

Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

La revue trimestrielle de l'Union
des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques

Directeur de la publication : Laurent PATER

Rédacteur en chef : Bastien MARMETH



Siège social et secrétariat
3 rue de l'École Polytechnique
75005 PARIS

Téléphone
01 73 71 46 33

Enregistreur
09 79 94 26 97

Télécopie
09 79 94 36 97

Courriel
secretariat.ups@prepas.org

Version courte en accès libre

***Bulletin vert* – mode d’emploi**

Le *Bulletin vert* est la publication trimestrielle de l’UPS. Il contient, entre autres, des articles et forums scientifiques de Mathématiques, Physique, chimie et informatique que nous vous proposons ici en accès libre.

Cette version courte est consultable sur le site public de l’UPS, à l’adresse <https://prepas.org/index.php?rubrique=218>, où vous pouvez aussi trouver les bulletins plus anciens.

La version complète est, elle, consultable sur le site privé de l’UPS, à l’adresse <https://ups-cpge.fr/ups.php?rubrique=19>, où vous pouvez aussi trouver les bulletins plus anciens.

Si vous souhaitez participer aux numéros suivants, nous vous rappelons comment alimenter les différents forums.

- **Chimie**

Contacteur Aurélien MOMIN (aurelien.momin@prepas.org).

- **Informatique**

Contacteur Aude LE GLUHER (aude.legluher@prepas.org).

- **Mathématiques**

Contacteur Florent NICAISE (florent.nicaise@prepas.org) ou Julien BUREAUX (julien.bureaux@prepas.science).

- **Physique**

Contacteur Aurélie COLLAUDIN (aurelie.collaudin@prepas.org) ou Mickaël MELZANI (mickael.melzani@prepas.org).

Pour toutes les autres contributions, l’adresse d’envoi est celle du secrétariat¹ ou du rédacteur en chef. Les articles destinés au *Bulletin vert* doivent parvenir de préférence sous forme électronique. Mais les articles rédigés lisiblement sur papier sont également les bienvenus.

Le délai de réception pour une parution dans le bulletin d’automne n° 296 est fixé au 15 novembre 2026.

Bastien MARMETH
bastien.marmeth@prepas.org

1. UPS, 3 rue de l’École Polytechnique, 75005 PARIS. Courriel : secretariat.ups@prepas.org.

Sommaire

Forum mathématique	4
Forum n° 287. <i>Inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$</i> par Édouard LUCAS, et Clément DE SEGUINS-PAZZIS	
Forum n° 288. <i>Un résultat de répartition asymptotique des coefficients binomiaux</i> par Rémy EUPHERTE	
Forum physique	10
Forum n° 15. <i>Un paradoxe sur le calcul de la puissance d'une soufflerie</i> par Antoine LEHÉBEL	
Coin détente	17
par Édouard LEBEAU	

Forum scientifique et pédagogique

Forum mathématique

Envoyez vos contributions à Florent NICAISE (florent.nicaise@prepas.org) ou Julien BUREAUX (julien.bureaux@prepas.science) par courrier électronique.

■ Forum n° 287

Inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

par Edouard Lucas et Clément de Seguins-Pazzis

• **Question d'Emmanuel Billette.** Soient $n \geq 1$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathcal{A} := \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (i.e. les matrices à coefficients entiers de déterminant ± 1). Montrer l'équivalence, pour $A \in \mathcal{A}$:

- (1) $A \in \mathcal{I}$;
- (2) pour tout $X \in \mathbb{Z}^n$, le pgcd des coefficients de X et celui des coefficients de AX sont égaux.

Preuve de (1) $\Rightarrow$ (2). On notera $\text{pgcd}(X)$ le pgcd des coefficients d'une colonne X , on peut se limiter au cas où $\text{pgcd}(X) = 1$ pour cette implication. Dans ce cas, supposons par l'absurde qu'il existe un entier premier p qui divise tous les coefficients de AX . Comme $A^{-1} \in \mathcal{A}$ et $X = A^{-1}(AX)$, on obtient que p divise aussi tous les coefficients de X , ce qui est absurde, donc $\text{pgcd}(AX) = 1 = \text{pgcd}(X)$.

• *Preuves de (2) $\Rightarrow$ (1).*

— *Une première méthode (d'après Edouard Lucas).*

Supposons par l'absurde qu'il existe un entier premier qui divise l'entier $\det(A)$. Pour toute matrice M à coefficients entiers, on notera $\overline{M}$ sa réduction modulo p (à coefficients dans le corps usuel $K := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$). On introduit l'endomorphisme d'espace vectoriel :

$$\varphi_p : Z \in K^n \mapsto \overline{AZ}.$$

Vu $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)} = \overline{0}$, φ_p n'est pas injectif. Il existe donc Z (noté $Z = \overline{X}$) non nul tel que $\overline{AZ} = \overline{AX}$ est nul (le tout dans K^n). Ainsi, p divise tous les coefficients de AX alors que l'un des coefficients de X est premier avec p , ce qui contredit (2). On en déduit que $\det(A) = \pm 1$, d'où (1).

- *Une seconde méthode (d'après Clément de Seguins-Pazzis).* On montre tout d'abord que $\det(A) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Soit $X \in \mathbb{Q}^n$ tel que $AX = 0_{\mathbb{Q}^n}$. Il existe alors $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tel que $aX \in \mathbb{Z}^n$. On a $\text{pgcd}(A(aX)) = 0$ donc, par (2), $\text{pgcd}(aX) = 0$. Ainsi, aX est nul et donc $X = 0_{\mathbb{Q}^n}$: l'endomorphisme d'espace vectoriel $X \in \mathbb{Q}^n \mapsto AX$ est bijectif, donc $\det(A) \neq 0$ et, puisque $A \in \mathcal{A}$: $\det(A) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Notons maintenant B la transposée de la comatrice de A (donc $B \in \mathcal{A}$), alors :

$$AB = \det(A)I_n.$$

On note par colonnes : $B = (C_1 | \dots | C_n)$. En regardant l'égalité précédente sur la j -ième colonne : $\text{pgcd}(AC_j) = \det(A)$ donc, par (2), $\text{pgcd}(C_j) = \det(A)$. On en déduit que les coefficients de C_j sont tous divisibles par $\det(A)$, donc $B/\det(A)$ est un inverse de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

- *Une troisième méthode qui contourne l'utilisation du déterminant (d'après Clément de Seguins-Pazzis).* • Supposons que A vérifie la propriété (2), notons $C_1 = (a_1 \dots a_n)^\top$ sa

première colonne. Comme $C_1 = A \times (1 \ 0 \ \dots \ 0)^\top$, la propriété (2) assure que $\text{pgcd}(C_1) = 1$. Par le théorème de Bezout, il existe $(u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{Z}^n$ tel que :

$$\sum_{i=1}^n u_i a_i = 1.$$

Nous allons utiliser un lemme dont la preuve est donnée à la fin :

Lemme 1. Les u_i étant premiers entre eux dans leur ensemble, il existe $M \in \mathcal{J}$ telle que la première ligne de M soit $U = (u_1 \dots u_n)$.

On note $B \sim_g B'$ (respectivement, $B \sim_d B'$) pour signifier que B et B' , matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, se déduisent l'une de l'autre par multiplication à gauche (respectivement, à droite) par une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. C'est évidemment une relation d'équivalence. En particulier, cette relation vaut si B' est déduite de B par une transvection sur les lignes (resp. les colonnes) à coefficient entier, une dilatation ligne (resp. colonne) de coefficient -1 ou un échange de lignes (resp. de colonnes). En outre, si $B \sim_g B'$ ou $B \sim_d B'$ alors l'inversibilité de B équivaut à celle de B' , et si B vérifie la condition (ii) alors B' la vérifie aussi (grâce au sens direct (i) $\Rightarrow$ (ii) déjà traité).

On va démontrer par récurrence que A est inversible. La démonstration est en deux étapes, la première étant constituée du lemme suivant.

Lemme 2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont les coefficients de la première colonne sont premiers entre eux dans leur ensemble. Alors $A \sim_g B$ pour une matrice B dont le premier vecteur-colonne est $(1, 0, \dots, 0)$.

Acceptons temporairement la validité de ce lemme et montrons comment il permet de conclure par récurrence, l'initialisation au rang $n = 1$ étant immédiate. Supposons donc $n \geq 2$ et prenons A vérifiant la condition (ii). En choisissant pour X le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on trouve les conditions d'application du lemme,

ce qui permet de remplacer A par une matrice de la forme

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & L \\ (0) & A_1 \end{pmatrix}$$

avec $L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{Z})$ et $A_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$. Par la suite de transvections $C_i \leftarrow C_i - l_{i-1} C_1$ pour i de 2 à n , on se ramène ensuite au cas où $L = 0$, hypothèse que l'on fera désormais. Observons alors que A_1 vérifie la condition (ii) : pour tout $Y \in \mathbb{Z}^{n-1}$, on peut en effet poser $\tilde{Y} := \begin{pmatrix} 0 \\ Y \end{pmatrix}$ et constater que $A\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 Y \end{pmatrix}$, à partir de quoi le pgcd des coefficients de $A_1 Y$ vaut celui des coefficients de Y grâce à la validité de (ii) pour A .

Concluons : par l'hypothèse de récurrence on peut trouver un inverse $B_1 \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{Z})$ pour A_1 , et alors $B := \begin{pmatrix} 1 & (0) \\ (0) & B_1 \end{pmatrix}$ fait clairement office d'inverse pour A' . On conclut que A est inversible.

Terminons par la démonstration du lemme. Parmi les matrices $A' \sim_g A$, on en choisit une minimisant la norme 1 du premier vecteur-colonne. Notons $(c_1, \dots, c_n)$ ce premier vecteur-colonne. Il est non nul grâce à l'hypothèse (ii). Parmi les $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $c_i \neq 0$, prenons-en un qui minimise $|c_i|$. S'il existe un $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ tel que $c_j \neq 0$, alors on effectue la division euclidienne $c_j = qc_i + r$ puis on considère la matrice A'' déduite de A' par la transvection-ligne $L_j \leftarrow L_j - qL_i$, ce qui remplace c_j par r ; alors $|r| < |c_i| \leq |c_j|$, la norme 1 du premier vecteur-colonne a donc été réduite.

Par minimalité, on en déduit que $c_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$. L'hypothèse (ii) indique alors que $c_i = \pm 1$. Par une succession d'échanges de lignes suivie éventuellement d'une dilatation-ligne de rapport -1 , on trouve alors une matrice $A^{(2)} \sim_g A$ de premier vecteur-colonne $(1, 0, \dots, 0)$. Le lemme est donc établi.

■ Forum n° 288

Un résultat de répartition asymptotique des coefficients binomiaux

par Rémy Eupherte

Fixons un entier k strictement positif. On rappelle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a par convention $\binom{n}{j} = 0$ si $j \notin \llbracket 0, n \rrbracket$.

Définition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, on pose :

$$S_{n,l} = \sum_{j \equiv l[k]} \binom{n}{j}.$$

Ainsi, $S_{n,l}$ est la somme des coefficients binomiaux de la ligne n du triangle de Pascal dont les indices sont congrus à l modulo k . Le théorème 1 donne un équivalent de $S_{n,l}$, pour tout $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Afin de le prouver, nous aurons auparavant besoin du résultat donné par la proposition 1.

Définition 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $c_n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ l'indice du coefficient central de la ligne n du triangle (si n est pair) ou d'un des deux coefficients centraux (si n est impair).

La formule de Stirling permet de donner un équivalent du coefficient binomial central de la ligne n .

Proposition 1. On a :

$$\binom{n}{c_n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

On en déduit notamment que $\binom{n}{c_n} = o(2^n)$.

Démonstration. Traitons d'abord le cas où $n = 2p$, donc $c_n = p$. Par la formule de Stirling :

$$\binom{n}{c_n} = \binom{2p}{p} \sim \frac{(2p)^{2p} e^{-2p} \sqrt{4\pi p}}{(p^p e^{-p} \sqrt{2\pi p})^2} \sim \frac{2^{2p}}{\sqrt{\pi p}}.$$

On en déduit le cas où $n = 2p + 1$, donc $c_n = p$:

$$\binom{n}{c_n} = \binom{2p+1}{p} = \binom{2p+1}{p+1} = \frac{2p+1}{p+1} \binom{2p}{p} \sim \frac{2^{2p+1}}{\sqrt{\pi p}}.$$

On a donc bien montré que :

$$\binom{n}{c_n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \cdot 2^n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

□

Théorème 1. Pour tout $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$:

$$S_{n,l} \sim \frac{2^n}{k}.$$

Démonstration. Fixons $n \in \mathbb{N}$, $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$ et $m \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$. Les coefficients de la ligne n du triangle de Pascal croissent au sens large jusqu'à l'indice c_n , puis ils décroissent. Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, l'intervalle d'entiers $I_p = \llbracket l + pk, l + (p+1)k - 1 \rrbracket$ est de longueur k , et ces intervalles forment une partition de $\mathbb{Z}$. On appelle *intervalle central* celui qui contient c_n , et on le note I_{p_0} . Soient $j \in m + k\mathbb{Z}$ et I_p l'unique intervalle contenant j . Par monotonie des coefficients

binomiaux, on peut majorer $\binom{n}{j}$ par $\binom{n}{j'}$, où :

- $j' = l + (p+1)k$ si $p < p_0$;
- $j' = c_n$ si $p = p_0$;
- $j' = l + pk$ si $p > p_0$.

On a donc :

$$\binom{n}{j} \leq \begin{cases} \binom{n}{l + (p+1)k} & \text{si } p < p_0 \\ \binom{n}{c_n} & \text{si } p = p_0 \\ \binom{n}{l + pk} & \text{si } p > p_0 \end{cases} \quad (\star)$$

Or, l'application qui à j associe l'unique p tel que $j \in I_p$ réalise une bijection de $m + k\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}$. En sommant alors les inégalités $(\star)$ sur $j \in m + k\mathbb{Z}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{j \equiv m[k]} \binom{n}{j} &\leq \sum_{p < p_0} \binom{n}{l + (p+1)k} + \binom{n}{c_n} + \sum_{p > p_0} \binom{n}{l + pk} \\ &\leq \sum_{p \leq p_0} \binom{n}{l + pk} + \binom{n}{c_n} + \sum_{p > p_0} \binom{n}{l + pk} \\ &\leq \sum_{j' \equiv l[k]} \binom{n}{j'} + \binom{n}{c_n}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$S_{n,m} \leq S_{n,l} + \binom{n}{c_n}.$$

En appliquant ce résultat aux couples $(0, l)$ et $(l, 0)$ au lieu de (m, l) , on obtient respectivement :

$$S_{n,0} \leq S_{n,l} + \binom{n}{c_n} \quad \text{et} \quad S_{n,l} \leq S_{n,0} + \binom{n}{c_n}$$

d'où :

$$S_{n,l} - \binom{n}{c_n} \leq S_{n,0} \leq S_{n,l} + \binom{n}{c_n}.$$

Or on sait que :

$$\sum_{l=0}^{k-1} S_{n,l} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n.$$

Ainsi, en sommant les encadrements obtenus sur $l \in [0, k-1]$, on obtient :

$$2^n - k \binom{n}{c_n} \leq k S_{n,0} \leq 2^n + k \binom{n}{c_n}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{2^n}{k} - \binom{n}{c_n} \leq S_{n,0} \leq \frac{2^n}{k} + \binom{n}{c_n}.$$

D'après la proposition 1, on a $\binom{n}{c_n} = o(2^n)$ donc par encadrement : $S_{n,0} \sim_n \frac{2^n}{k}$. Enfin, l'encadrement :

$$S_{n,l} - \binom{n}{c_n} \leq S_{n,0} \leq S_{n,l} + \binom{n}{c_n}$$

montre alors que $S_{n,l} \sim_n S_{n,0} \sim_n \frac{2^n}{k}$, ce qui est le résultat annoncé. $\square$

Remarque. Merci aux différentes contributions, qui ont émergé d'échanges sur la liste UPS :

★ Jérémie Daniel est à l'origine de l'idée initiale de la preuve.

- ★ Julien Bureaux a aussi proposé une approche probabiliste basée sur les chaînes de Markov en signalant un site où un problème très proche est discuté :
<https://math.stackexchange.com/questions/284288/problem-of-limit-with-binomial-coefficients>
- ★ Luc Abergel propose une autre preuve reposant sur une domination uniforme des coefficients binomiaux sur un intervalle centré sur $\frac{n}{2}$ et de taille $2n^\alpha$, où $0 < \alpha < 1$.
- ★ Par ailleurs, Luc Abergel propose également la généralisation suivante. On peut montrer (mais ce n'est pas facile) que pour tout $\alpha > 0$:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^\alpha \sim \frac{1}{n^{\sqrt{\alpha}}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2^{\alpha n}}{\sqrt{n}^{\alpha-1}}.$$

La preuve du théorème 1 s'adapte alors sans difficulté pour établir que, pour tout $l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$:

$$\sum_{j \equiv l[k]} \binom{n}{j}^\alpha \sim \frac{1}{k^{\sqrt{\alpha}}} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{2^{\alpha n}}{\sqrt{n}^{\alpha-1}}.$$

- ★ Merci enfin à Claude Morin et Florent Nicaise pour leurs relectures et améliorations.

Forum physique

Envoyez vos contributions à Aurélie COLLAUDIN (aurelie.collaudin@prepas.org) ou Mickaël MELZANI (mickael.melzani@prepas.org) par courrier électronique.

■ Forum n° 15

Un paradoxe sur le calcul de la puissance d'une soufflerie

par Antoine Lehébel

Objectif du forum

Au cours d'une séance de travaux dirigés avec mes élèves, l'un d'entre eux a proposé un chemin différent de celui que j'avais suivi pour le calcul de la puissance d'une soufflerie. Les deux méthodes, la mienne et celle suivie en séance, donnaient deux résultats différant d'un facteur $\gamma/(\gamma-1)$, avec γ l'indice adiabatique du gaz. À première vue, les deux approches sont également satisfaisantes, et il faut une analyse détaillée pour déterminer quelle solution est la bonne.

I Le paradoxe

Considérons un gaz en écoulement dans une machine à hélice. Il peut s'agir indifféremment d'une soufflerie, où l'hélice apporte un travail au gaz, ou d'un système de type turbine ou éolienne, où c'est le gaz qui entraîne l'hélice. La géométrie de l'écoulement est présentée dans le schéma ci-dessous. On suppose les différentes grandeurs (vitesse,

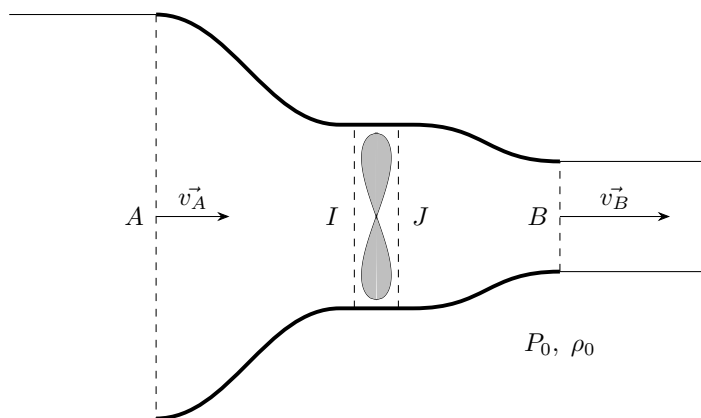


FIGURE 1 – Schéma de l'écoulement

pression, masse volumique...) homogènes sur une section, et l'écoulement permanent. La variation d'altitude est négligée. Le gaz est considéré parfait. L'hélice fournit au fluide une puissance (algébrique) $\mathcal{P}$, et l'écoulement est supposé adiabatique.

Enfin, on suppose l'écoulement parfait¹ de part et d'autre de l'hélice (pas forcément au niveau de l'hélice elle-même, ce point est discuté par la suite), et incompressible. Nous verrons que le paradoxe réside dans ces deux hypothèses.

Les lignes de courant sont parallèles entre elles en entrée et en sortie, et on néglige la pesanteur. L'équation d'Euler permet d'en déduire que le gradient de pression est nul dans les directions transverses à l'écoulement. La pression aux points d'entrée et de sortie, respectivement A et B , est donc égale à la pression environnante : $P_A = P_B = P_0$. On peut alors chercher à estimer $\mathcal{P}$ en fonction des vitesses d'entrée et de sortie, v_A et v_B , de deux manières différentes.

- **Première méthode** : appliquons le premier principe industriel directement entre l'entrée et la sortie de la machine. On a alors

$$D_m \left[h + \frac{v^2}{2} \right]_A^B = \mathcal{P} \quad (1)$$

avec D_m le débit massique. Le gaz étant parfait, son enthalpie massique s'exprime ainsi :

$$h = \frac{\gamma RT}{(\gamma - 1)M} = \frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho}. \quad (2)$$

L'écoulement étant incompressible, la masse volumique est uniforme ; notons-la simplement ρ : $\rho_A = \rho_B = \rho$. Nous avons déjà relevé que $P_A = P_B = P_0$. On en déduit donc $[h]_A^B = 0$, et finalement

$$\mathcal{P} = D_m \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}. \quad (3)$$

- **Deuxième méthode** : l'écoulement est parfait, permanent et incompressible en amont et en aval de l'hélice. L'entrée A de la machine est connectée par une ligne de courant au point I situé immédiatement avant l'hélice (voir la fig. 1). On peut donc appliquer la relation de Bernoulli entre A et I , puis le premier principe industriel de I à J , le point situé juste après l'hélice, et enfin, avec les mêmes arguments, la relation de Bernoulli de J à B . On obtient alors ces trois équations :

$$\frac{P_0}{\rho} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{P_I}{\rho} + \frac{v_I^2}{2}, \quad (4)$$

$$\mathcal{P} = D_m \left[h + \frac{v^2}{2} \right]_I^J, \quad (5)$$

$$\frac{P_J}{\rho} + \frac{v_J^2}{2} = \frac{P_0}{\rho} + \frac{v_B^2}{2}. \quad (6)$$

Par ailleurs, l'incompressibilité de l'écoulement implique la conservation du débit volumique. La section d'écoulement étant la même en I et en J , on en déduit que $v_I = v_J$. L'équation (5) se simplifie donc en

$$\mathcal{P} = D_m [h]_I^J = D_m \frac{\gamma(P_J - P_I)}{(\gamma - 1)\rho} \quad (7)$$

1. Un écoulement parfait est un écoulement dans lequel on néglige les phénomènes d'échanges diffusifs, aussi bien pour les transferts thermiques que pour la quantité de mouvement. Les transformations se font alors de manière adiabatique et réversible, donc isentropique.

compte tenu de l'équation (2). En soustrayant (6) et (4), on obtient la différence de pression de part et d'autre de l'hélice, $P_J - P_I = \rho(v_B^2 - v_A^2)/2$. Finalement,

$$\mathcal{P} = D_m \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}. \quad (8)$$

Les expressions (3) et (8) sont manifestement incompatibles. Quelle est donc la bonne réponse?

II Résolution du paradoxe : écoulement isentropique

En réalité, on ne peut fixer la « bonne réponse » qu'en revenant à un modèle d'écoulement compressible, et en rajoutant une condition pour raccorder les solutions amont/aval au niveau de l'hélice. Pour s'en convaincre, reprenons la différence des équations (6) et (4) dans la deuxième méthode, en précisant en quel point est évaluée la masse volumique pour plus de précision :

$$\frac{P_J}{\rho_J} - \frac{P_I}{\rho_I} = P_0 \left(\frac{1}{\rho_B} - \frac{1}{\rho_A} \right) + \frac{v_I^2 - v_J^2}{2} + \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}. \quad (9)$$

Nous avons ensuite, entre autres, simplifié les deux premiers termes du membre de droite, le premier car les masses volumiques sont identiques pour un écoulement incompressible, le deuxième car le débit volumique est conservé, toujours pour un écoulement incompressible. Or, comme nous le verrons plus précisément par la suite, la fluctuation de la masse volumique est d'ordre v^2 dans un développement à faible vitesse d'écoulement. De plus, pour un écoulement compressible, la relation $v_I = v_J$ (conservation du débit volumique) doit être remplacée par $\rho_I v_I = \rho_J v_J$ (conservation du débit massique). Il n'est donc pas rigoureux de négliger le premier terme ou le deuxième terme par rapport aux autres.

La première méthode est sujette à la même ambiguïté : on ne peut plus simplement affirmer que $h_A = h(P_0, \rho) = h_B$ via l'équation (2). La différence entre ρ_A et ρ_B conduit aussi, en général, à une différence d'ordre $v_B^2 - v_A^2$. On peut cependant reprendre cette méthode en rajoutant une hypothèse : que l'écoulement est isentropique *à travers l'hélice aussi*. Plus précisément, on supposera qu'une particule mésoscopique de fluide garde la même entropie en traversant l'hélice de I à J , ou dit autrement, que l'entropie massique est continue de part et d'autre de l'hélice : $s_I = s_J$. Comme l'écoulement est parfait de A à I et de J à B , il est entièrement isentropique de l'entrée à la sortie : $s_A = s_B$.

La deuxième identité thermodynamique s'écrit, pour les grandeurs massiques,

$$dh = T ds + \frac{dP}{\rho}. \quad (10)$$

Comme $s_A = s_B$ et $P_A = P_B = P_0$, on en déduit que $h_A = h_B$ (donc accessoirement que $T_A = T_B$ et $\rho_A = \rho_B$; en réalité, une fois que deux grandeurs intensives indépendantes sont prises égales aux points A et B , toutes les autres grandeurs intensives y sont égales). On retrouve donc le résultat de la première méthode ci-dessus :

$$\mathcal{P} = D_m \frac{v_B^2 - v_A^2}{2}. \quad (11)$$

Cette puissance est donc la « bonne » pour un écoulement isentropique. Elle correspond à un fonctionnement réversible de la machine étudiée, et présente donc un sens physique immédiat. On pourrait envisager d'autres modélisations de l'hélice, en introduisant par exemple un échange thermique à ce niveau. Le résultat obtenu par la deuxième méthode, éq. (8), correspond en fait à une condition de raccordement différente, à savoir une continuité stricte de la vitesse de part et d'autre de l'hélice. On aurait alors $v_I = v_J$, mais $\rho_A \neq \rho_B$ notamment. Ce raccordement n'est cependant guère justifié pour un écoulement qui n'est pas strictement incompressible. De manière cohérente, nous verrons ci-dessous que, pour le modèle isentropique, la vitesse est discontinue au niveau de l'hélice.

III Grandeurs discontinues au niveau de l'hélice

Dans le cadre d'une modélisation compressible, on peut poursuivre en évaluant les discontinuités de pression, de masse volumique et de vitesse de part et d'autre de l'hélice.

1 Discontinuité de pression

Pour un gaz parfait en écoulement parfait et compressible, la relation de Bernoulli est remplacée par la relation de Barré de Saint-Venant [1,2] (voir [3] pour un exposé détaillé du passage d'une relation à l'autre pour un écoulement à faible nombre de Mach M). Cette relation, appliquée entre A et I ainsi qu'entre J et B , permet d'écrire :

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_A} + \frac{v_A^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_I}{\rho_I} + \frac{v_I^2}{2}, \quad (12)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_B} + \frac{v_B^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_J}{\rho_J} + \frac{v_J^2}{2}. \quad (13)$$

L'écoulement étant isentropique, on peut également écrire que

$$\frac{P_I}{\rho_I^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_A^\gamma}, \quad (14)$$

$$\frac{P_J}{\rho_J^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_B^\gamma}. \quad (15)$$

Il n'est pas possible d'extraire de ce système d'équations toutes les grandeurs au niveau de l'hélice, notamment à cause du terme en ρ^γ qui rend le système insoluble. On peut en revanche se limiter à un développement à faible vitesse (ou, de manière identique, à faible nombre de Mach). Pour effectuer le développement proprement, c'est-à-dire en fonction d'un paramètre réel unique et non pas d'une fonction qui varie localement (la vitesse v en l'occurrence), on peut poser

$$v_A = \varepsilon v_{A,1}, \quad v_B = \varepsilon v_{B,1}. \quad (16)$$

Notons également ρ_0 la densité de l'air extérieur au repos (celui-ci étant à la pression P_0). Nous chercherons à exprimer v_I , v_J , ainsi que les différences $P_J - P_I$ et $\rho_J - \rho_I$ en fonction de ρ_0 , P_0 , $v_{A,1}$ et $v_{B,1}$ dans la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, c'est-à-dire à faible vitesse.

Pour cela, on développe la vitesse en un point M quelconque (I ou J en pratique) sous la forme suivante :

$$v_M \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \varepsilon v_{M,1} + \varepsilon^2 v_{M,2} + \varepsilon^3 v_{M,3} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (17)$$

Comme les équations (12)–(15) qui fixent P et ρ ne font intervenir que v^2 , on peut en déduire que leur développement ne contiendra pas de terme en ε (ni en fait en puissance impaire de ε) :

$$P_M \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} P_0 + \varepsilon^2 P_{M,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (18)$$

$$\rho_M \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \rho_0 + \varepsilon^2 \rho_{M,2} + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (19)$$

En insérant ces développements dans les équations (12)–(15), on aboutit à $v_{I,2} = v_{J,2} = 0$ d'une part, et d'autre part à

$$P_J - P_I \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\rho_0 \varepsilon^2}{2} (v_{B,1}^2 - v_{A,1}^2 - v_{J,1}^2 + v_{I,1}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \quad (20)$$

La constance du débit massique entre I et J s'écrit par ailleurs

$$\rho_I v_I = \rho_J v_J \quad (21)$$

puisque la section d'écoulement est la même en I et J , comme mentionné plus haut. On peut également développer cette relation à faible vitesse, et on obtient $v_{J,1} = v_{I,1}$: les vitesses d'écoulement sont identiques au premier ordre de part et d'autre de l'hélice. Nous verrons que ce n'est pas le cas à l'ordre suivant. En insérant cette relation dans l'équation (20), on aboutit finalement à

$$P_J - P_I \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\rho_0 \varepsilon^2}{2} (v_{B,1}^2 - v_{A,1}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \quad (22)$$

ou encore, en notation un peu moins rigoureuse mathématiquement,

$$\boxed{P_J - P_I \simeq \frac{\rho_0}{2} (v_B^2 - v_A^2)}. \quad (23)$$

Accessoirement, on peut aussi en déduire la discontinuité de masse volumique :

$$\rho_J - \rho_I \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\rho_0^2 \varepsilon^2}{2\gamma P_0} (v_{B,1}^2 - v_{A,1}^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \simeq \frac{\rho_0^2}{2\gamma P_0} (v_B^2 - v_A^2). \quad (24)$$

Remarque : il peut aussi être utile de réécrire les relations (23)–(24) sous forme adimensionnée. La vitesse du son en un point quelconque vaut, à l'ordre 0, $c_s^2 = \gamma P_0 / \rho_0$. Le nombre de Mach est défini comme $M = v / c_s$. On a alors :

$$\frac{P_J - P_I}{P_0} \simeq \frac{\gamma}{2} (M_B^2 - M_A^2), \quad \frac{\rho_J - \rho_I}{\rho_0} \simeq \frac{1}{2} (M_B^2 - M_A^2). \quad (25)$$

2 Discontinuité de vitesse

On peut finalement déterminer la discontinuité de vitesse de part et d'autre de l'hélice. Nous avons déjà vu que les vitesses sont identiques en amont et en aval de l'hélice à l'ordre 1. Pour déterminer cette vitesse au niveau de l'hélice à l'ordre 1, il faut distinguer deux cas.

- L'écoulement peut se faire à l'air libre. C'est le cas notamment pour une éolienne. Dans ce cas, les lignes en trait plus épais qui délimitent le tube de courant sur lequel on raisonne dans la figure 1 ne matérialisent rien : ce sont juste des lignes de courant. L'ensemble du tube est alors soumis à la pression extérieure P_0 , et la résultante de ces forces de pression est nulle². On trouve

$$v_{I,1} = \frac{v_{A,1} + v_{B,1}}{2}, \quad \text{ou plus simplement} \quad v_I \approx \frac{v_A + v_B}{2}. \quad (26)$$

On peut ensuite continuer le calcul pour établir le rendement de la machine, dit rendement de Betz [4]. Notons un point important : on peut avoir l'impression dans ce calcul que v_I ne dépend que des vitesses d'entrée et de sortie, et pas des sections. C'est une impression trompeuse, car en fait le cadre de ce calcul fixe de manière unique les sections S_A et S_B en fonction de S . Pour une section d'éolienne S et une vitesse d'écoulement données, le tube de courant s'élargira et se contractera de part et d'autre de manière univoque.

- Si l'écoulement se fait dans une conduite, alors la pression ne vaut plus P_0 le long du bord du tube de courant. On peut calculer la résultante des forces de pression, mais le résultat ne présente pas d'utilité particulière. On ne peut cette fois pas se débarrasser des sections dans le calcul. On doit donc se contenter d'écrire que

$$v_{I,1} = \frac{S_A}{S} v_{A,1}, \quad \text{ou} \quad \boxed{v_I \approx \frac{S_A}{S} v_A} \quad (27)$$

par exemple. Dans ce cas, le rendement de la machine dépend à la fois du rapport des vitesses (ou, si on préfère, des sections) en entrée et en sortie, comme le rendement de Betz, mais aussi du rapport entre section d'entrée et section au niveau de l'hélice. Ces deux rapports sont alors indépendants, contrairement au calcul de Betz.

La discontinuité de vitesse se détermine en examinant l'ordre 3 du développement de l'équation de conservation du débit massique, éq. (21). On trouve alors directement que

$$v_J - v_I \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} (v_{A,1}^2 - v_{B,1}^2) \frac{\rho_0 v_{I,1}}{2\gamma P_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^4), \quad (28)$$

qu'on résumera sous la forme

$$\boxed{v_J - v_I \approx (v_A^2 - v_B^2) \frac{\rho_0 v_I}{2\gamma P_0}}. \quad (29)$$

2. Il est essentiel pour la validité de la formule (26) que cette résultante des forces de pression soit nulle. Dans le modèle idéal de Betz, cela revient à traiter le tube de courant comme une surface de contrôle 1D, sans résoudre la structure transverse de l'écoulement autour de ses bords. Une interprétation trop littérale, où le gaz s'écoulerait en bloc dans le tube avec une vitesse nulle immédiatement à l'extérieur, ferait apparaître une discontinuité de pression d'ordre v^2 au bord du tube. Pour aller au-delà, il faudrait modéliser plus finement le profil de vitesse et de pression sur une section transverse.

Remarque : en version adimensionnée,

$$\frac{v_J - v_I}{v_I} \simeq \frac{1}{2} (M_A^2 - M_B^2). \quad (30)$$

Pour aller au-delà de la limite d'écoulement subsonique (à faible nombre de Mach), il faut recourir à une résolution numérique. On pourra trouver des détails dans [5] par exemple.

Remerciements

Je suis très reconnaissant envers Marc Legrand et Mickaël Melzani, sans l'aide de qui j'aurais eu bien du mal à répondre à mon interrogation initiale, ainsi qu'à clarifier le lien entre relations de Bernoulli et de Barré de Saint-Venant.

Références

- [1] R. Comolet, *Mécanique Expérimentale des Fluides*, vol. 2. Dunod, 4ème ed., 2006.
- [2] L. Clancy, *Aerodynamics*. Pitman, 2ème ed., 1978.
- [3] M. Melzani, « Relation de Bernoulli et limite incompressible pour un gaz », Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques, vol. 294, p. 29, 2026.
- [4] A. Betz, « Das Maximum der theoretisch möglichen Ausnützung des Windes durch Windmotoren », Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, vol. 26, no. 4, pp. 307–309, 1920.
- [5] H. H. N. Oo, « Actuator Disk Theory for Compressible Flow », Master's thesis, California Polytechnic State University, San Luis Obispo, May 2017.

Coin détente

par Édouard Lebeau¹

4							2
1							3
5							6
7			2		8		5
				1			
				6			
				3			
				2			
			1		5		

- Les règles habituelles du Sudoku s'appliquent.
- Chaque case avec un carré gris contient un chiffre pair.
- Chaque case avec un disque gris contient un chiffre impair.

Une interface permet la résolution en ligne :

<https://tinyurl.com/27opgzts>.

Une vidéo de résolution est aussi disponible :

<https://youtu.be/6iEDx3DT-jI>.

1. SudoKanard <https://youtu.be/gmpyzahExdE>.