

Corrigé du Concours Communs polytechniques Épreuve de mathématiques II-Session 2010

Omar SADIK

17 mai 2010

I. Questions préliminaires

1. Les matrices A^2 et B^2 sont des matrices nulles, donc $\exp A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\exp A \exp B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, si on pose $A + B = C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, alors par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : C^{2n} = I_n$ et $C^{2n+1} = C$, ainsi
- $$\exp C = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} I_n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} C =$$
- $$\cosh 1 \cdot I_n + \sinh 1 \cdot C = \begin{pmatrix} \cosh 1 & \sinh 1 \\ \sinh 1 & \cosh 1 \end{pmatrix}$$

Remarque : $\exp A \cdot \exp B \neq \exp(A + B)$, et $AB \neq BA$.

2. Si $AB = BA$, alors $\exp A \cdot \exp B = \exp(A + B)$
3. $\phi : \mathbb{R}_{r-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^r$
 $P \longmapsto (P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_r))$
 Soit $P \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$, $P \in \text{Ker } \phi \iff \phi(P) = \mathbf{0} \iff P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, le nombre de racines de P excède son degré : Le polynôme P est nul, ainsi $\text{Ker } \phi = \{0\}$, d'autre part $\dim \mathbb{R}_{r-1}[X] = r = \dim \mathbb{R}^r$, donc ϕ est un isomorphisme, et l'existence et l'unicité d'un polynôme $L \in \mathbb{R}_{r-1}[X]$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, r\}, L(\lambda_i) = e^{\lambda_i}$ en découle.

4. a/ $\ell_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$.
 b/ De la question précédente la famille (ℓ_1, \dots, ℓ_r) est libre et elle est maximale, c'est donc une base de \mathbb{R}_{r-1} . Cherchons les constantes $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ telles que $L = \sum_{k=1}^r a_k \ell_k(X)$,

$$\text{on a : } L(\lambda_i) = e^{\lambda_i} = \sum_{k=1}^r a_k \ell_k(\lambda_i) = a_i, \text{ d'où } L = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k} \ell_k(X)$$

5. a/ L'élément $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut être considéré comme élément de \mathbb{R}^{n^2} et le produit PMP^{-1} est un élément de \mathbb{R}^{n^2} dont chaque composante est combinaison linéaire des éléments de M , donc l'endomorphisme $\varphi : M \longmapsto PMP^{-1}$ est une application continue.

Remarque : l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est linéaire et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est

$$M \longmapsto PMP^{-1}$$

de dimension finie, donc φ est continue.

- b/ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\varphi\left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!}\right) = P\left(\sum_{k=0}^n \frac{D^k}{k!}\right)P^{-1} = \sum_{k=0}^n \frac{PD^kP^{-1}}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(PDP^{-1})^k}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{(\varphi(D))^k}{k!}$$

En passant à la limite dans les deux membres de l'égalité précédente et puisque φ est continue, on obtient : $\exp(PDP^{-1}) = P \exp(D) P^{-1}$.

6. A est diagonalisable donc $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{dig}(\lambda_1, \dots, \lambda_r) / A = PDP^{-1}$.

$$\begin{aligned} \exp(A) &= \exp(PDP^{-1}) = P \exp(D)P^{-1} \quad \text{Question 5} \\ &= P \exp(\text{dig}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_r}))P^{-1} = P \text{dig}(L(\lambda_1), \dots, L(\lambda_r))P^{-1} \\ &= PL(\text{dig}(\lambda_1, \dots, \lambda_r))P^{-1} = PL(D)P^{-1} = L(PDP^{-1}) = L(A) \end{aligned}$$

7. Soit $k \in \mathbb{N}$, si λ est une valeur propre associée au vecteur propre x , alors $v^k(x) = \lambda^k x$, ce qui se traduit par $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(v)(x) = P(\lambda)x$.

8. a/ On pose $E_i = \text{Ker}(v - \lambda_i \text{id})$, v est diagonalisable car A l'est, d'où $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_r$, c-à-d $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r E_j \oplus E_i = E$, Soit $x \in E$; si $x \in E_i$, alors $\ell_i(v)(x) = \ell_i(\lambda_i)x = x$, donc $p_i(x) = x$ et si $x \in E_j$ avec $j \neq i$, alors $\ell_i(v)x = \ell_i(\lambda_j)x = 0$, donc $p_i(x) = 0$, ainsi p_i est le projecteur sur E_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r E_j$

b/ On a $L = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k} \ell_k(X)$, donc $L(v) = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k} \ell_k(v) = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k} p_k$, ainsi si A_k désigne

la matrice de p_k dans la base \mathcal{B} , alors $\exp A = \sum_{k=1}^r e^{\lambda_k} A_k$, car d'après la question 6. $\exp A = L(A)$, donc $\exp A$ est la matrice de $L(v)$ dans la base \mathcal{B} .

9. Les racines de m_u ne sont pas simples, u n'est donc pas diagonalisable.

10. Le polynôme caractéristique de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $(X - 1)^2(X - 2)$,

et $(A - I_3)(A - 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, donc son polynôme minimal est $(X - 1)^2(X - 2)$.

11. Le polynôme $(X - 1)^2(X - 2)$ annule l'endomorphisme u , et les polynômes $(X - 1)^2$ et $(X - 2)$ sont premiers entre eux, donc $\text{Ker}(u - \text{id})^2 \oplus (\text{Ker}(u - 2\text{id})) = E$ théorème de décomposition des noyaux.

12. $p + q = (u - \text{id})^2 + u \circ (2\text{id} - u) = u^2 - 2u + \text{id} + 2u - u^2 = \text{id}$

13. Soit $x \in E$, si $x \in \text{Ker}(u - 2\text{id})$, alors $u(x) = 2x$, d'où $p(x) = (u - \text{id})^2(x) = (2 - 1)^2(x) = x$ question 7
Et si $x \in \text{Ker}(u - \text{id})^2$, alors $p(x) = (u - \text{id})^2(x) = 0$, ainsi p est le projecteur sur $\text{Ker}(u - 2\text{id})$ parallèlement à $\text{Ker}(u - \text{id})^2$.
D'autre part si $x \in \text{Ker}(u - 2\text{id})$, alors $q(x) = x - p(x) = 0$ et si $x \in \text{Ker}(u - \text{id})^2$, alors $q(x) = x - p(x) = x$, ainsi q est le projecteur sur $\text{Ker}(u - \text{id})^2$ parallèlement à $\text{Ker}(u - 2\text{id})$.

14. a/ Soit $x \in E$, alors $p(x) \in \text{Ker}(u - 2\text{id})$, donc $(u - 2\text{id})(p(x)) = 0$.

b/ D'après a) $u(p(x)) = 2p(x) \forall x \in E$, d'où par récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}; u^n \circ p = 2^n p$

c/ De b) $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{u^k}{k!} \circ p = \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k!} p$, se qui se traduit par : $\exp(u) \circ p = \exp(2) \cdot p$,
 $\beta = \exp(2)$.

15. On a $p = \text{id} \circ p = (p + q) \circ p = p^2 + q \circ p = p + q \circ p$, donc $q \circ p = 0$, de même $p \circ q = 0$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $k \geq 2$, alors $(u - \text{id})^k \circ q = (u - \text{id})^{k-2} \circ (u - \text{id})^2 \circ q = (u - \text{id})^{k-2} \circ p \circ q = 0$.

On peut en déduire que $\exp(\mathbf{u} - \text{id}) \circ \mathbf{q} = (\mathbf{u} - \text{id})^0 \circ \mathbf{q} + \frac{(\mathbf{u} - \text{id})^1}{1!} \circ \mathbf{q} + 0 = \mathbf{u} \circ \mathbf{q}$.
 D'autre part puisque, $\text{id} \circ (\mathbf{u} - \text{id}) = (\mathbf{u} - \text{id}) \circ \text{id}$, donc $\exp(\mathbf{u}) = \exp(\text{id}) \circ \exp(\mathbf{u} - \text{id})$,
 alors $\exp(\mathbf{u}) \circ \mathbf{q} = \exp(\text{id}) \circ \exp(\mathbf{u} - \text{id}) \circ \mathbf{q} = \exp(\text{id}) \circ \mathbf{u} \circ \mathbf{q} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} \circ \mathbf{q}$, on prend
 donc $\gamma = \mathbf{e}$.

16. On a $\exp(\mathbf{u}) = \exp(\mathbf{u}) \circ \text{id} = \exp(\mathbf{u}) \circ (\mathbf{p} + \mathbf{q}) = \exp(\mathbf{u}) \circ \mathbf{p} + \exp(\mathbf{u}) \circ \mathbf{q} = \mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{p} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} \circ \mathbf{q} = \mathbf{e}^2 \cdot (\mathbf{u} - \text{id})^2 + \mathbf{e} \cdot \mathbf{u} \circ (\mathbf{u} \circ (2\text{id} - \mathbf{u})) = -\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}^3 + (\mathbf{e}^2 + 2\mathbf{e}) \cdot \mathbf{u}^2 - 2\mathbf{e}^2 \cdot \mathbf{u} + \mathbf{e}^2 \cdot \text{id}$.

17. $d(\mathbf{x}, F) = \|\mathbf{x} - \mathbf{p}_F(\mathbf{x})\|$.

18. On a $\forall \mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} = \mathbf{p}_H(\mathbf{x}) + \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle}{\|\mathbf{n}\|^2} \cdot \mathbf{n}$, donc $d(\mathbf{x}, H) = \frac{|\langle \mathbf{x}, \mathbf{n} \rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$.

19. a/ $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\} = \text{Ker } \varphi$, où $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, φ
 $M \longmapsto \text{Tr}(M)$

est bien une forme linéaire non nulle, donc H est un hyperplan. On a

$$\begin{aligned} H^\perp &= \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \langle B, A \rangle = 0 \forall A \in H\} \\ &= \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}({}^t B A) = 0 \forall A \in H\} \end{aligned}$$

On remarque $I_n \in H^\perp$, et puisque $\dim \text{Vect } \{I_n\} = \dim H^\perp$, alors $H^\perp = \text{Vect } \{I_n\}$

b/ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $d(M, H) = \frac{|\langle I, M \rangle|}{\|I_n\|} = \frac{|\text{Tr}(M)|}{\sqrt{n}}$.

20. $d_\infty(\mathbf{x}, F) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \{\max\{|1-t|, 1\}\} = 1$, en effet

$$\max\{|1-t|, 1\} = \begin{cases} t-1 & \text{si } t \geq 2 \\ 1 & \text{si } t \in [0, 2] \\ 1-t & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

Donc si $t \geq 2$, alors $t-1 \geq 1$ et si $t \leq 0$, alors $1-t \geq 1$.

L'ensemble des vecteurs pour lesquels cette distance est atteinte est $\{(t, 0), t \in [0, 2]\}$. La distance est atteinte en une infinité de vecteurs, contrairement au cas euclidien.