

Partie I –

1 Si $z = 0$, la série converge.

Si $z \neq 0 \forall n \geq 1 \quad u_n = |n^{-z} z^n| \neq 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-s} |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z|$ On peut alors appliquer la règle de

d'Alembert :

a Si $|z| < 1$, la série converge : $R \geq 1$.

b Si $|z| > 1$, la série diverge et $R \leq 1$.

Conclusion : $\boxed{R = 1}$.

2 Etude sur le cercle de convergence :

a Si $s > 1 \quad |n^{-z} z^n| = n^{-s}$ et $(\sum n^{-s})$ est une série à termes positifs, convergente car $s > 1$ (règle de Riemann) : $(\sum n^{-s} z^n)$ converge absolument, donc converge.

Si $s \leq 0 \quad |n^{-z} z^n| = n^{-s} \geq 1$. La suite $(n^{-s} z^n)$ ne tend pas vers 0 et la série diverge grossièrement.

b Pour $z = 1$, $(\sum n^{-s})$ diverge car $s < 1$ (règle de Riemann)

c S_n est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$: $S_n = z \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$. Ce qui donne :

$$|S_n| \leq 1 \cdot \frac{1+1^n}{|1-z|} ; \text{ or } 1-z = (1-\cos(\vartheta)) - i\sin(\vartheta) \text{ et } |1-z|^2 = (1-\cos(\vartheta))^2 + \sin^2(\vartheta) = 2 - 2\cos(\vartheta)$$

$$= 4\sin^2(\vartheta/2). \text{ Conclusion : } |S_n| \leq \frac{1}{2|\sin(\vartheta/2)|}$$

2° méthode : $z^n = \exp(in\vartheta)$; on factorise alors $\exp(in\vartheta/2)$ au numérateur, $\exp(i\vartheta/2)$ au

dénominateur ; $S_n = z \frac{e^{in\vartheta/2} e^{-in\vartheta/2} - e^{in\vartheta/2}}{e^{i\vartheta/2} e^{-i\vartheta/2} - e^{i\vartheta/2}} = ze^{i(n-1)\vartheta/2} \frac{-2i\sin(n\vartheta/2)}{-2i\sin(\vartheta/2)}$; ainsi

$$|S_n| = \left| \frac{\sin(n\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)} \right| \leq \frac{1}{|\sin(\vartheta/2)|}$$

$S_k - S_{k-1} = z^k$. Alors $\sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^n k^{-s} S_{k-1} = \sum_{k=1}^n k^{-s} S_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{-s} S_k$ en prenant $k-1$

pour nouvel indice dans la 2° somme, et en utilisant $S_0 = 0$. On regroupe alors les termes de même

indice : $\sum_{k=1}^n k^{-s} z^k = \sum_{k=1}^n (k^{-s} - (k+1)^{-s}) S_k + n^{-s} S_n$.

La suite (S_n) est bornée et $s > 0$: $\lim n^{-s} S_n = 0$.

$\forall k \geq 1 \quad |(k^{-s} - (k+1)^{-s}) S_k| \leq (k^{-s} - (k+1)^{-s}) / |\sin(\vartheta/2)|$ et $\sum (k^{-s} - (k+1)^{-s})$ est une série convergente car la SUITE (k^{-s}) converge. Conséquence : $(\sum (k^{-s} - (k+1)^{-s}) S_k)$ est une série

absolument convergente, donc convergente et la suite $\left(\sum_{k=1}^n k^{-s} z^k \right)$ converge. $\boxed{(\sum k^{-s} z^k) \text{ converge}}$.

3 Expression de φ à l'aide d'une intégrale :

a Le rayon de convergence de la série $(\sum n^{-z} z^n)$ étant $R = 1$: $\forall t \in]-1, 1[\quad \varphi(t, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z} t^n$ et

pour $t \neq 0 \quad \frac{\varphi(t, s)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-z} t^{n-1}$. La formule est encore valable pour $t = 0$ (prolongement par

continuité en 0). Or la somme d'une série entière de rayon $R = 1$ converge normalement, donc uniformément sur $[0, x]$ lorsque $x \in]-R, R[=]-1, 1[$. Comme les fonctions $t \rightarrow n^{-s} t^{n-1}$ sont continues sur le segment $[0, x]$, on peut intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \frac{\varphi(t,s)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s-1} x^n = \varphi(x, s+1)$$

2° méthode : on utilise directement les résultats sur les séries entières.

La fonction $f : t \rightarrow \frac{\varphi(t,s)}{t} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} t^{n-1}$ a un développement en série entière de rayon 1 ; donc

toute primitive F de f un développement en série entière de rayon 1 : $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} \frac{x^n}{n}$.

Puisque $F(0) = 0$, on retrouve le résultat précédent.

b $\varphi(x, 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} 0 = 0$; $\varphi(x, 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

4 On suppose $s > 1$.

a La fonction f_n est définie et continue sur $[0, +\infty[$ (car $s-1 > 0$), telle que $f_n(t) =_{+\infty} O(1/t^2)$ (car $n > 0$) ; or $t \rightarrow 1/t^2$ est positive, intégrable sur $[1, +\infty[$ (car $2 > 1$; règle de Riemann) ; on applique la règle de domination : f_n est intégrable sur $[1, +\infty[$, continue sur $[0, 1]$, donc intégrable sur $[0, +\infty[$. On effectue alors le changement de variables affine (donc de classe C^1) : $u = nt$, ce qui donne :

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{n} \right)^{s-1} \frac{du}{n} = \boxed{\frac{1}{n^s} \Gamma(s)}$$

b On note $u_n(t) = z^n f_n(t)$.

i Pour tout n , u_n est continue (donc continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$ et y est intégrable puisque $|u_n| = |f_n z^n| \leq |f_n|$.

ii $u_n(t) = (ze^{-t})^n t^{s-1}$: suite géométrique de raison $r = ze^{-t}$ telle que $|r| \leq e^{-t} < 1$ sur $]0, +\infty[$ donc $(\sum u_n)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(t) = ze^{-t} t^{s-1} \frac{1}{1 - ze^{-t}}$$

iii g est continue, donc continue par morceaux, sur $]0, +\infty[$.

iv Pour tout $n \geq 1$ $\int_0^{+\infty} |u_n| = |z|^n \int_0^{+\infty} f_n \leq \frac{\Gamma(s)}{n^s}$ et $\sum \int_0^{+\infty} |u_n|$ converge (car $s > 1$; règle de

Riemann).

On peut alors utiliser le théorème de permutation série-intégrale : la fonction g est intégrable sur

$]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u_n(t) dt$ soit $z \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} t^{s-1}}{1 - ze^{-t}} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \Gamma(s) \varphi(z, s)$. En multipliant

numérateur et dénominateur par e^t dans l'intégrale, on obtient la formule demandée :

$$\boxed{\varphi(z, s) = \frac{z}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - z} dt}$$

Remarque : $\Gamma(s) > 0$ car c'est l'intégrale sur $[0, +\infty[$ d'une fonction continue, positive, et non nulle.

Partie II –

1 On pose $u_n(s) = n^{-s} = \exp(-s \ln(n))$

a Pour tout $n \geq 1$: u_n est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$ et $\forall p \geq 0$ $u_n^{(p)}(s) = (-\ln(n))^p n^{-s}$

b Pour montrer la convergence uniforme, l'intervalle $]1, +\infty[$ ne convient pas ; on se limite à l'intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 1$. Alors $\|u_n^{(p)}\|_\infty \leq \ln^p(n) n^{-a} = v_n$ (car la fonction $s \rightarrow n^{-s}$ est décroissante sur $[a, +\infty[$). Puisque $\ln(n) =_{+\infty} O(1/n^b)$ pour tout $b > 0$, on compare v_n à la suite de

terme général $t_n = n^{-(1+a)/2} \cdot \frac{v_n}{t_n} = \ln^p(n) n^{-a+(1+a)/2} = \ln^p(n) n^{\frac{1-a}{2}}$; puisque $1-a < 0$, la limite du quotient v_n/t_n est nulle et $\|u_n^{(p)}\|_\infty = O(n^{-(1+a)/2})$. Or $(\sum (n^{-(1+a)/2})$ converge (car $(1+a)/2 > 1$, règle de Riemann) ; on applique la règle de domination : $(\sum \|u_n^{(p)}\|_\infty)$ converge normalement, donc uniformément et simplement sur $[a, +\infty[$. En particulier,

i Pour $0 \leq k < p$ $(\sum \|u_n^{(k)}\|_\infty)$ converge simplement sur $[a, +\infty[$.

ii Et $(\sum \|u_n^{(p)}\|_\infty)$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Conclusion : pour tout naturel p , la fonction somme : ζ , est de classe C^p sur $[a, +\infty[$; ainsi ζ est une fonction de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$, ceci pour tout $a > 1$. On peut enfin conclure :

$$\boxed{\zeta \in C^\infty(]1, +\infty[.)}$$

2 Et pour $s > 1$ $\zeta'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(s) = - \sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^s}}_{>0} < 0$: la fonction ζ est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

3 Méthode utilisée : comparaison série-intégrale.

La fonction $t \rightarrow 1/t^s$ ($s > 0$) étant décroissante sur $[n, n+1]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) : $\frac{1}{(n+1)^s} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s} \leq \frac{1}{n^s}$; en

additionnant ces inégalités de 1 à p : $\sum_{n=1}^p \frac{1}{(n+1)^s} = \sum_{n=2}^{p+1} \frac{1}{n^s} \leq \int_1^{p+1} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^p \frac{1}{n^s}$; la fonction $t \rightarrow t^{-s}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $s > 1$ (règle de Riemann).

Lorsque $p \rightarrow +\infty$, on obtient : $\zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$.

De plus $\zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq 0$, ce qui complète l'encadrement : $0 \leq \zeta(s) - 1 \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s)$.

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-s} t^{1-s} - \frac{1}{1-s} = \frac{1}{s-1}$, ce qui donne : $1 \leq \zeta(s) \leq 1 + 1/(s-1) = s/(s-1)$. Lorsque $s \rightarrow +\infty$, les

deux termes qui encadrent ont pour limite 1 : $\boxed{\lim_{s \rightarrow +\infty} \zeta(s) = 1}$.

De même, en multipliant par $s-1 > 0$ l'encadrement : $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \zeta(s) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} + 1$, on obtient :

$1 \leq \zeta(s)(s-1) \leq s$; en utilisant le théorème d'encadrement : $\lim_1 \zeta(s)(s-1) = 1$ soit $\boxed{\zeta(s) \sim_1 1/(s-1)}$

Partie III –

1 Utilisation d'une série de Fourier :

a $\forall x \in [-\pi, 0[$ $x + 2\pi \in [0, 2\pi[$, $-x \in]0, \pi]$, ce qui permet d'écrire :

$$g(x) = g(x + 2\pi) = \left(\frac{\pi - x - 2\pi}{2} \right)^2 = \left(\frac{\pi + x}{2} \right)^2 = g(-x)$$

Comme g est 2π -périodique et que sa restriction à $[-\pi, \pi]$ est paire, g est paire.

La restriction de g à $[0, 2\pi]$ est de classe C^∞ , donc g est C^∞ par morceaux sur $\mathbb{R}$, en particulier continue par morceaux ; ses coefficients de Fourier sont définies. g étant paire, les coefficients

$b_n(g)$ sont nuls et $a_n(g) = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi g(t) \cos(nt) dt$. On effectue alors une triple intégration par parties,

en posant $u(t) = (\pi - t)^2$, $v^{(3)}(t) = \cos(nt)$, ce qui entraîne :

$$u'(t) = -2(\pi - t), \quad v''(t) = \sin(nt)/n \quad (\text{conséquence : } n > 0)$$

$$\begin{aligned} u''(t) &= 2 & v'(t) &= -\cos(nt)/n^2 \\ u^{(3)}(t) &= 0 & v(t) &= -\sin(nt)/n^3 \end{aligned}$$

Les fonctions u et v étant de classe C^3 sur le segment $[0, \pi]$, on obtient :

$$a_n(g) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^\pi (\pi-t)^2 \frac{\sin(nt)}{n} - 2(\pi-t) \frac{\cos(nt)}{n^2} - 2 \frac{\sin(nt)}{n^3} \right) dt - \int_0^\pi 0 \cdot dt \Bigg) \text{ soit, puisque } \cos(n\pi) = (-1)^n \text{ et}$$

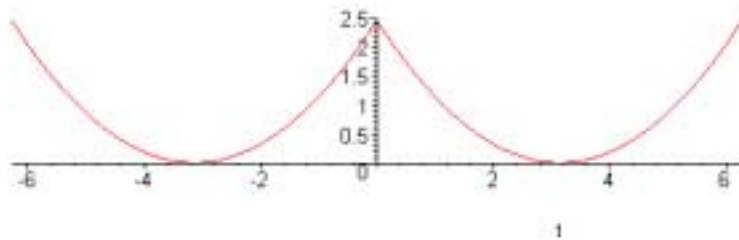
$$\sin(n\pi) = 0 : a_n(g) = \frac{1}{n^2} \text{ pour } n > 0.$$

Il reste à calculer $a_0(g) = \frac{4}{2\pi} \int_0^\pi \frac{(\pi-t)^2}{4} dt = \frac{\pi^2}{6}$. Le tracé de sa courbe est :

> **g:=t->(Pi-(t-floor(t/(2*Pi))*2*Pi))^2/4;**

$$g := t \rightarrow \frac{1}{4} \left(\pi - t + 2 \operatorname{floor} \left(\frac{1}{2} \frac{t}{\pi} \right) \pi \right)^2$$

> **plot(g(t), t=-2*Pi..2*Pi, scaling=constrained);**



g est paire et sa restriction à $[0, \pi]$ est continue, donc la restriction de g à $[-\pi, \pi]$ est continue. De plus, par construction $\lim_{t \rightarrow -\pi^+} g = \lim_{t \rightarrow \pi^-} g$: g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 par morceaux. On peut alors appliquer

le théorème de Dirichlet : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(g) \cos(nt)$ et en particulier :

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad g(t) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt) = \left(\frac{\pi-t}{2} \right)^2$$

b En particulier pour $t = 0$: $g(0) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ soit $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Pour le calcul de $\zeta(4)$, on utilise la formule de Parseval (g est 2π -périodique, continue par

morceaux sur $\mathbb{R}$) : $\left(\frac{a_0(g)}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g^2(t) dt$ (car g est paire). En effectuant dans

l'intégrale le changement de variable affine (donc de classe C^1) $u = \pi - t$, on obtient :

$$\frac{\pi^2}{12^2} + \frac{1}{2} \zeta(4) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{u^4}{16} du = \frac{\pi^4}{80} \text{ et } \boxed{\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}}$$

2 Une nouvelle formule :

$$a \quad R\phi(\vartheta) = \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\vartheta}}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}(e^{in\vartheta})}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^2} = \boxed{g(\vartheta) - \frac{\pi^2}{12}}$$

b On utilise alors la formule de la question I4b : $R\phi(\vartheta) = \operatorname{Re}(\phi(e^{i\vartheta}), 2) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\vartheta}}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \frac{t^1}{e^t - e^{i\vartheta}} dt \right)$ (si

une fonction est intégrable sur un intervalle, sa partie réelle (et sa partie imaginaire) le sont

$$\text{également) : } R\phi(\vartheta) = \left(\frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\vartheta}}{e^t - e^{i\vartheta}} \right) t dt \right)$$

$$\Gamma(2) = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt ; \text{ en effectuant une double intégration par parties : } u(t) = t, v'(t) = e^{-t}, u'(t) = 1,$$

$$v'(t) = -e^{-t}, u''(t) = 0 \text{ et } v(t) = e^{-t} \text{ (} u \text{ et } v \text{ de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}) : \int t e^{-t} dt = -(t+1)e^{-t} : \text{ de limite } 0$$

en $+\infty$. Ainsi $\boxed{\Gamma(2) = 1}$. On revient au calcul de la partie réelle : en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur :

$$\frac{t e^{i\vartheta}}{e^t - e^{i\vartheta}} = \frac{t e^{i\vartheta}}{e^t - e^{i\vartheta}} \cdot \frac{e^t - e^{-i\vartheta}}{e^t - e^{-i\vartheta}} = \frac{t(e^{t+i\vartheta} - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos(\vartheta) + 1} ; \text{ sa partie réelle est } \frac{t(e^t \cos(\vartheta) - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos(\vartheta) + 1}.$$

$$\text{Conclusion : } R\phi(\vartheta) = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t \cos(\vartheta) - 1)}{e^{2t} - 2e^t \cos(\vartheta) + 1} dt = g(\vartheta) - \frac{\pi^2}{12}}$$

$$c \quad \text{Pour } \cos(\vartheta) = 1, \text{ et } \vartheta = 0 : \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t - 1)}{e^{2t} - 2e^t + 1} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t(e^t - 1)}{(e^t - 1)^2} dt = \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\text{Pour } \vartheta = \pi : -\int_0^{+\infty} \frac{t(e^t + 1)}{e^{2t} + 2e^t + 1} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt = -\frac{\pi^2}{12} \text{ et } \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t + 1} dt = \frac{\pi^2}{12}}$$

$$\text{On remarque ensuite, pour } t > 0 : \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{e^t + 1} = \frac{2te^t}{e^{2t} - 1} = \frac{t}{\operatorname{sh}(t)} ; \text{ ainsi } \boxed{I_3 = I_1 + I_2 = \pi^2/4.}$$

3 On suppose $s > 0$, ainsi $s+1 > 0$.

a On prend $z = e^{i\vartheta}$, de module 1. On peut alors utiliser le résultat de la question I4b (pour $s+1$), en prenant la partie réelle des fonctions concernées :

$$\operatorname{Re}(\phi(e^{i\vartheta}), s+1) = \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} t^s \frac{e^t \cos(\vartheta) - 1}{e^{2t} - 2e^t \cos(\vartheta) + 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{in\vartheta}}{n^{s+1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\vartheta)}{n^{s+1}} \text{ puis la partie}$$

$$\text{imaginaire : } \frac{1}{\Gamma(s+1)} \int_0^{+\infty} t^s \frac{e^t \sin(\vartheta)}{e^{2t} - 2e^t \cos(\vartheta) + 1} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im} \left(\frac{e^{in\vartheta}}{n^{s+1}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\vartheta)}{n^{s+1}}$$

b Pour $\vartheta = \pi/2$, et la 2° formule : $\int_0^{+\infty} \frac{t^s e^t}{e^{2t} + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n^{s+1}}$; lorsque n est pair, $\sin(n\pi/2) =$

0 ; il ne reste dans la somme que les termes correspondant à n impair : $n = 2p+1$. Ainsi :

$$\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\operatorname{ch}(t)} dt = \Gamma(s+1) \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)^{s+1}} \text{ et } \boxed{I(s) = 2 \Gamma(s+1) \cdot S_2(s).}$$

On utilise de nouveau, pour $t > 0$: $\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^t + 1} = \frac{2e^t}{e^{2t} - 1} = \frac{1}{\text{sh}(t)}$, ainsi que la 1^o formule, pour $\vartheta = \pi$; ainsi : $-\int_0^{+\infty} t^s \frac{1}{e^t + 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^{s+1}}$ et pour $\vartheta = 0$: $\int_0^{+\infty} t^s \frac{1}{e^t - 1} dt = \Gamma(s+1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}}$; en faisant la différence : $\int_0^{+\infty} t^s \left(\frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^t + 1} \right) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^{s+1}}$ $1 - (-1)^n$ est nul si n est pair, vaut 2 si n impair. Soit : $\int_0^{+\infty} \frac{t^s}{\text{sh}(t)} dt = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2}{(2p+1)^{s+1}} \Gamma(s+1)$ et $\boxed{J(s) = 2 \Gamma(s+1) S_1(s)}$