

# Mathématiques

Durée : 3 heures.- Coefficient : 3

*Les exercices sont indépendants.  
La calculatrice personnelle est interdite.*

## Exercice 1

Soit  $E$  l'espace vectoriel des matrices réelles  $2 \times 2$  avec la base :

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (e_1, e_2, e_3, e_4).$$

On notera par une matrice unicolonne les composantes d'un vecteur de  $E$  dans une base.

Ainsi la matrice unicolonne des composantes de  $v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $V = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ .

Soit  $f$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$  et  $g$  l'endomorphisme de

$E$  défini par  $g\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ b & a \end{pmatrix}$ .

### Partie A

1. Donner la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

2. Soit la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer son polynôme caractéristique  $P_A$ .

3. Montrer que  $A$  admet deux valeurs propres distinctes  $\lambda$  et  $\mu$  à calculer. (Choisir  $\lambda < \mu$ ).  
Quelles sont les multiplicités de  $\lambda$  et  $\mu$  comme racines de  $P_A$  ?

4. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base  $\mathcal{B}$  des vecteurs de base du sous espace propre  $\mathcal{E}_\lambda$ . On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer les matrices unicolonnes des composantes dans la base  $\mathcal{B}$  des vecteurs de base du sous espace propre  $\mathcal{E}_\mu$ . On choisira des matrices dont la première composante non nulle est 1.

6. Peut-on déduire de ce qui précède que  $A$  est diagonalisable ?

7. En déduire une matrice inversible  $P$  et une matrice diagonale  $D$  telles que  $A = PDP^{-1}$ .

[ Ne pas calculer  $P^{-1}$  ]

## Partie B

1. Donner la matrice de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

2. Soit la matrice  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer son polynôme caractéristique  $P_{\mathbf{B}}$ .

3. Montrer que  $\mathbf{B}$  admet trois valeurs propres distinctes, 0 et  $\alpha$ ,  $\beta$ . (Choisir  $\alpha < \beta$ )

Quelles sont les multiplicités de 0, de  $\alpha$  et de  $\beta$ , comme racines de  $P_{\mathbf{B}}$  ?

4. Déterminer la matrice unicolonne des composantes  $V_0$  dans la base  $\mathcal{B}$  d'un vecteur de base  $v_0$  du sous espace propre  $\mathcal{E}_0$ . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

5. Déterminer la matrice unicolonne des composantes  $V_{\alpha}$  dans la base  $\mathcal{B}$  d'un vecteur de base  $v_{\alpha}$  du sous espace propre  $\mathcal{E}_{\alpha}$ . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

6. Déterminer la matrice unicolonne des composantes  $V_{\beta}$  dans la base  $\mathcal{B}$  d'un vecteur de base  $v_{\beta}$  du sous espace propre  $\mathcal{E}_{\beta}$ . On choisira celle dont la première composante non nulle est 1.

7. Peut-on déduire de ce qui précède que  $\mathbf{B}$  est diagonalisable ? Justifier.

8. Soit la famille de vecteurs  $\mathcal{B}_2 = (v_0, e_1, v_{\alpha}, v_{\beta})$ . Montrer que  $\mathcal{B}_2$  est une base de  $\mathcal{E}$ .

9. Calculer les composantes des images par  $g$  des vecteurs de  $\mathcal{B}_2$ , d'abord dans la base  $\mathcal{B}$ , puis dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

10. En déduire l'expression de la matrice  $\mathbf{C}$  de  $g$  dans la base  $\mathcal{B}_2$ .

## Exercice 2

On considère les fonctions  $2\pi$ -périodiques,  $f$  et  $g$  définies par :

$$\forall x \in ]-\pi, \pi], f(x) = |x| \text{ et } g(x) = x.$$

1.a. Préciser la parité de  $f$ ;

1.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction  $f$ . On note  $Sf$  la somme de la série de Fourier.

2.a. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

2.b. En calculant  $Sf(0)$ , trouver la somme de la série numérique :  $T = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$ .

3. Soit  $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ . Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  non nuls tels que  $S = aS + bT$ .

4. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique  $S$ .

5. Appliquer la relation de Parseval à  $Sf$  et trouver la somme de la série numérique :

$$V = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}.$$

6.a. Soit  $U = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ . Montrer qu'il existe deux réels  $c$  et  $d$  non nuls tels que  $U = cU + dV$ .

6.b. À l'aide du résultat de la question précédente, en déduire la somme de la série numérique  $U$ .

7.a. Préciser la parité de  $g$ .

7.b. Déterminer la série de Fourier de la fonction  $g$ . On note  $Sg$  la somme de la série de Fourier.

8. Étudier la convergence de la série de Fourier de la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}$ , en précisant le théorème utilisé et son énoncé.

9. En calculant  $Sg\left(\frac{\pi}{2}\right)$ , trouver la somme de la série numérique  $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}$ .

10. Appliquer la relation de Parseval à  $Sg$  et retrouver la somme de la série numérique :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

11. Montrer que  $\forall x \in [0, \pi[$ ,  $-2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(nx)}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}$ .

On considère la fonction  $2\pi$ -périodique,  $h$  définie par :

$$\forall x \in ]-\pi, 0], h(x) = 0 \text{ et } \forall x \in ]0, \pi], h(x) = x.$$

12. Exprimer  $h$  à l'aide de  $f$  et  $g$ .

13. En déduire sans aucun calcul la série de Fourier de  $h$ .

### Exercice 3

On considère l'équation différentielle, définie pour  $x \in ]0, +\infty[$ , de fonction inconnue  $y$  :

(E) :  $xy'(x) - y(x) = \text{Arctan}(x)$  et l'équation homogène associée (H)  $xy'(x) - y(x) = 0$ .

1. Déterminer la solution générale de (H).

2. Montrer que la résolution de (E) peut se ramener à calculer l'intégrale :

$$K(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\text{Arctan}(u)}{u^2} du \text{ pour } x \in ]0, +\infty[.$$

Justifier que cette intégrale est convergente.

3. Par une intégration par parties, exprimer  $K(x)$  à l'aide de l'intégrale d'une fraction rationnelle.

4. Déterminer trois réels  $\alpha, \beta, \gamma$  tels que :  $\forall u \in \mathbb{R}^*, F(u) = \frac{1}{u(u^2+1)} = \frac{\alpha}{u} + \frac{\beta u + \gamma}{u^2+1}$ .

5. En déduire le calcul de l'intégrale  $K(x)$ , puis la solution générale  $y$  de (E), en fonction d'une constante d'intégration  $C$ .

6. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$  existe et calculer cette limite.

### Exercice 4

Soit la courbe  $C$  de représentation paramétrique dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  :

$$\begin{cases} x(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \\ y(\alpha) = 1 - \cos \alpha \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}. \text{ On note } \mathbf{M}(\alpha) \text{ le point de paramètre } \alpha \text{ de } C.$$

