Corrigé de math 2 centrale 2018 MP

Prof : Lhouari lycée Al Khansa

$\boxed{I.Q_1.}$ H(U) est une partie de $C^2(U,IR)$ la fonction nulle y appartient.

Soit f et g deux éléments de H(U) et μ réel alors $\mu f + g$ est de classe C^2 et

$\Delta(\mu f + g) = 0$ d après la linéarité de des opérateurs dérivée ;donc $\mu f + g \in H(U)$

Donc H(U) est un sous espace vectoriel de $C^2(U,IR)$.

$\boxed{Q_2}$ soit f harmonique de classe C^3))

Alors : $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x^2_i}(x) = 0$. (d après le théorème de Cauchy Schwarz)donc $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est harmonique. Et par récurrence on montre que toutes les dérivées partielle de tout ordre de f sont dans H(U).

$\boxed{Q_3}$.Soit f un élément de H(U) tel que f^2 soit dans H(U) alors

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^2(x) = 2 \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} f(x)$$

Et : $$\frac{\partial^2 f^2}{\partial x^2_i}(x) = 2 \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2_i} f(x) + 2 (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i})^2$$

Donc : $\Delta f(x) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2_i} f(x) + 2\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i})^2$,donc f est dans H(U) si et seulement si $\sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial f(x)}{\partial x_i})^2 = 0$ si et seulement si pour tout i entre 1 et n $\frac{\partial f x)}{\partial x_i} = 0$ pour tout x de U

Or U est connexe par arcs donc f est constante.

Conclusion : soit f un élément de H(U) alors f^2 est dans H(U) si et seulement si f est constante .

$\boxed{Q_4}$. Soit $U = IR^2$ est $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ alors f est un élément de H(U) à vérifier) , Si $g = f$ alors $fg = f^2$ n est pas dans $H(U)$ car f n est pas constante.

$\boxed{\text{II A } Q_5}$. soit f un élément de $H(IR^2)$; $f(x,y) = u(x)v(y)$; u et v de classe C^2 sur IR

Alors : $\Delta f(x,y) = u''(x)v(y) + u(x)v''(y) = 0$ (1). or f non identiquement nulle donc il existe x_0, y_0 dans IR tels que $u(x_0)v(y_0) \neq 0$.

En reportant dans (1) $u''(x_0)v(y_0) + u(x_0)v''(y_0) = 0$ alors : $\frac{u''(x_0)}{u(y_0)} = -\frac{v''(y_0)}{v(x_0)} = \lambda$ convient.

$\boxed{Q_6}$.SI $\lambda > 0$ alors les solutions de $z'' + \lambda z = 0$ sont $z(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B.\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$: A et B constantes réelles.

Et de : $z'' - \lambda z = 0$ sont $z(y) = C\, e^{-\sqrt{\lambda}\, y} + De^{\sqrt{\lambda}\, y}$

Alors les fonctions harmonique à variables séparables sont celles de la forme :

$F(x,y) = (A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B.\sin(\sqrt{\lambda}\, x)) . (C\, e^{-\sqrt{\lambda}\, y} + De^{\sqrt{\lambda}\, y})$ * A B C et D réels

De même pour $\lambda < 0$ en remplaçant dans * $\sqrt{\lambda}$ par $\sqrt{-\lambda}$.

Pour $\lambda = 0$ ... $f(x,y) = (AX+B)(CY+D)$ ...

$\boxed{\text{IIB. } Q_7}$. G est composée de deux fonctions de classe C^2 donc g est de classe C^2 sur $IR^{+*}XIR$.

Q_8.on a :

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta))$$

Et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta) = -rsin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta)).$$

$\boxed{Q_9}$.

On a : $\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) =$

$$cos^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(rcos(\theta), rsin(\theta)) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(rcos(\theta), rsin(\theta)) +$$

$Sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big).$

Et

$\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta) =$

$-rcos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) - rsin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) +$

$r^2 sin^2(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) -$

$2r^2\sin(\theta)\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) +$

$r^2 cos^2(\theta)\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big).$

$\boxed{Q_{10}}$. D après Q_9 et Q_8 f est dans H(IR^2\{ (0,0)} si et seulement si

On a : $r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}(r,\theta) + r\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$(2)

$\boxed{Q_{11}}$.soit f comme dans l énoncé tel que g ne dépend pas de θ.alors (2) implique :

$r^2\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + r\ \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$ alors : $r\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0.$

Donc : $r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) + g(r,\theta) = a.$ donc $g(r,\theta) = \frac{ar+b}{r}$ μ constante indépendante de θ.

Donc $f(x,y) = f\big(rcos(\theta), rsin(\theta)\big) = g(r,\theta) = \frac{ar+b}{r}$ et alors $f(x,y) = \frac{ar+b}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Inversement si $f(x,y) = \frac{ar+b}{\sqrt{x^2+y^2}}$ alors f est harmonique de classe C^2 sur IR^{*+}XIR. Et g ne dépend pas de θ.

$\boxed{Q_{12}}$. Soit a ,b r_1 et r_2 tels que $0<r_1<r_2$ et $\ln(r_1) = a$ $\ln(r_2) = b$ et soit : $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ alors est harmonique sur IR^{+*}Xir et vérifie

$\Delta f(x) = 0$,f(x,y= = a si $||(x,y)|| = r_1$ et $f(x,y) = b$ si $||(x,y)|| = r_2$

$\boxed{Q_{13}}$. f est non identiquement nulle alors il existe $r > 0$ tel que $u(r)$ non nul

Alors pour tout θ on a $u(r)v(\theta+2\pi)=u(r)v(\theta)$ donc $v(\theta+2\pi)=v(\theta)$ et v est 2π périodique.

$\boxed{Q_{14}}$. D après la question Q_{10} on aura : $r^2u''(r)v(\theta)+u(r)v''(\theta)+ru'(r)v(\theta)=0$ (3) .or f non identiquement nulle dons il existe r_0 et θ_0 ; $u(r_0)v(\theta_0)$ non nul.

Donc : $r^2u''+ru'-\lambda u=0$ avec $\lambda=-\frac{v''(y_0)}{v(x_0)}$

De plus $r^2u''=-ru'+\lambda u$ et en remplaçant dans (3) on aura :

$v''+\lambda v=0$

.

$\boxed{Q_{15}}$. $\lambda=0$ alrors $v''=0$ donc $v(\theta)=a\theta+b$ a et b réels et v est périodique ssi $a=0$.

$\boxed{Q_{16}}$. l équation s écrit $r^2u''+ru'=0$ donc $ru'+u=a$ constante réelle

Donc : $u(r)=\frac{cr+d}{r}$ $r>0$ a et b des constantes réelles.

$\boxed{Q_{17}}$ pour $\lambda=0$ les fonctions harmoniques à variables séparable sont :

$f(r,\theta)=\frac{cr+d}{r}.(a\theta+b)$.

$\boxed{Q_{18}}$. (112)admet des solutions périodiques on nulles si et seulement si $\lambda>0$.

$\boxed{Q_{19}}$. En posant $z(r)=Z(\ln r)$ l équation (II.1) est équivalente à :

$Z''-\lambda Z=0$ dont les solutions sont :

$Z(t)=Ae^{-\sqrt{\lambda}t}+Be^{\sqrt{\lambda}t}$ donc $z(r)=Z(\ln r)=At^{-\sqrt{\lambda}}+Bt^{\sqrt{\lambda}}$. Si $\lambda>0$

$Z(t)=C\cos(\sqrt{-\lambda}t)+D\sin(\sqrt{-\lambda}t)$ donc $z(r)=C\cos(\sqrt{-\lambda}\ln(r)+D.\sin\sqrt{-\lambda}\ln(r)$.

Si $\lambda<0$.

$\boxed{Q_{20}}$. Les seuls solutions prolongeables par continuité en 0 sont :Z (r) = B$t^{\sqrt{\lambda}}$. Avec $\lambda > 0$.

$\boxed{Q_{21}}$ On a f est continue sur un fermé borné de IR^n (donc compact) et à valeurs dans IR donc f est bornée et atteint ses bornes donc il existe $x_0 \in \overline{U}$.
$f(x_0) = max_{x \in \overline{U}}\ f(x)$

$\boxed{Q_{22}}$. supposons que $\Delta f(x) > 0$ pour tout x de U et que $x_0 \in U$ ouvert donc $\varphi(t) = f(x_0 + te_i)$ et bient définie pour t voisin de zéro et atteint son max en 0.Or

$$\varphi(t) = f(x_0 + te_i) = f(x_0) + \sum_{i+1}^{n} t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial {x^2}_i} + o(te_i) \text{ d après Taylor.}$$

($f(x_0)$ est un max de ***f, donc c est un point critique)* et** $\Delta f(x) > 0$ donc il existe i tel que

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial {x^2}_i} \neq 0 \text{ donc il existe } t > 0 : \varphi(t) > f(x_0) = \varphi(0) \text{ ce qui est absurde.}$$

Donc $x_0 \in \overline{U} \setminus U = \partial U$.

$\boxed{II.B.Q_{23}}$. pour $\epsilon>0$ soit $g_\epsilon(x) = f(x) + \epsilon||x||^2$.

F et x → $||x||^2$ sont continues sur $\overline{U}$ et de classe C^2 sur U donc g_ϵ est continue sur $\overline{U}$

Et de classe C^2 sur U.et pour tout x de U on a :

$$\Delta g_\varepsilon(x) = \Delta f(x) + \varepsilon\Delta||x||^2\ \Delta f(x) + 2\,\varepsilon n > 0$$

$\boxed{Q_{24}}$. On a g_ϵ vérifie les hypothèses de III .A donc :

Pour tout x de U on a : $g_{\epsilon(x)} < sup_{y \in \partial U}\ g_\epsilon(y)$ pour tout $\epsilon > 0$

Donc en faisant tendre € vers 0 on aura :

$$\forall x \in U\ f(x) \leq sup_{y \in \partial U} f(y).$$

$\boxed{Q_{25}}$. Soit f_1 et f_2 comme dans l énoncé et $g = f_1 - f_2$ alors g et – g vérifient les hypothèses de III.B donc : $\forall x \in U$: $g(x) \leq sup_{y\in\partial U}\, g(y) = 0$; - $g(x) \leq sup_{y\in\partial U}\, g(y) = 0$

Donc $g(x) = 0 : \forall x \in \bar{U}$. donc $f_1 = f_2$.

IV onctions harmoniques et fonctions développables en séries entières

$\boxed{Q_{26}}$. *Soit $y \in]-1,1[$ et $r < \sqrt{1-y}$ pour tout $x \in [-r,r]$ n entier soit*

$h_n(x) = f_n(x,y) = a_n(x+iy)^n$ .alors f_n est de classe C^1 sur IR^2 donc sur $D(0,R)$

donc h_n aussi et $h'_n(x) = \frac{\partial f_n}{\partial x}(x,y) = na_n(x+iy)^{n-1}$ .et sup $|h'_n(x)| < n|a_n|r^{n-1}$

et la série de terme général $n\, a_n r^{n-1}$ converge donc d après le théorème de dérivation sous le signe somme f admet une dérivée partielle par rapport à x de classe C^1

et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n\,(x+iy)^{n-1}$ *de meme*

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} ina_n\,(x+iy)^{n-1}$

Donc f est de classe C^1 sur $D(0,R)$et que ses dérivées partielles dont développables en séries entières . par récurrence f est infiniment différentiable sur $D(0,R)$.

$\boxed{Q_{27}}$. D après Q_{26} on a : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = i\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ alors si $f(x,y) = u(x,y) + i\,v(x,y)$

Alors : $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = i(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y))$ donc : $\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$

Et : $\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$ alors : $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$ et : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$

Donc : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ donc u est harmonique sur $D(0,R)$ de même pour v.

$\boxed{Q_{28}}$. F ne s annule pas sur $D(0,R)$ donc 1 /Ff est de classe C^1 sur $D(0,R)$

Et $\frac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{f^2} = -i\,\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{f^2} = i\,\frac{\partial(\frac{1}{f})}{\partial x}$ donc 1/f est développable en séries entières sur D(O,R).

$\boxed{\text{Q29}}$.Montrons que uv est harmonique sur D(O,R)

On a : $\frac{\partial^2 uv}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 uv}{\partial y^2} = v(:\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + u(:\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) = 0$ car u et v sont harmoniques

Donc uv est harmonique.

$\boxed{\text{IV.C Q30}}$. G de classe C^2 donc h est de classe C^1 sur D(0,R) et

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial h}{\partial x} = 0$ car g est harmonique simple calcul.

Donc h est développable en séries entières.sur ***D(0,R).***

$\boxed{\text{Q31}}$.Soit $g \in H(D(O,R))$et $h(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) - i\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$,d après la question précédente h est développable en séries entières : $h(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x+iy)^n$

Soit :$H(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x+iy)^{n+1}$ alors H admet des différentielles partielles et on peut dériver sous le signe somme (IV.Q26) et on a

$\frac{\partial H}{\partial x}(x,y) = h(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) - i\,\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ et $\frac{\partial H}{\partial y}(x,y) = ih(x,y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) + i\,\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$

Donc $\frac{\partial Re(H)}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial Re(H)}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$

Donc $g(x,y) = H(x,y) + ct$ donc g est développable en séries entières.

$\boxed{\text{IV.D .Q32}}$.On a f est développable en séries entières $f(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(x+iy)^n$ donc

$F(rcos(\theta), rsin(\theta)) = \sum_{n=0}^{+\infty} nr^n\ e^{in\theta}$

Alors : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\,(rcos(t), rsin(t))dt =: \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\ e^{int}\,dt$

$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{+\infty} e^{int}\, dt$

(convergence uniforme)

$= a_0$

$= f(0)$.

$\boxed{Q_{33}}$.soit $g \in H(D(O,R)$ alors il existe H développable en séries entières tel que $g = Re(H)$

Alors $g(0) = re(H(0)) = Re(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H\left(rcos(t), rsin(t)\right)dt$.

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(H\left(rcos(t), rsin(t)\right)dt$.

1. $= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(rcos(t), rsin(t)\right)dt$. $R \in]0,R[$

$\boxed{Q_{34}}$. Pour tout $r \in]0,R[$ On a $|g(0)| = |\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g\left(rcos(t), rsin(t)\right)dt|$
$\leq sup_{t\in IR}|g\left(rcos(t), rsin(t)\right)| \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = sup_{t\in IR}|g\left(rcos(t), rsin(t)\right)|$

$\boxed{Q_{35}}$. On utilise Q_{33} et Q_{34}

$\boxed{Q_{36}}$. Si $|f|$ admet un maximum en 0 alors d après Q_{34} elle est constante sur D(O,R)

Or f est développable en séries entières donc f est constante sur D(O,R).

$\boxed{Q_{37}}$.*Soit P un polynôme non constant à coefficients dans C ,supposons que P ne s annule pas sur C et soit $g = 1/P$. d après Q_{28} g est développable en séries entières*

G est continue et a pour limite zéro en +00. Donc g est borné sur C donc constante.

(théorème de Liouville hors programme)

Donc P est constant absurde donc P admet au moins une racine dans C.

V Résolution du problème de Dirichlet

$\boxed{Q_{38}}$. **On a:** $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z} = \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}} = (1+z)\sum_{n=0}^{+\infty} z^n e^{-int}$ (car $|ze^{it}| = |z| < 1$)

$=1 + 2.\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} z^n$

Donc : z→ : $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ est développable n séries entières et on a :

: $\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}$ = 1 +.$\sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n$.

Pour tout $|z| < 1$ h(t).P(t,z) est développable en séries entières .et en peut intervertir l intégrale et la somme ; donc g est développable en séries entières sur D(0,1) donc harmonique.

$\boxed{Q_{39}}$. Pour $|z|<1$ on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t,z)dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re(1+.\sum_{n=1}^{+\infty} 2e^{-int} z^n)$dt = 1 . (intervention de l intégrale et somme et $\int_0^{2\pi} e^{int}dt = 0$ si $n \neq 0$)

$\boxed{Q_{40}}$.propriété des fonctions périodiques

$\boxed{Q_{41}}$. Multiplier et le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur.

$\boxed{Q_{42}}$.on a pour tout $|z|<1$ t→ P(t,z) est continue et borée sur [$\varphi + \delta, 2\pi + \varphi - \delta$] et

P(t , z) → 0 lorsque z→ $e^{i\varphi}$ donc $\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi\pi-\delta} P(t,z)dt$ → 0 lorsque z→ $e^{i\varphi}$.

$\boxed{Q_{43}}$.on a : $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(t\,,z)dt$ =: $\frac{1}{2\pi}\int_{0\varphi}^{\varphi+2\pi} P(t\,,z)dt$ = 1

Donc : $|g(z) - h(\varphi)|$ =: $\frac{1}{2\pi}|\int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} P(t\,,z)(h(t) - h(\varphi)dt|$

$\leq \frac{1}{2\pi}($
$\int_{\varphi}^{\varphi+\delta} P(t\,,z)(h(t) - h(\varphi)dt| + |\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} P(t\,,z)(h(t) - h(\varphi)dt|$
$+ |\int_{\varphi+2\pi-\delta}^{\varphi+2\pi} P(t\,,z)(h(t) - h(\varphi)dt|)$

$\leq \varepsilon/2 + | + |\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi-\delta} P(t\,,z)(h(t) - h(\varphi)dt + \frac{\varepsilon}{2}$ pour un bon choix de $\boldsymbol{\delta}$.

Donc : $|g(z) - h(\varphi)| \leq \frac{sup|h(t)|}{\pi}\int_{\varphi+\delta}^{\varphi+2\pi\pi-\delta} P(t,z)dt + \varepsilon$.

$\boxed{Q_{44}}$.d après Q_{42} et Q_{43} on a : $|g(z) - h(\varphi)| \to 0$ lorsque $z \to e^{i\varphi}$ donc g se prolonge en une onction continue sur $\overline{D(O,1)}$ en posant : g(cos(t),sin(t))= h(t) le prolongement par continuité de g sur $\overline{D(O,1)}$. g ainsi définie est solution ddu problème de Dirichlet si deçus.et on a unicité d après Q_{25}..