Mines-Ponts 2010. Option MP. Mathématiques I.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

A. Prolongement harmonique.

1. Il vient immédiatement que $|c_n| \leqslant \|f\|_\infty$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en notant $\|f\|_\infty = \operatorname{Sup}_{z\in T} |f(z)|$ qui existe bien puisque f est continue sur le compact T. Il en résulte que les deux séries entières $\sum c_n z^n$ et $\sum c_{-n} z^n$ ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. $\square$

2. Notons $\widetilde{S}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$ avec $u_n(x,y) = a_n(x+iy)^n$, fixons $y \in]-1,1[$ et soit $R_y = \sqrt{1-y^2}$.

a) La série $x \longmapsto \widetilde{S}(x,y)$ converge simplement sur $]-R_y, R_y[$.

b) $x \longmapsto v_n(x) \underset{\text{DEF}}{=} u_n(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R_y,R_y[$ et $v_n'(x) = na_n(x+iy)^{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et est nulle si $n=0$.

c) La série $x \longmapsto \sum v_n'(x) = \sum na_n(x+iy)^{n-1}$ converge normalement donc uniformément sur tout compact $[-r,r]$ avec $r < R_y$ car alors $|v_n'(x)| \leqslant n|a_n|(\sqrt{r^2+y^2})^{n-1}$ et $R \underset{\text{DEF}}{=} \sqrt{r^2+y^2} < 1$ donc la série $\sum na_nR^{n-1}$ converge puisque la série entière $\sum na_nz^{n-1}$ a un rayon $\geqslant 1$ en tant que série dérivée de la série entière $\sum a_nz^n$.

d) Il en découle par le théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions de la variable réelle, en libérant y, que pour tout $(x,y) \in \widetilde{D}$, $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y)$ existe et est égal à $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n(x+iy)^{n-1} = S'(z)$ en notant $S'(z)$ la série dérivée de la série $S(z)$.

e) $S'(z)$ est continue sur D puisque son rayon est au moins 1 donc $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial x}(x,y)$ est continue sur $\widetilde{D}$. $\square$

3. a) En appliquant le résultat précédent (noté résultat 2 dans la suite) à la série $S(z)$ qui a le même rayon que $S(z)$ on obtient que $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x^2}(x,y)$ existe et est continue sur $\widetilde{D}$ et vaut $S''(z)$.

b) Par une démonstration semblable à celle de la question 2), on prouverait (ce qu'on appellera résultat 2-bis) que $\dfrac{\partial \widetilde{S}}{\partial y}(x,y)$ existe et est continue sur $\widetilde{D}$ et vaut $iS'(z)$ et en réappliqant ce résultat 2-bis à la série $S'(z)$ que $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial y^2}(x,y)$ existe et est continue sur $\widetilde{D}$ et vaut $i^2S''(z) = -S''(z)$

c) Enfin en appliquant le résultat 2-bis à la série $S'(z)$ et le résultat 2 à la série $iS'(z)$ on prouve que $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial xy}(x,y)$ et $\dfrac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial yx}(x,y)$ existent et sont continues sur $\widetilde{D}$ (et naturellement égales).

d) En conclusion S est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D (car les quatre dérivées partielles d'ordre deux de $\widetilde{S}$ existent et sont continues su$\widetilde{D}$) et le calcul précédent montre que S est harmonique sur D. $\square$

4. Il en découle que $z \longmapsto \sigma(x) \underset{\text{DEF}}{=} S(\overline{z})$ est également de classe $\mathcal{C}^2$ sur D car $z \longmapsto \overline{z}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ de D dans D et par composition $\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2}(x,y) = S''(\overline{z})$ et $\dfrac{\partial \sigma}{\partial y}(x,y) = -iS'(\overline{z})$ donc $\dfrac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2}(x,y) = (-i)^2S''(\overline{z})$.

Ce résultat et celui de la question précédente prouvent alors avec la question 1) que g_f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et harmonique. $\square$

5. $U(t) \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$ avec $u_n(t) = f(e^{it})e^{-int}z^n$ converge normalement sur $[-\pi,\pi]$ car $\|u_n(t)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty |z|^n$.

On peut donc intégrer terme à terme sur $[-\pi,\pi]$ et comme $U(t) = f(e^{it})\dfrac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}$ (série géométrique) il vient que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_nz^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,\mathrm{d}\,t$$
On établit de la même manière que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\overline{z}^n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\frac{e^{it}\overline{z}}{1-e^{it}\overline{z}}\,\mathrm{d}\,t$

Il en découle que $\displaystyle g_f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})h(t)\,\mathrm{d}\,t$ avec $\displaystyle h(t) = 1 + \frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z} + \frac{e^{it}\overline{z}}{1-e^{it}\overline{z}} = 1 + 2\mathfrak{Re}\Big(\frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\Big)$

Soit $\displaystyle h(t) = 1 + 2\mathfrak{Re}\Big(\frac{z}{e^{it}-z}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(1 + 2\frac{z}{e^{it}-z}\Big) = \mathfrak{Re}\Big(\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\Big)$ $\square$

6. Il vient immédiatement que tous les coefficients de Fourier de p_n sont nuls sauf c_n qui vaut 1. De sorte que $g_{p_n}(z) = z^n$ pour $z \in D$. De même $g_{q_n}(z) = \overline{z}^n$ pour $z \in D$. $\square$

En considérant en particulier g_{p_0}, la question 5) montre que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$ $\square$

$\dfrac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \dfrac{(e^{it}+z)(e^{-it}-\overline{z})}{|e^{it}-z|^2} = \dfrac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}(e^{it}\overline{z})}{|e^{it}-z|^2}$ donc $P_z(t) = \dfrac{1-|z|^2}{|e^{it}-z|^2} > 0$ pour tout réel t. $\square$

7. Pour $z \in D$ il vient d'après la question 5) (en notant $\|.\|_\infty$ la norme uniforme sur T) :
$|g_f(z) - g_{f_n}(z)| \leqslant \dfrac{\|f-f_n\|_\infty}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)|\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{\|f-f_n\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)|\,\mathrm{d}\,t = \|f-f_n\|_\infty$ d'après la question 6).
Il en découle que $|G_f(z) - G_{f_n}(z)| \leqslant \|f-f_n\|_\infty$ pour tout $z \in \overline{D}$ $\square$

8. Comme f est continue sur T, par le théorème de Wierstrass, elle y est limite uniforme d'une suite (P_n) de polynômes trigonométriques c'est à dire encore d'éléments de $\mathcal{P}(T)$. Or $G_{P_n}(z) = P_n(z)$ pour tout $z \in \overline{D}$ d'après la question 6) et cette suite (P_n) converge donc uniformément vers G_f sur $\overline{D}$ d'après la question 7).
Le théorème de récupération uniforme de la continuité prouve alors que G_f est continue sur $\overline{D}$. $\square$

9. Il vient $\Delta(|z|^2) = \Delta(x^2+y^2) = 4$ donc $\Delta(u)(z) = 4\varepsilon > 0$ pour tout $z \in D$. $\square$
Supposons qu'il existe $z_1 \in \overline{D}$ tel que $u(z_1) > \varepsilon$. Comme la fonction réelle u est continue sur le compact $\overline{D}$, elle y atteint son maximum en un point z_0. On a naturellement $u(z_0) \geqslant u(z_1) > \varepsilon$ donc $z_0 \in D$ puique $u(z) = \varepsilon$ pour tout $z \in T$.
Comme $z_0 \in D$ la fonction $x \longmapsto \widetilde{u}(x, y_0)$ est définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et comme elle admet (a fortiori) un maximum en x_0, sa dérivée seconde en x_0 est négative c'est à dire $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(z_0) \leqslant 0$.
On prouve de même que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(z_0) \leqslant 0$. Contradiction avec le fait que $\Delta(u)(z) > 0$ pour tout $z \in D$. $\square$

10. • Dans le cas particulier de la question précédente, remarquons que si G vérifie les 3 conditions, il en va de même de $-G$.
Supposons $G \neq G_f$ c'est à dire supposons $G \neq 0$. Alors, quitte à remplacer G par $-G$, il existe $\alpha \in D$ tel que $G(\alpha) > 0$. Ainsi $0 < G(\alpha) \leqslant (1-|\alpha|^2)\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$ d'après la question précédente. Donc $G(\alpha) = 0$. Contradiction. $\square$
• On suppose désormais toujours f nulle mais G à valeurs complexe. En notant G_1 et G_2 les parties réelles et imaginaires de la fonction G, il vient immédiatement que G_1 et G_2 vérifient les trois hypothèses et donc sont nulles par la partie précédente. $\square$
• Dans le cas général, envisageons la fonction $G - G_f$. Elle satisfait clairement les trois hypothèses avec une fonction nulle sur T. Donc elle est nulle d'après la partie précédente et ainsi $G = G_f$. $\square$

B. Deux applications.

11. Il est immédiat que G est de classe $\mathcal{C}^2$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur D et harmonique par un calcul facile. Elle est également continue sur $\overline{D}$ et sa restriction à T est la fonction $f(t) = G(e^{it}) = e^{\cos t}\cos(\sin t)$.
Il résulte de la partie précédente que $G = G_f$.
Or $G(z) = \mathfrak{Re}(e^{x+iy}) = \mathfrak{Re}(e^z) = \mathfrak{Re}(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}) = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{2n!} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\overline{z}^n}{2n!}$.
Ainsi $c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n z^n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_{-n}\overline{z}^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{z^n}{2n!} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\overline{z}^n}{2n!}$ pour tout $z \in D$.
En particulier pour $z = x \in]-1,1[$ il vient $c_0 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (c_n + c_n)x^n = 1 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
Par unicité du développement en série entière , il vient alors que $2\mathfrak{Re}(c_n) = \dfrac{1}{n!}$ pour $n \geqslant 1$ et $c_0 = 1$.
Or l'intégrale proposée I_n n'est autre que $\mathfrak{Re}(c_n)$ et que $I_n = I_{-n}$, il vient $I_n = \dfrac{1}{2|n|!}$ pour $n \in \mathbb{Z}^*$ et $I_0 = 1$. $\square$

12. Il résulte de la partie A. qu'une application v définie et continue sur $\overline{D}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur D si et seulement si $v(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour tout $z \in D$.
Par ailleurs u, comme définie dans l'énoncé, est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U si et seulement si elle vérifie ces deux conditions sur tout disque ouvert $D(a,R)$ tel que $\overline{D}(a,R)$ soit inclus dans U. En effet les deux notions (classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique) sont locales et U est la réunion de tous ces disques car, comme U est ouvert, pour tout $a \in U$ il existe R_a telque $D(a,R_a) \subset U$ et alors $U = \bigcup_{a\in U} D(a, \dfrac{R_a}{2})$ avec $\overline{D}(a, \dfrac{R_a}{2}) \subset U$.
Soit $D(a,R)$ un tel disque et notons v l'application définie sur $\overline{D}$ par $v(z') = u(a+Rz')$. Alors u est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur $D(a,R)$ si et seulement si v l'est sur D (changement de variable affine) donc si et seulement si, puisque v est continue sur $\overline{D}$, $v(z') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{it})P_{z'}(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour tout $z' \in D$.

Soit si et seulement si $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{z-a/R}(t)\,\mathrm{d}\,t$ pour tout $z \in D(a,R)$. $\square$

13. Par théorème de récupération uniforme de la continuité, u est continue sur D.
Donc d'après la question précédente (sens réciproque), pour conclure que u est de classe $\mathcal{C}^2$ et harmonique sur U il suffit de prouver que $u(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u(a+Re^{it})P_{z-a/R}(t)\,\mathrm{d}\,t$ dès lors que $\overline{D}(a,R) \subset U$ et $z \in D(a,R)$.
Or $u_n(z) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} u_n(a+Re^{it})P_{z-a/R}(t)\,\mathrm{d}\,t$ (1) toujours d'après la question précédente (sens direct) et $\varphi_n(t) \underset{\text{DEF}}{=} u_n(a+Re^{it})P_{z-a/R}(t)$ converge uniformément vers $\varphi(t) \underset{\text{DEF}}{=} u(a+Re^{it})P_{z-a/R}(t)$ sur $[-\pi,\pi]$.
En effet $|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leqslant M\|u-u_n\|_\infty$ avec $M = \underset{t\in[-\pi,\pi]}{\mathrm{Sup}} |P_{z-a/R}(t)|$.
Le passage à la limite est donc justifié dans l'intégrale de (1) ce qui fournit l'égalité escomptée. $\square$

C. Propriétés duales.

14. (c1) et (c4) : D'après la question 5) on a $\varphi_z(f) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})P_z(t)\,\mathrm{d}\,t$ ce qui prouve déjà que φ_z est $\mathbb{C}$-linéaire.
En outre $|\varphi_z(f)| \leqslant N(f) \times \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |P_z(t)|\,\mathrm{d}\,t$. Or par la question 6) $|P_z(t)| = P_z(t)$ et $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_z(t)\,\mathrm{d}\,t = 1$
Ce qui prouve que $|\varphi_z(f)| \leqslant N(f)$ et donc que φ_z est continue. $\square$
(c2) et (c3) résultent de la question 6). $\square$

15. Par hypothèses (c2) et (c3) et par la question 6), φ et φ_z coincident sur les fonctions p_n et q_n. Comme toutes deux sont linéaires, elles coincident sur l'espace engendré soit $\mathcal{P}(T)$. Comme elles sont continues elles coincident également sur $\overline{\mathcal{P}(t)}$ qui est égal à $\mathcal{C}(T)$ par le théorème de Weierstrass. $\square$

16. Comme f est à valeurs réelles, il vient $|h(z)|^2 = (2f(z)-N(f))^2+\lambda^2$. Comme f est à valeurs positives, le maximum de $(2f(z)-N(f))^2$ est atteint lorsque $f(z)$ atteint son maximum $N(f)$.
Ainsi $N(h)^2 = N(f)^2 + \lambda^2$ $\square$

17. Notons $\varphi(f) = a+ib$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ de sorte que $\varphi(h) = a+ib-N(f)+i\lambda$ puisque φ est linéaire et que $\varphi(1) = 1$ par (c2). La propriété (c4) s'écrit alors compte tenu de la question 16) : $(2a-N(f))^2+(2b+\lambda)^2 \leqslant N(f)^2+\lambda^2$ soit $4a^2 - 4aN(f) + 4b^2 + 4b\lambda \leqslant 0$ (1) et cela pour tout réel λ.
Si $b > 0$ (resp. $b < 0$) on a une contradiction en faisant tendre b vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Donc $b = 0$ et ainsi $\varphi(f) = a$ est réel.
L'inégalité (1) s'écrit alors $a(a-N(f)) \leqslant 0$. Supposons $a < 0$ alors $a - N(f) \geqslant 0$ donc $N(f) \leqslant a < 0$ ce qui est naturellement impossible. En conclusion $\varphi(f) = a \geqslant 0$. $\square$

18. Plaçons nous maintenant dans le cas général avec une fonction f et φ vérifiant (c1), (c2) et (c3).
Par linéarité de φ on a $2\varphi(\Re\mathrm{e}(f)) = \varphi(f) + \varphi(\overline{f})$.
Par ailleurs $\Re\mathrm{e}(f)$ en tant que fonction continue sur le compact T y admet un minimum m_r et d'après la propriété (c2) on a $\varphi(m_r) = m_r$.
Ainsi $2\varphi(\Re\mathrm{e}(f) - m_r) = \varphi(f) + \varphi(\overline{f}) - 2m_r$. Or $\Re\mathrm{e}(f) - m_r$ est à valeurs positives donc $2\varphi(\Re\mathrm{e}(f) - m_r)$ est réel (question précédente) et ainsi $\varphi(f) + \varphi(\overline{f})$ est réel (1).
De même en notant m_i la borne inférieure de $\mathrm{Im}(f)$ sur T il vient que $2i\varphi(\mathrm{Im}(f) - m_i) = \varphi(f) - \varphi(\overline{f}) - 2im_i$ et comme précédemment $\varphi(\mathrm{Im}(f) - m_i)$ est réel donc $\varphi(f) - \varphi(\overline{f})$ est imaginaire pur. (2)
(1) et (2) prouvent alors que $\varphi(\overline{f}) = \overline{\varphi(f)}$ $\square$

En particulier (c2) implique alors que $\varphi(q_n) = \overline{z}^n$ et ainsi φ vérifie (c1), (c2), (c3) et (c4) donc $\varphi = \varphi_z$ d'après la question 15). $\square$

FIN