Exercices étoilés 2023

Avec un certain retard dont le comité de rédaction prie les abonnés de bien vouloir l'excuser, la RMS propose, comme chaque année, une liste d'exercices étoilés, issus des oraux 2023, qui seront corrigés dans le numéro 134-3.

La formule change !

Vous trouverez ci-dessous deux types d'exercices étoilés. Les exercices munis d'une étoile sont réservés aux étudiants, qui y trouveront des questions pas nécessairement plus faciles que celles des exercices doublement étoilés, mais qui ne font appel qu'à peu de connaissances. Les exercices avec deux étoiles sont, comme d'habitude, ouverts à tous.

Selon la tradition, le comité publiera prioritairement les solutions proposées par les lecteurs, qu'elle souhaite très nombreux.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 2 février 2024, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com*.

Le comité de rédaction remercie Catherine Aymard, Laurent Bonavero, Philippe Chateaux, Denis Choimet, Pierre-Jean Desnoux, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Cyril Germain, Hervé Gianella, Gil Guibert, Max Hochart, Mohamed Houkari, Denis Jourdan, Romain Krust, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, Jason Marest, Roger Mansuy, François Moulin, Jean Nougayrède, Renaud Palisse, Gérald Petit, Mickaël Prost, Marc Rezzouk, Emmanuel Roblet, Eddy Routin, Philippe Patte, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Écoles Normales Supérieures – MP – MPI

1 ★ ★ [PLSR] Soient S et T des ensembles finis non vides et f une application de S dans T. On pose $X = \big\{(x,y) \in S^2,\ f(x) = f(y)\big\}$. Montrer que
$|X| \geqslant \max\left(\dfrac{|S|^2}{|T|}, \left(\left\lceil \dfrac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)^2 + |S| - \left\lceil \dfrac{|S|}{|T|} \right\rceil\right)$.

2 ★ [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et S un sous-ensemble non vide de $[\![1, n]\!]$ tels que $\left| m - \displaystyle\sum_{i \in S} x_i \right| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

5 ★ ★ [P] Soit n un entier premier > 1. Montrer que -1 est un carré modulo n si et seulement si n est somme de deux carrés d'entiers.

9 ★ ★ ***a)*** Calculer $\sum_{d|n} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

b) Calculer $\sum_{d|n} \mu(d)$ où μ est la fonction de Möbius définie par $\mu(1) = 1$, $\mu(p) = -1$, $\mu(p^k) = 0$ pour $k \geqslant 2$ si p est un nombre premier et $\mu(nm) = \mu(n)\,\mu(m)$ si $n \wedge m = 1$.

On pose $F : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \left|\left\{\dfrac{p}{q} \in [0,1]\ ;\ q \leqslant x\right\}\right|$.

c) Montrer que $F(x) \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x)$.

10 ★ [P] Soient p, q deux nombres premiers distincts. On note $v_p(n)$ la valuation p-adique d'un entier n. On pose, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $N(m) = (1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^m)$. Trouver une constante $c > 0$ telle que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $v_p(N(m)) \leqslant cm\ln(m)$.

11 ★ ★ [PLSR] Si X est un ensemble fini, on note $X^* = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} X^k$, $c : (X^*)^2 \to X^*$ la concaténation et $\ell : X^* \to \mathbb{N}$ la longueur. Soient A et B deux ensembles finis et $\varphi : A^* \to B^*$ telle que, pour tous $a, a' \in A$, $\varphi(c(a,a')) = c(\varphi(a), \varphi(a'))$.
a) On pose $A = \{a,b,c,d\}$ et $B = \{0,1\}$. Étudier l'injectivité des applications définies sur les lettres de A puis étendues sur A^* par $\varphi : A \to B^*$ telles que $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 01$, $\varphi(c) = 10$, $\varphi(d) = 10011$, et $\psi : A \to B^*$ telle que $\psi(a) = 01$, $\psi(b) = 10$, $\psi(c) = 11$, $\psi(d) = 00$.
b) Montrer que, si φ est injective, alors $\sum_{a\in A} |B|^{-\ell(\varphi(a))} \leqslant 1$.

12 ★ [PLSR] ***a)*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la transposition $(1\ 2)$ et le cycle $(1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
b) La transposition $(1\ 3)$ et le cycle $(1\ 2\ 3\ 4)$ engendrent-ils $\mathcal{S}_4$?
c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant a < b \leqslant n$ tels que $\tau = (a\ b)$ et $\sigma = (1\ 2\ \cdots\ n)$ engendrent $\mathcal{S}_n$. Montrer que $b - a$ et n sont premiers entre eux.
d) Montrer la réciproque de la propriété précédente.

14★ [PLSR] Soit G un groupe fini. Si X et Y sont des parties non vides de G, on pose $X^{-1} = \{x^{-1},\ x \in X\}$ et $XY = \{xy,\ (x,y) \in X \times Y\}$.
Dans la suite, X désigne une partie non vide de G.
a) On suppose que $|XX| < 2\,|X|$. Montrer que $XX^{-1} = X^{-1}X$.
b) On suppose que $|XX^{-1}| < \dfrac{3}{2}\,|X|$. Montrer que $X^{-1}X$ est un sous-groupe de G.

17 ★ ★ [P] Soit p un nombre premier. On admet qu'il existe un anneau commutatif A dans lequel $p^2.1_A = 0_A$ et il existe un élément inversible x tel que :
(i) tout élément de A s'écrive $P(x)\,x^{-k}$ pour un $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un $k \in \mathbb{N}$;

(ii) pour deux polynômes P, Q dans $\mathbb{Z}[X]$ et deux entiers naturels k, l, l'égalité $P(x)\,x^{-k} = Q(x)\,x^{-l}$ équivaut à ce que $X^k Q$ et $X^l P$ aient même réduit modulo p^2 (autrement dit, tous les coefficients de $X^k Q - X^l P$ sont des multiples de p^2).
a) Soient $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. Caractériser l'inversibilité de $P(x)\,x^{-k}$ dans A.
b) Montrer que le groupe multiplicatif $A^\times$ ne possède pas de partie génératrice finie.

18 ★ ★ [PLSR] Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$. On pose $S_q = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leqslant a < q \\ a \wedge q = 1}} \sum_{n=0}^{q-1} e^{\frac{2i\pi a f(n)}{q}}$ pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, si $q \wedge q' = 1$, alors $S_{qq'} = S_q S_{q'}$.

19 ★ [PLSR] On dit qu'un ensemble $X \subset \mathbb{C}$ est intégrable si : $\forall (x, y) \in X^2,\ |x - y| \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble intégrable X composé de n points tous sur un même cercle.

21 ★ ★ [SR] ***a)*** Soit $n = 2m + 1 \geqslant 1$ un entier impair. Expliciter un polynôme P_m de degré $2m$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ \sin(nx) = (\sin x)^n P_m(\operatorname{cotan} x)$.
b) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
c) Donner une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$.
d) En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

23 ★ ★ [PLSR] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$.
a) On suppose P scindé sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $n\,P(x)\,P''(x) \leqslant (n-1)\,P'(x)^2$.
b) Donner un polynôme ne vérifiant pas le résultat de la question précédente, puis un polynôme non scindé le vérifiant.

26 ★ ★ [PLSR] Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(a_0, ..., a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^{n+1}$ tel que, pour tout $(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^{n+1}$, le polynôme $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k a_k X^k$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

27 ★ ★ [P] Deux polynômes P, $Q \in \mathbb{R}[X]$ sont entrelacés lorsque :
– P et Q sont scindés à racines simples sur $\mathbb{R}$,
– P et Q n'ont aucune racine réelle commune,
– entre deux racines consécutives de P (respectivement Q) il y a une unique racine de Q (respectivement P).
Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que si, pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, alors P et Q sont entrelacés.

28 ★ [PLSR] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n > 0$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. On note D_r le disque complexe ouvert de centre 0 et de rayon r. Montrer que $D_{1/n} \subset P(D_1)$.

40 ★ ★ [PLSR] On considère ϕ: $(\mathbb{R}^4)^2 \to \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui à (u,v) associe la matrice dont le coefficient en (i,j) vaut $\begin{vmatrix} u_i & v_i \\ u_j & v_j \end{vmatrix}$.
a) Que peut-on dire si $\phi(u,v) = \phi(u',v') \neq 0$?
b) Que dire de la réciproque ?
c) Montrer que A s'écrit comme $\phi(u,v)$ avec (u,v) libre si et seulement si $A \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$, $\det(A) = 0$ et $A \neq 0$.
d) Décrire l'image et le noyau d'une telle matrice.

41 ★ ★ [L] Soient a, b, m, p des entiers naturels tels que $a^2 + b^2 - pm = -1$.
On pose $A = \begin{pmatrix} p & a+ib \\ a-ib & m \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}(i))$ telle que $A = B^*B$ où $B^* = \bar{B}^T$. Même question avec B dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[i])$.

42 ★ ★ [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, ..., \varphi_n$ des formes linéaires non nulles sur $\mathbb{R}^2$. Pour $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, soit $f_g : (x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mapsto \varphi_1(g(x_1)) \times \cdots \times \varphi_n(g(x_n))$, application de $(\mathbb{R}^2)^n$ dans $\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :
i) il existe une suite $(g_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour tous vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbb{R}^2$, $f_{g_k}(x_1, \ldots, x_n) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
ii) il existe une droite vectorielle L telle que $|\{i,\ L \subset \mathrm{Ker}(\varphi_i)\}| > \dfrac{n}{2}$.

43 ★ ★ [P] Soit G l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $ad - bc = 1$ et $a \equiv d \equiv 1 - c \equiv 1 \bmod 3$. Montrer que G est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ engendré par les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

46 ★ ★ [PLSR] Soient A et B deux matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$. On suppose que $ABA^{-1}B^{-1}$ commute avec A et B. Montrer que $BA = \pm AB$.

52 ★ ★ [PLSR] Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'indice m, $x \in E$ tel que $f^{m-1}(x) \neq 0$.
a) Montrer que la famille $(f^k(x))_{0\leqslant k\leqslant m-1}$ est libre. On note V le sous-espace de E engendré par cette famille.
b) Soit $\varphi \in E^*$ telle que $\varphi(f^{m-1}(x)) \neq 0$, W le sous-espace de E^* engendré par $(\varphi \circ f^i)_{0\leqslant i\leqslant m-1}$, $W^\perp$ l'ensemble des $y \in E$ tels que $\forall \psi \in W^\perp,\ \psi(y) = 0$. Montrer que $W^\perp$ est un supplémentaire de V dans E stable par f.
c) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant de la forme J_k avec $k \in \mathbb{N}^*$, où $J_k \in \mathcal{M}_k(\mathbb{K})$ est une matrice dont tous les coefficients sont nuls en dehors de ceux de la sur-diagonale qui sont égaux à 1.

54 ★ ★ [SR] Soient $r \in \mathbb{N}^*$, $d_1, \ldots, d_r$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que $d_1|d_2|\ldots|d_r$. Déterminer le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ contienne un sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/d_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/d_r\mathbb{Z}$.

57 ★ ★ [P] Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie, h_1 et h_2 deux éléments de $\mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe une norme sur E pour laquelle h_1 et h_2 sont des isométries et que $[h_1, h_2] = h_1 h_2 {h_1}^{-1} {h_2}^{-1}$ commute avec h_1 et h_2. Montrer que l'espace des vecteurs de E fixes par h_1 et h_2 admet un supplémentaire dans E stable par h_1 et h_2.

59 ★ ★ [P] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ des vecteurs de E tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1,m]\!]^2$, $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$. On note p le projecteur orthogonal de E sur Vect$(u_1, \ldots, u_m)$. Montrer que $\forall x \in E,\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle u_i, x\rangle\ \langle x, p(v_i)\rangle = \|p(x)\|^2$.

61 ★ ★ [L] Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $m \in \mathbb{N}^*$, $u, u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs de E. Montrer que $u \in \mathbb{R}^+ u_1 + \cdots + \mathbb{R}^+ u_m$ si et seulement si pour tout $x \in E$,
$\{x \in E\ ;\ \forall i \in [\![1,m]\!],\ \langle u_i, x\rangle \leqslant 0\} \subset \{x \in E\ ;\ \langle u, x\rangle \leqslant 0\}$.

65 ★ [L] Soient $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et M une matrice de réflexion dans $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbb{R})$. On pose $A' = M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$. Calculer $\chi_{A'}(1)$ en fonction de la première colonne de M et de χ_A.

68 ★ [PLSR] Soient A, B deux matrices de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ qui n'ont pas -1 pour valeur propre et telles que AB n'ait pas 1 pour valeur propre. Montrer que $(A - I_n)(BA - I_n)^{-1}(B - I_n)$ est antisymétrique.

70 ★ ★ [PLSR] Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de A non nécessairement distinctes. Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_{i,i} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \lambda_{n+1-i}$.

71 ★ ★ [PLSR] ***a)*** Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^{+}(\mathbb{R})$.
Montrer que AB est diagonalisable à valeurs propres positives ou nulles.
b) Soient $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On pose $f_{A,B} : X \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{Tr}(AX) + \mathrm{Tr}(BX^{-1})$.
Montrer que $f_{A,B}$ admet un minimum $\mu_{A,B}$ atteint en une unique matrice $M_{A,B}$.
Expliciter $\mu_{A,B}$ et $M_{A,B}$.

74 ★ ★ [L] Pour $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $\lambda_1(M) \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n(M)$ le spectre ordonné de M.
a) On considère $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A + B \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$. Montrer que, si $i + j < n + 2$ alors $\lambda_i(A) + \lambda_j(B) < 0$.
b) Généraliser à $A_1, \ldots, A_d \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_1 + \cdots + A_d \in \mathcal{S}_n^{--}(\mathbb{R})$.

76 ★ ★ [P] ***a)*** Soient A et B deux éléments de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $B = P^T A P$.
b) Soit f une fonction de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Proposer une définition naturelle de $f(A)$ si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
c) Pour A et B dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on pose $d(A,B) = \left\| \ln\left(\sqrt{A^{-1}} B \sqrt{A^{-1}}\right) \right\|$. Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

d) Soient $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que $d(P^T AP, P^T BP) = d(A, B)$.

78 ★ ★ [L] On note $\|\!|\ \|\!|$ la norme d'opérateur sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associée à la norme $X \mapsto \sqrt{\overline{X}^T X}$.
a) Soient A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|\!|e^{iA} - e^{iB}|\!\| \leqslant \|\!|A - B|\!\|$.
b) Démontrer le même résultat sous l'hypothèse que A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\overline{A}^T = A$ et $\overline{B}^T = B$.

82 ★ ★ [P] Peut-on écrire $]0, 1[$ comme réunion dénombrable disjointe de segments d'intérieurs non vides ?

83 ★ ★ [PLSR] Pour tout réel x dans $[0, 1[$, on note $0, x_1x_2x_3...$ le développement décimal propre de x. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$. Soit a un réel tel que $0 < a < 9$. On définit $P_n = \{x \in [0, 1[\,;\ S_n(x) \leqslant na\}$ et $P = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} P_n$. Montrer que P est compact, non vide, d'intérieur vide et sans point isolé.

86 ★ ★ [P] Soit $d \geqslant 1$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré d de $\mathbb{R}[X]$.
a) On pose $A = \{(P, x) \in \mathcal{P} \times \mathbb{R}\ ;\ P(x) = 0 \text{ et } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de A dans $\mathbb{R}_d[X] \times \mathbb{R}$.
b) On pose $B = \{P \in \mathcal{P}\ ;\ \forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \neq 0 \text{ ou } P'(x) \neq 0\}$. Déterminer les composantes connexes par arcs de B dans $\mathbb{R}_d[X]$.

87 ★ ★ [PLSR] Soient $(M_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ semblables les unes aux autres, $\|\ \|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $\|M_k\| \to +\infty$. Montrer qu'il existe une matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente et une extractrice $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\dfrac{M_{\varphi(k)}}{\|M_{\varphi(k)}\|} \to N$.

88 ★ ★ [PLSR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont toutes les valeurs propres sont de module < 1.
Montrer qu'il existe une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{C}^n$ telle que, pour la norme d'opérateur associée, on ait $\|\!|A|\!\| < 1$.

89 ★ ★ [P] Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de lignes $L_1, \ldots, L_n$, et $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$. On suppose que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\|L_i\|_2 = 1$ et la distance euclidienne canonique de L_i au sous-espace engendré par les L_j, pour $j \neq i$, est supérieure ou égale à ε.
Montrer que A est inversible et que $\sup\{\|A^{-1}x\|_2\ ;\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\|_1 = 1\} \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

91 ★ [PLSR] Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles de limite 1 et (u_n) une suite réelle strictement positive telle que, pour tout n, $u_{n+2} = a_{n+1}u_{n+1} + b_{n+1}u_n$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et $w_n = \dfrac{\ln(u_n)}{n}$. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) convergent.

92 ★ [PLSR] ***a)*** Si $n \geqslant 2$ est un entier, montrer que $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor = \sum_{j=2}^{n} \lfloor \sqrt[j]{n} \rfloor$.

b) Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \lfloor \log_k(n) \rfloor$.

97 ★ ★ [PLSR] On considère une suite $a \in \{2,3\}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $a_1 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, le nombre de 3 apparaissant dans la suite a entre la n-ième occurrence de 2 et la $(n+1)$-ième occurrence de 2 soit égal à a_n. Montrer qu'il existe un unique irrationnel α tel que les indices $n \geqslant 1$ tels que $a_n = 2$ soient exactement les entiers de la forme $\lfloor m\alpha \rfloor + 1$ pour un $m \in \mathbb{N}$.

98 ★ ★ [PLSR] Une suite réelle (x_n) est dite équirépartie modulo 1 si elle vérifie, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2ik\pi x_n} = 0$.
a) Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer que la suite $(n\alpha)$ est équirépartie modulo 1.
b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, la suite $(x_{n+h} - x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équirépartie ; on veut montrer que (x_n) est équirépartie modulo 1.
i) Soit (a_n) une suite de complexes de module $\leqslant 1$.
Montrer, pour tous $N, H \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_n \right| \leqslant \left| \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_{n+h} \right| + \frac{2H}{N}$.
ii) Montrer que $\displaystyle\left| \frac{1}{H} \sum_{h=0}^{H-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} a_{n+h} \right| \leqslant \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \left| \sum_{h=0}^{H-1} \frac{a_{n+h}}{H} \right|^2}$.
iii) Conclure.
c) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant et de coefficient dominant irrationnel. Montrer que $(P(n))_{n\geqslant 1}$ est équirépartie modulo 1.
d) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle équirépartie modulo 1, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique. Montrer que $\displaystyle\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$.
e) On reprend les hypothèses de la question ***c)***. Montrer que la distance de $P(\mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}$ est nulle.

100 ★ [PLSR] Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \left\lfloor \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \right\rfloor$.

101 ★ ★ [PLSR] On note $\ell^2(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles de carré sommable indexées par $\mathbb{N}$. On se donne une suite presque nulle $v \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ainsi qu'une suite $(u_k)_k$ d'éléments de $\ell^2(\mathbb{R})$ (l'élément u_k est donc noté $(u_{k,i})_{i\in\mathbb{N}}$). On suppose que, pour tout entier $p \geqslant 2$, la suite de terme général $w_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,n})^p$ converge vers $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (v_n)^p$.
Montrer que $\displaystyle\inf_{\sigma\in\mathfrak{S}(\mathbb{N})} \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{k,\sigma(n)} - v_n)^2 \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

102 ★ [P] Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et telle que $f\left(\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{1}{q}$ si $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux. Quels sont les points de continuité de f ?

103 ★ [L] Soient I un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable et $[a,b] \subset I$ avec $a < b$. On suppose que $f'(a) = f'(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente au graphe de f en c passe par le point $(a, f(a))$.

105 ★ [PLSR] Déterminer les applications f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout entier $n \geqslant 2$, f^n (puissance) soit polynomiale.

111 ★ ★ [L] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$.
a) Montrer que le nombre de racines de P de module strictement inférieur à 1 comptées avec multiplicité n'est autre que $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{e^{it}\,P'(e^{it})}{P(e^{it})}\,\mathrm{d}t$.
b) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ ne s'annulant pas sur $\mathbb{U}$ et tel que $\forall z \in \mathbb{U},\ |P(z) - Q(z)| < |Q(z)|$. Montrer que P et Q ont même nombre de racines de module strictement inférieurs à 1 comptées avec multiplicité.

113 ★ Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et presque périodique c'est-à-dire telle que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, |f(x + nT) - f(x)| \leqslant \epsilon$.
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et presque périodique.
a) Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
b) Montrer que $t \mapsto \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_0^t f$ possède une limite quand $t \to +\infty$.

120 ★ ★ [PLSR] Soit $\Lambda \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(n) = \ln(p)$ si $n = p^k$ avec p premier et $k \in \mathbb{N}^*$, et $\Lambda(n) = 0$ sinon. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.
b) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{1}{n^s}\right) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \dfrac{\ln(n)}{n^s}$.
c) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{\ln(p)}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \dfrac{1}{s-1} + O(1)$.
d) Montrer que, pour tout $s > 1$, $\displaystyle\sum_{p\in\mathcal{P}} \dfrac{1}{p^s} \underset{s\to 1^+}{=} \ln\left(\dfrac{1}{s-1}\right) + O(1)$. Qu'en déduire ?

122 ★ ★ [P] Soient $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante de limite nulle en $+\infty$ et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f(nx)$. Quelle est la limite de g en 0^+ ?

125 ★ ★ [L] Soient $R \in \mathbb{R}^{+*}$, f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$ telles que $\forall x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que l'une au moins des deux fonctions f et g est identiquement nulle sur $]-R, R[$.

129 ★ ★ [SR] Existe-t-il une partie A de $\mathbb{N}$ telle que $\displaystyle\sum_{n\in A}\frac{x^n}{n!}\underset{x\to+\infty}{\sim} e^{\sqrt{x}}$?

132 ★ [L] Soit $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^-$ tel que $\forall x\in[0,1],\ 1+ax+bx^2\geqslant 0$.

a) Si $a\in\mathbb{R}^+$, montrer que $\displaystyle n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$.

b) Si $a\in\mathbb{R}^{-*}$, montrer que $\displaystyle n\int_0^1\left(1+ax+bx^2\right)^n\mathrm{d}x\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\frac{1}{a}$.

133 ★ [L] Soit, pour $x\in\mathbb{R}^+$, $\displaystyle f(x)=\int_0^\pi\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2x}\cos^2(t)+e^{-2x}\sin^2(t)}}$.

Montrer qu'il existe $(a,b)\in(\mathbb{R}^+)^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ f(x)\leqslant(ax+b)e^{-x}$.

138 ★ ★ [P] Soit I un (vrai) intervalle de $\mathbb{R}$.

Si $r\in\mathbb{N}^*$ et $f_1,\ldots,f_r\in\mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$, on pose $W_r(f_1,\ldots,f_r)=\det\left(\left(f_j^{(i-1)}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}\right)$.

Soient $r\in\mathbb{N}^*$, $f_1,\ldots,f_r\in\mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$.

a) Soit $g\in\mathcal{C}^{r-1}(I,\mathbb{R})$. Montrer que $W_r\left(gf_1,\ldots,gf_r\right)=g^r\,W_r\left(f_1,\ldots,f_r\right)$.

b) On suppose que, pour tout $k\in[\![1,r]\!]$, $W_k(f_1,\ldots,f_k)$ ne s'annule pas. Montrer que, pour tout $(a_1,\ldots,a_r)\in\mathbb{R}^r$ non nul, la fonction $a_1f_1+\cdots+a_rf_r$ s'annule au plus $(r-1)$ fois sur I.

c) On suppose que $W_r(f_1,\ldots,f_r)$ est identiquement nul sur I et que $W_{r-1}(f_1,\ldots,f_{r-1})$ ne s'annule pas. Montrer que $(f_1,\ldots,f_r)$ est liée.

151 ★ ★ [PLSR] Soient f une application différentiable convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}^{+*}$.

a) Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \langle\nabla f(y)-\nabla f(x),y-x\rangle\geqslant 0$.

b) On suppose que l'application ∇f est L-lipschitzienne.

Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\ \langle\nabla f(y)-\nabla f(x),y-x\rangle\geqslant\dfrac{1}{L}\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|^2$.

155 ★ ★ [P] On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique notée $\|\ \|$ et on note B la boule unité fermée de cet espace. Soient f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ de classe C^1 et telle que, pour tout $(u,v)\in B^2$, $\|-f(0)+v-df_u(v)\|\leqslant\dfrac{1}{2}$. Montrer que f s'annule exactement une fois sur B.

157 ★ ★ [P] Soit G un groupe d'isométries affines de $\mathbb{R}^2$ tel que, pour tout point x, il existe $g\in G$ tel que $g(x)\neq x$. Montrer que G contient une translation autre que l'identité de $\mathbb{R}^2$.

158 ★ ★ [P] Soit S le groupe (pour la composition) des applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $z\mapsto az+b$ avec $a\in\mathbb{U}$ et $b\in\mathbb{C}$. Soit G un sous-groupe de S vérifiant les conditions suivantes :

- si $g\in G$, $g(0)$ est nul ou de module supérieur ou égal à 1 ;
- l'ensemble des $b\in\mathbb{C}$ tels que $z\mapsto z+b$ appartienne à G contient deux éléments $\mathbb{R}$-linéairement indépendants.

Montrer que $\{a \in \mathbb{U}\ ;\ \exists b \in \mathbb{C},\ z \mapsto az + b \in G\}$ est fini.

165 ★ ★ [PLSR] Soient $m \geqslant 1$ et $r \geqslant 1$ deux entiers. On munit l'ensemble des morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^r$ dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ de la loi uniforme. Donner une expression simple de la probabilité de l'événement « le morphisme φ est surjectif ».

168 ★ ★ [PLSR] Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$, $\mathbf{E}(X^2) = 2$ et $\mathbf{E}(X^3) = 5$. Quelle est la valeur minimale de $\mathbf{P}(X = 0)$?

172 ★ [PLSR] Dans tout l'exercice, les variables aléatoires considérées sont supposées réelles, discrètes et à loi de support fini. Pour deux telles variables X et Y, on note $X \leqslant_c Y$ pour signifier que $\mathbf{E}(f(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(Y))$ pour toute fonction convexe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
a) Soient X une variable aléatoire vérifiant les conditions de l'exercice et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.
b) Donner un exemple de couple (X, Y) pour lequel $X \leqslant_c Y$ mais $X \neq Y$.
c) Montrer que si $X \leqslant_c Y$ alors $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(X) \leqslant \mathbf{V}(Y)$.
d) Montrer que $X \leqslant_c Y$ si et seulement si $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y)$ et

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geqslant x)\,\mathrm{d}x.$$

173 ★ ★ [PLSR] On fixe $N \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable $u_1 \in [\![1, N]\!]$, puis $u_2 \in [\![1, u_1 - 1]\!]$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $u_\ell = 1$ avec nécessairement $\ell \leqslant N$. On note $E_N = \{u_j,\ 1 \leqslant j \leqslant \ell\}$.
a) Calculer $\mathbf{P}(k \in E_N)$ pour $1 \leqslant k \leqslant N$.
b) Calculer $\mathbf{P}(2 \in E_N \mid 3 \notin E_N)$.
c) Calculer $\mathbf{E}(|E_N|)$ et $\mathbf{V}(|E_N|)$.

183 ★ ★ [P] Soient E un ensemble fini, $V : E \to \mathcal{P}(E)$ une fonction de E vers les parties de E et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. Un point $a \in E$ est un minimum local si $f(a) \leqslant f(b)$ pour tout $b \in V(a)$. Soit M un entier tel que $M \geqslant \sqrt{|E|}$. Soient $b_1, \ldots, b_M$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées dans E. Soit k tel que $f(b_k) = \min_{1 \leqslant i \leqslant M} f(b_i)$. Soit $(u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de E telle que $u_0 = b_k$ et, pour tout $n \geqslant 0$:
– si u_n est un minimum local, alors $u_{n+1} = u_n$;
– sinon $u_{n+1} \in V(u_n)$ et $f(u_{n+1}) < f(u_n)$.
Montrer que u_M est un minimum local avec probabilité au moins $1/2$.

189 ★ ★ [P] Soient $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$. On pose $G = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^d$ et $S = \{\pm e_i, 1 \leqslant i \leqslant d\}$, où e_i désigne l'élément de G dont toutes les coordonnées sont nulles sauf la i-ème, égale à $\overline{1}$. Soient enfin $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et X une variable aléatoire uniformément distribuée sur G.
Montrer que $\mathbf{E}\left(|f(X) - \mathbf{E}(f(X))|\right) \leqslant \dfrac{nd}{2} \max\limits_{s \in S} \mathbf{E}\left(|f(X) - f(X + s)|\right).$

Écoles Normales Supérieures – PC

219 ★ Soit A une partie de cardinal n de $\mathbb{R}$. On pose $B = A + A = \{a + a',\ a, a' \in A\}$. Montrer que $2n - 1 \leqslant \operatorname{card}(B) \leqslant \dfrac{n(n+1)}{2}$. Généraliser à $B = kA = A + A + \cdots + A$ (k fois).

221 ★ Soient $P_1, P_2, P_3, P_4 \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il n'existe aucun voisinage ouvert de 0 sur lequel on ait simultanément i) $\forall x < 0,\ P_1(x) < P_2(x) < P_3(x) < P_4(x)$
ii) $\forall x > 0,\ P_2(x) < P_4(x) < P_1(x) < P_3(x)$.

271 ★ ★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que $\mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 1) \neq 0$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $\mathbf{P}(4 \text{ divise } S_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{4}$.

École Polytechnique – MP – MPI

277 ★ ★ ***a)*** Montrer que l'équation $a^2 - 2b^2 = 1$ admet une infinité de solutions $(a, b) \in \mathbb{N}^2$. Déterminer l'ensemble des solutions.
b) Que dire de l'ensemble des solutions de $a^2 - 2b^2 = -1$?

280 ★ ★ Soit G un groupe fini de neutre 1. Soit φ un automorphisme de G sans point fixe c'est-à-dire tel que : $\forall x \in G$, $\varphi(x) = x \Rightarrow x = 1$. On note n l'ordre de φ ; c'est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\varphi^n = \mathrm{id}$.
a) Montrer que $\forall x \in G$, $x\,\varphi(x)\,\varphi^2(x)\ \cdots\ \varphi^{n-1}(x) = 1$.
b) Si $n = 2$, que peut-on dire du groupe G ? Donner un exemple.
c) Si $n = 3$, montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ commutent.

286 ★ ★ Soit p un nombre premier. On suppose que, pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, il existe un endomorphisme u_A de A de sorte que, pour tout couple (A, B) de $\mathbb{F}_p$-algèbres et tout morphisme τ de $\mathbb{F}_p$-algèbres de A dans B, on ait $\tau \circ u_A = u_B \circ \tau$. Que dire des u_A ?

303 ★ Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $p, u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que p est un projecteur et que $pu + up = u$. Montrer que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

314 ★ Soient p et q deux projecteurs orthogonaux dans un espace euclidien E.
a) Montrer que $p \circ q \circ p$ est diagonalisable.
b) Montrer que $E = \operatorname{Im} p + \operatorname{Ker} q + (\operatorname{Im} q \cap \operatorname{Ker} p)$.
c) Montrer que $p \circ q$ est diagonalisable.
d) Montrer que le spectre de $p \circ q$ est inclus dans $[0, 1]$.

316 ★ ★ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. On note $S^2 = \left\{x \in \mathbb{R}^3,\ \|x\| = 1\right\}$ où $\|\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes.
(i) $\alpha = 2$.
(ii) $\forall n \geqslant 1, \forall\,(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n) \in (S^2)^{3n}$, $\exists p \in S^2$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \|p - a_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - b_i\|^\alpha = \sum_{i=1}^{n} \|p - c_i\|^\alpha.$$

322 ★ ★ Soit $t_1, \ldots, t_n$ des réels.
a) Montrer que la matrice $A = (t_i t_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
b) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n$. Montrer que la matrice $B = (\min(t_i, t_j))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est dans $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
c) On suppose $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant 1$. Montrer que $M = B - A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

325 ★ Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ un convexe fermé non vide.
a) On suppose K borné. Montrer que K s'écrit comme intersection de carrés fermés.
b) On suppose K non borné et $K \neq \mathbb{R}^2$. Donner des exemples de tels convexes. Montrer que si K contient deux droites, celles-ci sont parallèles.
c) On suppose toujours K non borné. Montrer que K contient une demi-droite.

330 ★ On dit qu'une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ de disques fermés de $\mathbb{R}^2$ vérifie $(\mathcal{P})$ si
i) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ distincts, D_s et D_t ont des centres distincts,
ii) pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$ tels que $s < t$, $D_s \subset D_t$.
a) Existe-t-il une telle famille ?
b) Soit $A : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 et injective. Existe-t-il une famille $(D_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ vérifiant $(\mathcal{P})$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $A(t)$ soit le centre de D_t ?
c) Le résultat subsiste-t-il si A est seulement supposée continue ?

332 ★ ★ Soient a, b, c des entiers naturels non nuls. Montrer qu'il existe un $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sqrt{n^4 + an^2 + bn + c} \notin \mathbb{N}$.

334 ★ Soient (a_n) et (b_n), deux suites réelles positives telles que la série de terme général b_n converge, que la série de terme général na_n diverge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$.
a) Montrer qu'il existe une unique suite (u_n) telle que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k a_{n-k}$.
b) Montrer que (u_n) est bornée.
c) Montrer que, si (u_n) converge, alors sa limite est 0.

343 ★ ★ Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$, strictement croissante et bijective. Montrer que les séries $\displaystyle\sum \frac{1}{f(n)}$ et $\displaystyle\sum \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ sont de même nature.

346 ★ Que dire d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ?

356 ★ ★ Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\frac{x^2}{2}} \displaystyle\int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$.
a) Montrer que $f(x) < \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.

a) Montrer que $f(x) > \dfrac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}$ pour tout $x > 0$.
a) Donner un développement limité à quatre termes de $f(x)$ quand $x \to +\infty$.

357 ★ ★ Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \{|u|, |v|\}$, calculer
$I_r(u,v) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(u - re^{i\theta})(v - re^{i\theta})}$.

366 ★ Soit $P = a_1X + \cdots + a_dX^d \in \mathbb{Z}[X]$ avec a_1 impair.

a) Montrer l'existence d'une suite réelle $(b_k)_{k\geqslant 0}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, \exp\left(P(x)\right) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} b_kx^k$.

b) Montrer que les b_k sont tous non nuls.

390 ★ ★ Soient $p \in [0, 1/2]$, $(X_n)_{n\geqslant 1}$ i.i.d. telle que $\mathbf{P}(X_n = -1) = \mathbf{P}(X_n = 1) = p$ et $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p$. On cherche p tel que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{Z}, \mathbf{P}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_iX_i = 0\right) \geqslant \mathbf{P}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n a_iX_i = b\right)$.
a) Montrer que $p \leqslant 1/3$, puis que $p < 1/3$ et enfin que $p \leqslant 1/4$.
b) Si X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on pose $\Phi_X : \theta \mapsto \mathbf{E}\left(e^{iX\theta}\right)$. Exprimer $\mathbf{P}(X = k)$ en fonction de Φ_X.
c) En déduire que $p \leqslant 1/4$ est une condition suffisante.

396 ★ Soient $n \geqslant 1$ et A, B, C des variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{0, 1\}^n$.
a) Pour $n \geqslant 2$, calculer la probabilité p_n que ABC soit un triangle équilatéral.
b) Déterminer un équivalent de p_n.

École Polytechnique - PSI

410 ★ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.
Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]a, b[$.

414 ★ Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ de classe C^1 et strictement croissante. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $\sum \dfrac{1}{f(n)}$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{f^{-1}(n)}{n^2}$ converge.

École Polytechnique - ESPCI – PC

424 ★ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \{-1, 1\}$ tels que $n = \displaystyle\sum_{k=1}^m \varepsilon_k k^2$.

428 ★ ★ Existe-t-il une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de réels non nuls telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ soit scindé à racines simples dans $[0,1]$?

445 ★ ★ Caractériser les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont somme de deux matrices diagonalisables de rang 1.

471 ★ Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $(n\{an!\})_{n\in\mathbb{N}}$ converge où on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $a \in \mathbb{Q} + \mathrm{e}\mathbb{N}$.

476 ★ ★ Soit (u_n) une suite bornée. Montrer qu'il y a équivalence entre :
(i) $\dfrac{1}{n}\sum_{k<n} |u_k| \to 0$,
(ii) il existe $A \subset \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{1}{n}\,|A \cap [0, n-1]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\lim\limits_{n\notin A} u_n = 0$.

487 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
i) f est croissante,
ii) pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, pour tout $x_0 \in I$, si $f - \varphi$ admet un minimum local en x_0, alors $\varphi'(x_0) \geqslant 0$.

506 ★ ★ On pose, pour $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geqslant 2$, $\zeta(k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^k}$.

a) Montrer que, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$.

b) En déduire la valeur de $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.

Mines - Ponts – MP – MPI

519 ★ Déterminer tous les couples $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant : $3^m = 8 + n^2$.

535 ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n.
Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que $|P(k)| \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.

536 ★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.
a) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$?
b) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$?
c) À quelle condition P réalise-t-il une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$?

557 ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\det((i \wedge j)_{1\leqslant i,j\leqslant n})$.

Ind. On rappelle que, pour $N \in \mathbb{N}^*$, $N = \sum_{d|N} \varphi(d)$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

627 ★ Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n, $v_1, \ldots, v_{n+2}$ des vecteurs de E. Montrer qu'on ne peut avoir : $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j \rangle < 0$.

630 ★ Soient E un espace euclidien, A une partie de E et $B = \left\{\langle x, y\rangle\ ;\ (x,y) \in A^2\right\}$. Montrer que A est fini si et seulement si B est fini.

678 ★ Soient $n \geqslant 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{a\})$ est compact. Montrer que f admet un extremum global. Que se passe-t-il si $n = 1$?

698 ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $D_n = \left\{ d \in \mathbb{N}\ ;\ d|n \text{ et } \sqrt{\dfrac{n}{2}} \leqslant d \leqslant \sqrt{2n} \right\}$ et $d_n = |D_n|$.
a) La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle convergente ?
b) La suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle bornée ?

722 ★ Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite décroissante de réels positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{1 + n^2 u_n}$. Montrer que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ diverge.

754 ★ Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.
Montrer : $120\Big(\displaystyle\int_0^1 f\Big)^2 \leqslant \int_0^1 (f'')^2$.

876 ★ Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que : i) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f(x)$ est injective ; ii) $\|f(x)\| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
Soient $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|f(x) - a\|^2$.
a) Calculer $\mathrm{d}g$.
b) Montrer que g admet un minimum.
c) En déduire que f est surjective.

Mines - Ponts – PSI

930 ★ Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Centrale – MP – MPI

1267 ★ ★ On admet le théorème suivant : *Pour S une série entière de rayon de convergence infini dont la somme ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, il existe une série entière L de rayon de convergence infini telle que* $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(L(z)) = S(z)$.
a) i) Rappeler tous les modes de convergence d'une série entière sur son disque ouvert de convergence.

ii) Soient $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence infini et $G(z) = \mathrm{Re}(F(z))$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\int_0^{2\pi} F(re^{it})\mathrm{d}t = 2\pi a_n R^n$, puis que
$\int_0^{2\pi} G(Re^{it})e^{-int}\mathrm{d}t = \pi a_n R^n$ et $\int_0^{2\pi} G(Re^{it})\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{Re}(a_0)$.

b) Montrer que, s'il existe p et q réels strictement positifs tels que $\forall z \in \mathbb{C},\ |G(z)| \leqslant p|z|+q$, alors F est un polynôme de degré au plus 1.

c) Montrer que l'application $z \mapsto z\exp(z)$ est une surjection de $\mathbb{C}$ sur lui-même.