MATHÉMATIQUES

– une proposition de correction –

Exercice 1

1. L est définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $(P,Q)\in E^2$, pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:
$$L(\lambda P+\mu Q)=\int_{-1}^{1}(\lambda P+\mu Q)(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}(\lambda P(t)+\mu Q(t))\,\mathrm{d}t=\lambda\int_{-1}^{1}P(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_{-1}^{1}Q(t)\,\mathrm{d}t=\lambda L(P)+\mu L(Q)$$
L est donc une forme linéaire sur E.
2. Pour tout $k\in[\![0\,;2n]\!]$, $L(e_k)=\displaystyle\int_{-1}^{1}t^k\,\mathrm{d}t=\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{-1}^{1}=\frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$.
3. L étant une forme linéaire non nulle (par exemple, $L(e_0)=2\neq 0$), donc son noyau est un hyperplan de E : $\dim(\mathrm{Ker}(L))=(2n+1)-1=2n$.
Pour les sceptiques, on se convainc rapidement que $\dim(\mathrm{Im}(L))=1$ *(car* $\mathrm{Im}(L)\subset\mathbb{R}$, *et* $\mathrm{Im}(L)\neq\{0\}$*), puis on applique à* L *la formule du rang.*
4. On vérifie facilement que $L(e_1)=0$: e_1 appartient donc à $\mathrm{Ker}(L)$, et comme $e_1\neq 0_E$, (e_1) est une famille libre de $\mathrm{Ker}(L)$. D'après le théorème de la base incomplète, on en déduit qu'il existe une base de $\mathrm{Ker}(L)$ dont le premier vecteur est e_1.
5. i. Considérons $P\in\mathrm{Vect}(e_0)$ et $Q\in\mathrm{Ker}(L)$.
Puisque $P\in\mathrm{Vect}(e_0)$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $P=\lambda e_0=\lambda$.
Par conséquent, $(P\,|\,Q)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\lambda Q(t)\,\mathrm{d}t=L(\lambda Q)=\lambda L(Q)=0$.
Donc $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont deux sous-espaces orthogonaux.
ii. En particulier, $\mathrm{Vect}(e_0)$ et $\mathrm{Ker}(L)$ sont en somme directe.
De plus, $\dim(\mathrm{Vect}(e_0))+\dim(\mathrm{Ker}(L))=1+2n=\dim(E)$.
Par conséquent, $E=\mathrm{Vect}(e_0)\oplus\mathrm{Ker}(L)$.
6. 6.1 T_λ est définie sur E, à valeurs dans E et, pour tout $(P,Q)\in E^2$, pour tout $(\mu,\nu)\in\mathbb{R}^2$:
$$\begin{aligned}T_\lambda(\mu P+\nu Q)&=(\mu P+\nu Q)+\lambda L(\mu P+\nu Q)X\\&=(\mu P+\nu Q)+\lambda(\mu L(P)+\nu L(Q))X\\&=\mu(P+\lambda L(P)X)+\nu(Q+\lambda L(Q)X)\\&=\mu T_\lambda(P)+\nu T_\lambda(Q)\end{aligned}$$
T_λ est donc un endomorphisme de E.

6.2 $(L\circ T_\lambda)(P)=L(T_\lambda(P))=L(P+\lambda L(P)X)=L(P)+\lambda L(P)\underbrace{L(X)}_{=0}=L(P)=\displaystyle\int_{-1}^{1}P(t)\,\mathrm{d}t$.

6.3 Considérons une base $\mathscr{B}$ constituée du vecteur e_0 suivi des vecteurs de la base $\mathscr{U}$ de $\mathrm{Ker}(L)$ construite en 4.
$T_\lambda(e_0)=e_0+\lambda L(e_0)X=1+2\lambda X=1.e_0+2\lambda.e_1$.
Pour tout vecteur P dans la base $\mathscr{U}$ de de $\mathrm{Ker}(L)$, $T_\lambda(P)=P+\lambda\times 0\times X=P$.
$$\text{Par conséquent, }\mathcal{M}at_{\mathscr{B}}(T_\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\2\lambda&1&0&&&&\vdots\\0&0&1&0&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}.$$

6.4 Puisque la matrice précédente est triangulaire, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.
Par conséquent, $\mathrm{Sp}(T_\lambda)=\{1\}$.

6.5 Puisque $\mathrm{Sp}(T_\lambda)=\{1\}$, T_λ est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle T_λ est représenté par I_{2n+1}, autrement dit lorsque $T_\lambda=\mathrm{Id}_E$.
Ainsi, T_λ est diagonalisable si et seulement si $\lambda=0$.

6.6 Puisque $0 \notin \mathrm{Sp}(T_\lambda)$, T_λ est un automorphisme de E.

6.7 Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned}(T_\alpha \circ T_\beta)(P) &= T_\alpha(T_\beta(P)) = T_\alpha(P + \beta L(P)X) = T_\alpha(P) + \beta L(P)\underbrace{T_\alpha(X)}_{=X} \\ &= P + \alpha L(P)X + \beta L(P)X = P + (\alpha+\beta)L(P)X\end{aligned}$$

Donc $T_\alpha \circ T_\beta = T_{\alpha+\beta}$.

6.8 On déduit de ce qui précède que $T_\lambda \circ T_{-\lambda} = T_{\lambda-\lambda} = T_0 = \mathrm{Id}_E$ et, de même, $T_{-\lambda} \circ T_\lambda = \mathrm{Id}_E$.
Par conséquent, la réciproque de T_λ est $T_{-\lambda}$.

Exercice 2

1. 1.1 Puisque $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \times \dfrac{\lambda^n}{n!}$, $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

   1.2 ch et sh sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, les séries entières correspondantes ayant un rayon de convergence infini, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

   1.3 X_1 et X_2 sont indépendantes lorsque, pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(\mathbb{R})^2$:

$$P(X_1 \in A, X_2 \in B) = P(X_1 \in A)P(X_2 \in B)$$

2. 2.1 $(Y = 0) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X = 2n)$ et $(Y = 1) = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X = 2n+1)$.

   2.2 Par définition de Y, $Y(\Omega) = \{0, 1\}$ et, par σ-additivité (et d'après les descriptions précédentes) :

$$\begin{cases} P(Y=0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{ch}(\lambda) \\ P(Y=1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{sh}(\lambda)\end{cases}$$

   Ainsi, Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{sh}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$, et donc $E(Y) = \mathrm{sh}(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda}$.

3. 3.1 Lorsque $(Z = 1)$ est réalisé, T prend la valeur de X. On en déduit rapidement que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.

   3.2 Puisque $((Z = 1), (Z = 2))$ est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}P(T = k) &= P(Z = 1)P_{(Z=1)}(T = k) + P(Z = 2)P_{(Z=2)}(T = k) \\ &= \frac{1}{2}\,P_{(Z=1)}(X = k) + \frac{1}{2}\,P_{(Z=2)}(2X = k) \\ &= \frac{1}{2}\,P(X = k) + \frac{1}{2}\,P(2X = k) \text{ par indépendance de } X \text{ et } Z\end{aligned}$$

   3.3 On a vu en 3.1 que $T(\Omega) = \mathbb{N}$.
   De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
   $\rightarrow$ si k est impair, $P(T = k) = \dfrac{1}{2}\,P(X = k) + \dfrac{1}{2}\,\underbrace{P(2X = k)}_{=0} = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!}$;
   $\rightarrow$ si k est pair, $P(T = k) = \dfrac{1}{2}\,P(X = k) + \dfrac{1}{2}\,P\left(X = \dfrac{k}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^k}{k!} + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\dfrac{\lambda^{k/2}}{(k/2)!}$.

   3.4 En raisonnant comme en 2.1, on écrit l'événement A : « *T prend une valeur paire* » de la façon suivante :

$$A = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} (T = 2\ell)$$

   Donc, par σ-additivité :

$$P(A) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} P(T = 2\ell) = \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{2\ell}}{(2\ell)!} + \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{\ell}}{\ell!}\right) = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{2}\left(\mathrm{ch}(\lambda) + \mathrm{e}^{\lambda}\right)$$

Exercice 3

1. Puisque $x \geqslant 0$:
   i. si $x \leqslant 1$, $x \times x \leqslant 1 \times x$, autrement dit $x^2 \leqslant x$;
   ii. si $x > 1$, $x^2 > x$.

2. 2.1 Puisque $t \mapsto t^\alpha$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et comme sin est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition, la fonction $f_\alpha : t \mapsto \sin(t^\alpha)$ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et, pour tout $t \geqslant 1$, $f'_\alpha(t) = \alpha t^{\alpha-1}\cos(t^\alpha)$.

   2.2 En tant que quotient de fonctions dérivables, φ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$, et, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\varphi'(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}\cos(t^\alpha) \times t - \sin(t^\alpha) \times 1}{t^2}$$

   2.3 Pour tout $t \geqslant 1$, $\underbrace{|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{\alpha t^\alpha |\cos(t^\alpha)| + |\sin(t^\alpha)|}{t^2}}_{\text{inégalité triangulaire}} \leqslant \dfrac{\alpha t^\alpha + 1}{t^2}$.

   2.4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   D'après 2.3, pour tout $t \in [n\,;n+1]$, $|\varphi'(t)| \leqslant \dfrac{1}{t^2} + \dfrac{\alpha}{t^{2-\alpha}} \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$, car $t \mapsto 1/t^2$ et $t \mapsto 1/t^{2-\alpha}$ sont décroissantes sur $\mathbb{R}_+^*$ $(2-\alpha > 0)$.
   Par conséquent, d'après l'inégalité des accroissements finis, φ est $\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)$−lipschitzienne sur $[n\,;n+1]$, et, en particulier :

$$\forall\, t \in [n\,;n+1],\ |\varphi(t) - \varphi(n)| \leqslant \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)|t-n|$$

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
|u_n - a_n| &= \left|\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \varphi(n)\right| \\
&= \left|\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t - \int_n^{n+1} \varphi(n)\,\mathrm{d}t\right| \\
&= \left|\int_n^{n+1} (\varphi(t) - \varphi(n))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \int_n^{n+1} |\varphi(t) - \varphi(n)|\,\mathrm{d}t \text{ par l'inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\underbrace{|t-n|}_{\leqslant 1}\,\mathrm{d}t \text{ d'après 2.4, et par croissance de l'intégrale} \\
&\leqslant \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n^2} + \frac{\alpha}{n^{2-\alpha}}
\end{aligned}$$

4. 4.1 $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est continue sur $[1\,;+\infty[$, et, pour tout $t \geqslant 1$, $\left|\dfrac{\cos(t)}{t^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$: puisque $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$, on en déduit, par comparaison, que $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

   4.2 Posons, pour tout $t \geqslant 1$:

$$\left[\begin{array}{rcl} u(t) = \dfrac{1}{t} & \text{donc} & u'(t) = -\dfrac{1}{t^2} \\ v'(t) = \sin(t) & \text{ou plutôt} & v(t) = -\cos(t) \end{array}\right]$$

   u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, et puisque $u(t) \times v(t) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ ont la même nature.
   Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \left(-\frac{\cos(t)}{t^2}\right)\mathrm{d}t$ est convergente, puisque $t \mapsto \dfrac{\cos(t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
   Par conséquent, $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

5. Posons $u = t^\alpha$.
$t \mapsto t^\alpha$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, et comme $\alpha \in]0\,;1[$, cette fonction est également strictement croissante.
Ainsi, l'intégrale obtenue, en appliquant à l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ le changement de variable défini par $u = t^\alpha$ (et donc $\mathrm{d}u = \alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t$) est de même nature que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$, et :
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t^\alpha}\,\left(\alpha t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\alpha}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$$
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{n+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$.
Puisque $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, la suite $\displaystyle\left(\int_1^{n+1} \frac{\sin(t^\alpha)}{t}\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente.
Par conséquent, la suite de terme général $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ est convergente : autrement dit, la série $\sum u_n$ converge.

7. D'après 3., pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}$.
Puisque $\alpha \in]0\,;1[$, $\sum \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^{2-\alpha}}$ sont deux séries de Riemann convergentes, $\sum \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{\alpha}{n^{2-\alpha}}\right)$ converge.
Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que $\sum |u_n - a_n|$ est convergente, autrement dit que $\sum(u_n - a_n)$ converge absolument.

8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n - (u_n - a_n)$: puisque $\sum u_n$ et $\sum(u_n - a_n)$ sont des séries convergentes ($\sum(u_n - a_n)$ est absolument convergente, donc convergente), on en déduit que $\sum a_n$ converge.

9. 9.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|\sin(n^\alpha)| \leqslant 1$, donc $\sin^2(n^\alpha) = |\sin(n^\alpha)|^2 \leqslant |\sin(n^\alpha)|$, et donc $\dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n} \leqslant |a_n|$.
Puisque $\sum |a_n|$ est supposée convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente.
   9.2 Procédons, comme indiqué, comme en 4.2, et posons, pour tout $x \geqslant 1$:
$$\begin{bmatrix} u(x) = \dfrac{1}{x} & \text{donc} & u'(x) = -\dfrac{1}{x^2} \\ v'(x) = \cos(2x) & \text{ou plutôt} & v(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2} \end{bmatrix}$$
u et v étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$, et puisque $u(x) \times v(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ ont la même nature.
Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2x)}{2x^2}\,\mathrm{d}x$ est convergente (on peut montrer, comme en 4.1, que $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x^2}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$), donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$ converge également.
   9.3 Pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{\cos(2n^\alpha)}{n} = \dfrac{1 - 2\sin^2(n^\alpha)}{n} = \dfrac{1}{n} - 2 \times \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$.
Or, d'après 9.1, $\sum \dfrac{\sin^2(n^\alpha)}{n}$ est convergente, tandis que $\sum \dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente : par conséquent, $\sum \dfrac{\cos(2n^\alpha)}{n}$ est divergente... ce qui contredit sa convergence énoncée initialement.
L'hypothèse formulée au début de ce raisonnement est donc fausse : la série $\sum a_n$ n'est donc pas absolument convergente (... même si elle est convergente, comme cela a été établi en 8.).

Exercice 4

1. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = p + q$, et le coefficient dominant de PQ est $a_p b_q$.
   Par conséquent, $|P(n)Q(n)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |a_p b_q| n^{p+q}$, et donc $\left|2^{-n}P(n)Q(n)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|a_p b_q| n^{p+q}}{2^n}$.
   Ainsi, par croissances comparées : $n^2 \times \left|2^{-n}P(n)Q(n)\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|a_p b_q| n^{p+q+2}}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   Par conséquent, $\left|2^{-n}P(n)Q(n)\right| \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$: comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \left|2^{-n}P(n)Q(n)\right|$ est convergente, donc $\sum 2^{-n}P(n)Q(n)$ est absolument convergente.
2. 2.1 Soit $S \in E$ tel que $(S \mid S) = 0$.
   Puisque $(S \mid S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^{-n}S(n)^2}_{\geqslant 0}$, l'égalité $(S \mid S) = 0$ impose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^{-n}S(n)^2 = 0$, donc $S(n) = 0$: S possède donc une infinité de racines, donc S est le polynôme nul.
   Réciproquement, si S est le polynôme nul, il est immédiat que $(S \mid S) = 0$.
   2.2 L'application $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est définie sur E^2, à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'après 1. De plus :
      i. par commutativité de la multiplication, $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est symétrique ;
      ii. par associativité de l'addition et distributivité du produit sur l'addition, $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est bilinéaire ;
      iii. pour tout $S \in E$, $(S \mid S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{2^{-n}S(n)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0$, et, si $(S \mid S) = 0$, alors S est le polynôme nul, d'après 2.1 : $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est donc définie-positive.
   $(P, Q) \mapsto (P \mid Q)$ est donc un produit scalaire.
3. 3.1 f est définie sur $]-1\,;1[$ et, pour tout $t \in]-1\,;1[$, $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$.
   3.2 Pour tout $x > 0$, $\mathrm{e}^{-x} \in]0\,;1[$, donc, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{e}^{-nx} = \left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n$, la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ est une série géométrique convergente, et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nx} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$.
   3.3 Pour tout $x > 0$, $g(x) = f\left(\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $]0\,;1[$, intervalle sur lequel f est de classe $\mathscr{C}^\infty$: par composition, g est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   3.4 Comme calculé en 3.2, $g(x) = \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}}$, donc $g'(x) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2}$ et :

$$
\begin{aligned}
g''(x) &= -\frac{-\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \mathrm{e}^{-x} \times 2\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)+2\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^4} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)^3}
\end{aligned}
$$

   3.5 i. $S_0 = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{1-1/2} = 2$
      ii. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(-n)\mathrm{e}^{-n\ln(2)} = -g'(\ln(2)) = +\frac{\mathrm{e}^{-\ln(2)}}{\left(1-\mathrm{e}^{-\ln(2)}\right)^2} = +\frac{1/2}{(1-1/2)^2} = 2$
      En effet, puisque f est la somme d'une série entière, pour tout $t > 0$, $f'(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}$, donc, pour tout $x > 0$, $g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}f'\left(\mathrm{e}^{-x}\right) = -\mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\mathrm{e}^{(n-1)(-x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} n\mathrm{e}^{-nx}$.
      Le calcul de $g''(x)$, pour tout $x > 0$, sous forme de série, se fait de même.
      iii. $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-n)^2\mathrm{e}^{-n\ln(2)} = g''(\ln(2)) = \frac{\mathrm{e}^{-\ln(2)}\left(1+\mathrm{e}^{-\ln(2)}\right)}{\left(1-\mathrm{e}^{-\ln(2)}\right)^3} = \frac{(1/2)(1+1/2)}{(1-1/2)^3} = 6$

4. 4.1 Pour commencer, calculons les produits scalaires suivants :

$$(X^2 \mid 1) = (X \mid X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{-n} = S_2 = 6, \quad (X^2 \mid X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 2^{-n} = S_3 = 26,$$
$$(X \mid 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{-n} = S_1 = 2, \qquad (1 \mid 1) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = S_0 = 2$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

i. $\left(X^2 - aX - b \mid 1\right) = 0$ si et seulement si $\underbrace{\left(X^2 | 1\right)}_{=6} - a \underbrace{(X \mid 1)}_{=2} - b \underbrace{(1 \mid 1)}_{=2} = 0$;

ii. $\left(X^2 - aX - b \mid X\right) = 0$ si et seulement si $\underbrace{\left(X^2 | X\right)}_{=26} - a \underbrace{(X \mid X)}_{=6} - b \underbrace{(1 \mid X)}_{=2} = 0$.

Ainsi, $X^2 - aX - b$ est orthogonal à 1 et à X si et seulement si $\left\{\begin{array}{l} 2a + 2b = 6 \\ 6a + 2b = 26 \end{array}\right.$, c'est-à-dire $\left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ b = -2 \end{array}\right.$

4.2 Pour tout $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\left(n^2 - cn - d\right)^2 = \left(X^2 - cX - d \mid X^2 - cX - d\right) = \left\|X^2 - (cX + d)\right\|^2$.

Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est de dimension finie, la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$ est bien définie, et vaut :

$$\min\left\{\left\|X^2 - P\right\| ; P \in \mathbb{R}_1[X]\right\} = \min\left\{\left\|X^2 - (cX + d)\right\| ; (c, d) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Le minimum cherché existe donc, et est $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right)^2$.

4.3 En notant p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$, $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \left\|X^2 - p\left(X^2\right)\right\|$.

De plus, $p\left(X^2\right)$ est l'unique polynôme Q de $\mathbb{R}_1[X]$ tel que $X^2 - Q \in \mathbb{R}_1[X]^2$, autrement dit c'est l'unique polynôme de la forme $aX + b$ tel que $X^2 - aX - b$ est à la fois orthogonal à 1 et à X.

D'après 4.1, $p\left(X^2\right) = 5X - 2$, donc $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \left\|X^2 - 5X + 2\right\|$.

De plus, d'après le théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned}
\left\|X^2 - 5X + 2\right\|^2 &= \left\|X^2\right\|^2 - \|5X - 2\|^2 \\
&= \left(X^2 \mid X^2\right) - (5X - 2 \mid 5X - 2) \\
&= S_4 - (25(X \mid X) - 20(X \mid 1) + 4(1 \mid 1)) \\
&= S_4 - (25 S_2 - 20 S_1 + 4 S_0) \\
&= 150 - (25 \times 6 - 20 \times 2 + 4 \times 2) \\
&= 32
\end{aligned}$$

Finalement, $\mathrm{d}\left(X^2, \mathbb{R}_1[X]\right) = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.