsi que celui de tan à l'ordre 3.
b) Applications des développements limités	
Aucune théorie n'est attendue dans ce paragraphe. On illustrera seulement les différents cas de figure.	
Calcul de limites.	Utiliser les développements limités pour lever une forme indéterminée.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Étude locale d'une fonction.	Déterminer un prolongement par continuité, la dérivabilité en un point, la nature d'un extremum, une tangente et sa position relative locale par rapport à la courbe, grâce à un développement limité. Déterminer les éventuelles asymptotes et leurs positions relatives locales. Déterminer la position de la courbe d'une fonction dérivable en a par rapport à sa tangente au point d'abscisse a. Aucun résultat général n'est exigible.

Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes, et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques. Le programme se limite au cas où les coefficients sont réels.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Polynômes à une indéterminée	
Ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.	Aucune connaissance de la construction de $\mathbb{R}[X]$ n'est exigible. Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ ou $\sum_{p=0}^{n} a_p X^p$.
Opérations : somme, produit et composée.	
Degré d'un polynôme. Coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'une somme et d'un produit.	Le degré du polynôme nul vaut par convention $-\infty$. Ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
Divisibilité dans $\mathbb{R}[X]$	
b) Racines	
Racine (ou zéro) d'un polynôme.	Déterminer les racines d'un polynôme. Caractériser les racines par la divisibilité. Savoir factoriser par $X - \alpha$ par une division euclidienne.
Multiplicité d'une racine.	
Majoration du nombre de racines d'un polynôme non nul par son degré.	
Polynôme scindé sur $\mathbb{R}$, polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.	
c) Fractions rationnelles	
Définition d'une fraction de rationnelle comme quotient de deux polynômes	Calcul de la partie entière d'une fraction rationnelle par division euclidienne.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles dont le dénominateur est scindé à racines simples ou de degré inférieur ou égal à 3.	Calcul de la partie polaire en un pôle simple. Aucune connaissance n'est exigible dans le cas de pôles d'ordre supérieur. ⇆ GP : réacteurs.

Calcul matriciel

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Matrices : opérations et propriétés	
Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$.	Notation $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
Matrices carrées, matrices triangulaires, matrices diagonales.	
Somme de deux matrices. Multiplication par un scalaire.	Interpréter le produit AX d'une matrice par une colonne comme une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit de deux matrices.	Interpréter la j-ième colonne du produit AB comme le produit de A par la j-ième colonne de B. Interpréter la i-ième ligne du produit AB comme le produit de la i-ième ligne de A par B.
Formule du binôme.	Calculer les puissances de certaines matrices carrées.
b) Matrice inversible	
Matrice carrée inversible. Inverse. On appelle groupe linéaire, noté $GL_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices inversibles de taille n.	Caractériser l'inversibilité d'une matrice carrée A par l'existence et l'unicité de la solution de tout système de la forme $AX = B$ où X et B sont deux matrices colonnes. Caractériser l'inversibilité par le nombre de pivots. Reconnaître une matrice inversible et calculer son inverse. On admet que l'inversibilité à droite implique l'inversibilité à gauche et réciproquement. Toute théorie générale des groupes est exclue. La notion de comatrice est non exigible.
Inverse du produit de matrices inversibles.	
c) Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notation ${}^tA$.

Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et applications linéaires

Le programme se limite à l'algèbre linéaire sur $\mathbb{R}$. Après l'approche numérique des chapitres « Systèmes linéaires » et « Calcul matriciel », on passe à une vision plus géométrique. Les trois grands thèmes traités sont les espaces vectoriels, la théorie de la dimension finie et les applications linéaires.

Dans le sous-chapitre « A - Espaces vectoriels » on généralise les objets de la géométrie du plan et de l'espace : vecteurs, bases, droites, plans...

Le deuxième sous-chapitre « B - Espaces vectoriels de dimension finie » vise à définir la dimension d'un espace vectoriel admettant une famille génératrice finie et en présente plusieurs méthodes de calcul. La notion de dimension interprète le nombre de degrés de liberté pour un problème linéaire.

L'étude des applications linéaires suit naturellement celle des espaces vectoriels au sous-chapitre « C - Applications linéaires et représentations matricielles ». Son objectif est de fournir un cadre aux problèmes linéaires. Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à une dimension supérieure.

A - Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) $\mathbb{R}^n$ et ses sous-espaces vectoriels	
Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}$.	On pourra citer les espaces vectoriels $\mathbb{K}[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en exemple. Seul $\mathbb{R}^n$ est exigible.
Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$: définition et caractérisation. Droites et plans vectoriels.	Identifier un ensemble comme un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu.
L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.	
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Intersection de sous-espaces vectoriels.	Notation $\mathrm{Vect}(u_1,\dots,u_p)$. Passer du registre géométrique au registre algébrique et inversement.
b) Familles finies de vecteurs	
Vecteurs colinéaires.	
Famille libre, famille liée.	Déterminer si une famille donnée est libre ou liée.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	Déterminer si une famille est génératrice.
Bases. Base canonique de $\mathbb{R}^n$.	On pourra donner les bases canoniques de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Seule celle de $\mathbb{R}^n$ est exigible.
Coordonnées dans une base. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x dans une base $\mathscr{B}$.	Déterminer les coordonnées d'un vecteur donné dans une base donnée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

B - Dimension de $\mathbb{R}^n$ et de ses sous-espaces vectoriels

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Dimension finie	
Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul, on peut extraire une base.	Exhiber une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul de dimension finie. Application à l'existence d'une base pour tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel non nul de dimension finie.
Théorème de la base incomplète : toute famille libre d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension.	On convient que l'espace $\{0_E\}$ est de dimension nulle.
Dimension de $\mathbb{R}^n$. Si E est de dimension p et $\mathscr{F}$ une famille de n vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice.	
b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie	
Si F est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leqslant n$. De plus, $F = \mathbb{R}^n$ si et seulement si les deux dimensions sont égales.	Démontrer l'égalité de deux sous-espaces vectoriels à l'aide d'une inclusion et de l'égalité de leurs dimensions.

C - Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et représentations matricielles

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes et automorphismes.	Notations $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ et $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$.
Opérations sur les applications linéaires : combinaisons linéaires et composées. Règles de calcul.	
Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes.	Notation $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ pour le groupe linéaire.
Image directe d'un sous-espace vectoriel.	
Image et noyau. L'image par une application linéaire u d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.	Déterminer une base de l'image, du noyau d'une application linéaire. Notations $\mathrm{Im}(u)$, $\mathrm{Ker}(u)$.
b) Isomorphismes	
Une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^n$.	
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.	

Contenus	Capacités & Commentaires
d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Identité, homothéties.	Notation Id_E.
e) Rang d'une application linéaire	
Définition du rang d'une application linéaire comme la dimension de son image. Théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ alors u est de rang fini et $\dim(\mathbb{R}^p) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.	La démonstration est hors programme.
f) Représentation matricielle en dimension finie	
Matrice d'une application linéaire u dans un couple de bases.	Passer du registre vectoriel au registre matriciel pour exprimer les coordonnées de $u(x)$ en fonction de celles de x. Passer d'une écriture du type $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy)$ à une écriture matricielle et réciproquement. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, où $\mathscr{B}$ est une base de l'espace de départ et $\mathscr{C}$ une base de l'espace d'arrivée. Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ dans le cas où $\mathscr{B} = \mathscr{C}$.
Matrice d'une composée. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes. Matrice de passage d'une base à une autre. Effet d'un changement de bases sur la matrice d'un vecteur, d'un endomorphisme. Matrices semblables.	Déterminer la matrice d'un vecteur, d'une application linéaire, après un changement de base(s). Choisir une base adaptée à un problème donné.

Déterminants

Ce chapitre développe une théorie du déterminant des matrices carrées, puis des endomorphismes d'un espace de dimension finie. Il met en évidence l'aspect algébrique (caractérisation des matrices inversibles) et l'aspect géométrique (volume orienté).

Les capacités attendues sont la connaissance et l'utilisation des propriétés du déterminant permettant un calcul simple via des opérations élémentaires. Tout excès de technicité est exclu et l'outil informatique est utilisé dès que le calcul s'avère trop lourd.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Déterminant d'une matrice carrée	
Il existe une unique application de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, appelée déterminant, telle que : (i) le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes ; (ii) l'échange de deux colonnes a pour effet de multiplier le déterminant par -1 ; (iii) le déterminant de la matrice unité I_n vaut 1.	Notation det. La démonstration de ce théorème pour $n \geqslant 4$ et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. Interprétation géométrique de cette définition pour $n \in \{2, 3\}$ par les notions d'aire et de volume algébriques.
b) Propriétés du déterminant	
Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul. Effet sur un déterminant des opérations élémentaires en colonnes.	$\leftrightarrows$ I : calcul du déterminant d'une matrice.

Contenus	Capacités & Commentaires
Déterminant d'une matrice triangulaire. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.	Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis des lignes que des colonnes.
Développement par rapport à une colonne ou une ligne du déterminant d'une matrice.	Démonstration non exigible. La notion de comatrice est non exigible.

c) Déterminant d'une famille de vecteurs, d'un endomorphisme

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.	La formule de changement de bases pour un déterminant est hors programme. Traduction sur les déterminants d'endomorphismes des propriétés vues sur les déterminants de matrices.

Réduction d'endomorphismes

Ce chapitre étudie la réduction des matrices et des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application des résultats de la réduction à la recherche des solutions d'une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants crée un nouveau pont entre l'algèbre et l'analyse et anticipe l'étude des équations différentielles linéaires dont la résolution repose sur des outils similaires.

Contenus	Capacités & commentaires

a) Éléments propres et polynôme caractéristique

Valeur propre, vecteur propre, sous-espaces propre d'un endomorphisme. Spectre. Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.	Interprétation en termes de droite stable. Notation Sp.
Polynôme caractéristique d'un endomorphisme. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Comparaison entre l'ordre de multiplicité d'une valeur propre et la dimension du sous-espace propre associé.	
Éléments propres d'une matrice.	Extension des définitions et de ces résultats aux matrices.

b) Endomorphismes et matrices diagonalisables

Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de E. Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé. Un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé et dont toutes les valeurs propres sont simples est diagonalisable.	Interprétation : existence d'une base de vecteurs propres.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une matrice est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.	Extension des résultats précédents au cas des matrices.

c) Applications de la réduction

Contenus	Capacités & Commentaires
Calcul des puissances d'une matrice diagonalisable. Résolution de systèmes récurrents linéaires homogènes.	Les étudiants doivent aussi savoir traduire une récurrence scalaire en une récurrence vectorielle d'ordre 1 du type $X_{n+1} = AX_n$.

Intégration d'une fonction continue sur un intervalle

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale à des fonctions continues sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées.
L'étude de la semi-convergence des intégrales n'est pas un objectif du programme.
Les fonctions considérées sont continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On pourra illustrer ces intégrales avec des variables aléatoires à densité vues en BTS.

a) Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Contenus	Capacités & commentaires
Pour $f : [a, b[\to \mathbb{R}$, $b > a$ ou $b = +\infty$, l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b par valeurs inférieures. Si tel est le cas, on note cette limite $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.	
Théorèmes de comparaison pour les fonctions à valeurs réelles, continues et de signe constant sur $[a, b[$, sous l'hypothèse $f \leqslant g$ ou $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{\sim} g(t)$ ou $f(t) \underset{\substack{t\to b\\ t<b}}{=} o(g(t))$.	Il suffit de vérifier l'hypothèse $f \leqslant g$ au voisinage de b.
Adaptation aux fonctions définies sur un intervalle $]a, b]$, avec $a < b$ ou $a = -\infty$, puis sur un intervalle $]a, b[$. Intégrales de référence : $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t,\ \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$$	
Nature de $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ selon le signe de α.	⇆ P : énergie en électricité. ⇆ GP : transformée de Laplace.
Relation de Chasles. Linéarité, positivité, croissance de l'intégrale.	On repassera par la limite de l'intégrale sur un segment pour effectuer des changements de variable et des intégrations par parties.

b) Intégrale absolument convergente

Contenus	Capacités & commentaires
On dit qu'une fonction f continue par morceaux sur I a une intégrale absolument convergente si l'intégrale de la fonction $\lvert f\rvert : t \mapsto \lvert f(t)\rvert$ est convergente.	L'étude de la semi-convergence n'est pas au programme.
Une intégrale absolument convergente est convergente.	Résultat admis.

Séries numériques

L'étude des séries prolonge celle des suites et prépare celle des séries de Fourier. Elle permet de mettre en œuvre l'analyse asymptotique. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Série à termes réels ; sommes partielles ; convergence ou divergence ; en cas de convergence, somme et restes.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Les étudiants doivent savoir prouver qu'une série diverge grossièrement en étudiant la limite du terme général.
Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge. Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, valeur de la somme en cas de convergence. Convergence et somme des séries dérivées $\sum\limits_{n\geqslant 1} nq^{n-1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)q^{n-2}$	
Convergence et somme de la série exponentielle $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x^n}{n!}$.	Résultat admis.
b) Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si (u_n) et (v_n) sont positives et si, pour tout n, $u_n \leqslant v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$, et $$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$ Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ est équivalente à celle de $\sum u_n$. Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n = o(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ entraine celle de $\sum u_n$.	
Comparaison à une série géométrique, règle de d'Alembert.	Toute autre règle de comparaison est hors programme.
Théorème de comparaison séries-intégrales : si $f : [n_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue, positive et décroissante, alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.	Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles ou de restes.
Séries de Riemann.	Les étudiants doivent savoir comparer une série à termes positifs à une série de Riemann.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Séries absolument convergentes	
Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes. La convergence absolue implique la convergence.	Démonstration non exigible. La notion de semi-convergence est hors programme.

Séries de Fourier

L'étude des séries de Fourier est présentée dans le cadre des fonctions T-périodiques, continues par morceaux et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ce chapitre développe des compétences de calcul à travers celui des coefficients de Fourier et l'application du théorème de Parseval. Ce chapitre est aussi particulièrement favorable aux interactions entre les disciplines.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Complément sur les fonctions définies par morceaux	
Une fonction définie sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur $[a,b]$ s'il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ soit prolongeable comme fonction continue (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$) sur $[a_i, a_{i+1}]$.	
Une fonction T-périodique est dite continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) si elle est continue par morceaux (respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux) sur une période.	Interprétation graphique. ⇆ P : signaux physiques ; dualité temps-fréquence.
Intégrale sur une période d'une fonction T-périodique et continue par morceaux.	Extension rapide de la définition et des propriétés de l'intégrale au cas des fonctions continues par morceaux.
b) Coefficients et séries de Fourier	
Coefficients de Fourier trigonométriques d'une fonction f.	Notation $a_k(f)$ et $b_k(f)$ ou, plus simplement, a_k et b_k. Le coefficient a_0 est défini comme la valeur moyenne sur une période.
Cas des fonctions paires, impaires. Sommes partielles de Fourier d'une fonction f définies, pour $n \in \mathbb{N}^*$, par : $S_n(f)(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t))$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$.	
c) Théorèmes de convergence	
Théorème de Parseval : si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, les séries $\sum a_n^2$ et $\sum b_n^2$ convergent et : $\frac{1}{T}\int_0^T \lvert f(t)\rvert^2 \mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$	Démonstration hors programme. Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. ⇆ P : puissance, valeur efficace

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème de Dirichlet : si f est une fonction T-périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et $$\lim_{n\to+\infty} S_n(f)(t) = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h)+f(t-h)\big)$$	Démonstration hors programme. On appelle régularisée de f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto \frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\big(f(t+h)+f(t-h)\big)$. ⇆ I : tracé de sommes partielles de Fourier d'une fonction.
Cas où f est continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.	Les étudiants doivent savoir appliquer ce résultat pour calculer la somme de certaines séries numériques. ⇆ PC : décomposition en harmoniques.

Probabilités

Probabilités sur un univers fini

Ce chapitre a pour objectifs de mettre en place un cadre théorique permettant de fonder l'étude des probabilités dans le cas d'un univers fini et de développer la formation des étudiants au raisonnement probabiliste. On enrichit le point de vue fréquentiste étudié au lycée par une formalisation ensembliste. On mettra l'accent sur des exemples issus de la vie courante ou provenant des autres disciplines.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces probabilisés finis	
Expérience aléatoire. L'ensemble des issues (ou résultats possibles, ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers.	Modéliser des situations aléatoires. On se limite au cas où l'univers Ω est fini.
Événement, événement élémentaire (singleton). Événement certain, événement impossible, événement contraire, événements incompatibles. Opérations sur les événements. Système complet d'événements.	Maîtriser le lien entre point de vue ensembliste et point de vue probabiliste. On se limite au cas où l'ensemble des événements est l'ensemble des parties de Ω. Notation $\overline{A}$ pour l'événement contraire.
On appelle probabilité sur un univers fini Ω toute application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ vérifiant $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple (A,B) de parties disjointes de Ω, $P(A\cup B) = P(A)+P(B)$.	Expliciter l'espace probabilisé modélisant une situation aléatoire décrite en langage naturel.
Un espace probabilisé fini est un couple (Ω, P) ou Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω. Probabilité de l'union de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance d'une probabilité.	
Si $\Omega = \{\omega_1,\dots,\omega_n\}$ et $p_1,\dots,p_n$ sont des réels positifs de somme 1, il existe une et une seule probabilité P sur Ω telle que : $$\forall i \in [\![1,n]\!],\ P(\{\omega_i\}) = p_i$$	Calculer la probabilité d'un événement à partir d'un tableau de probabilités. Choisir les valeurs des p_i revient à choisir un modèle probabiliste.
Équiprobabilité (ou probabilité uniforme).	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Indépendance et conditionnement	
Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. On la note aussi $P(A \mid B)$.	Illustrer une expérience aléatoire à l'aide d'arbres de probabilités. La définition de $P_B(A)$ est justifiée par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.
Formules des probabilités composées, des probabilités totales.	
Formules de Bayes : si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors $$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)\, P(A)}{P(B)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.
Indépendance de deux événements.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

Variables aléatoires réelles sur un univers fini

La notion de variable aléatoire modélise le résultat d'une expérience aléatoire. L'utilisation des variables aléatoires pour modéliser des situations simples dépendant du hasard fait partie des capacités attendues des étudiants. On se limite aux variables aléatoires réelles définies sur un univers fini.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Variable aléatoire	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.	Modéliser des situations données en langage naturel à l'aide de variables aléatoires. Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$.
Loi de probabilité P_X et fonction de répartition.	Déterminer la loi d'une variable aléatoire à partir de sa fonction de répartition. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$. La connaissance des propriétés générales des fonctions de répartition n'est pas exigible.
Image d'une variable aléatoire par une application.	
b) Espérance	
Définition de l'espérance d'une variable aléatoire. Variable centrée. Relation : $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$.	Interpréter l'espérance en terme de moyenne pondérée.
Théorème de transfert : si X est une variable aléatoire réelle à valeurs finies et $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors l'espérance de la variable aléatoire $\varphi(X)$ est donnée par la formule $\mathrm{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) P(X = x)$.	Calculer une espérance à l'aide de la formule du transfert.
En particulier, $\mathrm{E}(aX + b) = a\mathrm{E}(X) + b$ pour a et b deux réels donnés.	On admet de manière plus générale la linéarité de l'espérance.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
c) Variance et écart type d'une variable aléatoire	
Variance et écart type d'une variable aléatoire. Variable réduite.	Interpréter la variance comme indicateur de dispersion. Les moments d'ordre supérieur ne sont pas au programme.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$ (Kœnig-Huygens). $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\mathrm{V}(X)$ pour a et b deux réels donnés. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Interpréter la variance comme un indicateur de dispersion. L'inégalité de Markov n'est pas au programme.
d) Lois usuelles	
Loi certaine.	
Loi uniforme.	Reconnaître des situations modélisables par une loi uniforme.
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Reconnaître des situations modélisables par une loi de Bernoulli. Notation $\mathscr{B}(p)$.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	On fera le lien entre $\binom{n}{p}$ et le cardinal du nombre de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments. Reconnaître des situations modélisables par une loi binomiale. Notation $\mathscr{B}(n,p)$.
Espérance et variance associées à ces différentes lois.	

Couples de Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Ce sous-chapitre a pour objectifs de consolider les acquis sur les variables aléatoires réelles finies et d'étendre les résultats au cas de deux variables aléatoires. Dans ce cadre, l'accent est mis sur les couples. La notion d'espace probabilisé produit n'est pas au programme. L'univers est supposé fini.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Couple de variables aléatoires finies	
Couple de variables aléatoires . Loi du couple ou loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X,Y), les lois marginales de (X,Y) sont les lois de X et Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
b) Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes : pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x \cap Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	
Si X et Y sont indépendantes, pour tout $(A,B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P\big((X,Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	Démonstration hors programme.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	Démonstration hors programme.
Loi de $X+Y$ si X et Y sont indépendantes.	Application à la somme de deux variables aléatoires binomiales indépendantes.

c) Covariance et coefficient de corrélation linéaire

Covariance d'un couple de variables aléatoires.	Notation $\mathrm{Cov}(X,Y)$.
Variance de $aX+bY$.	
Coefficient de corrélation linéaire.	Notation $\rho(X,Y)$.
Inégalité $\lvert\rho(X,Y)\rvert \leqslant 1$.	Analogie avec la formule donnant le cosinus d'un angle formé par deux vecteurs à partir du produit scalaire et des normes.
Caractérisation des égalités $\rho(X,Y)=0$ et $\rho(X,Y)=\pm 1$.	
Si X et Y sont indépendantes, $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y); \quad \mathrm{Cov}(X,Y)=0;$$ $$\mathrm{V}(X+Y)=\mathrm{V}(X)+\mathrm{V}(Y).$$	Les réciproques sont fausses en général.