École nationale supérieure des Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes

Correction de l'Épreuve Spécifique 2004

Olivier HALGAND
olivier.halgand@ac-lyon.fr

PREMIER PROBLÈME

I. Résolution d'équations différentielles

1. Une primitive de $\mathrm{th} = \dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ sur $\mathbb{R}$ est $\ln|\mathrm{ch}| = \ln \mathrm{ch}$ et : $\mathrm{e}^{-\ln|ch|} = \frac{1}{\mathrm{ch}}$, donc :

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation différentielle } z' + z\ \mathrm{th}(t) = 0 \text{ sont } z : t \mapsto \frac{C}{\mathrm{ch}(t)},\ C \in \mathbb{R}.}$$

On a alors $z(0) = C$ donc

$$\boxed{\text{la solution de l'équation qui vérifie } z(0) = 1 \text{ est } z_1 : t \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.}$$

2. On utilise la méthode de « la variation de la constante », en posant :

$$z(t) = \frac{C(t)}{\mathrm{ch}(t)}, \quad \text{d'où :} \quad z'(t) = \frac{C'(t)}{\mathrm{ch}(t)} - \frac{C(t)\ \mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)},$$

donc :

$$z'(t) + z(t)\,(t) = \frac{C'(t)}{\mathrm{ch}(t)}.$$

Ainsi, z est solution de l'équation si, et seulement si : $\dfrac{C'(t)}{\mathrm{ch}(t)} = t\,\mathrm{th}(t)$, c'est-à-dire si, et seulement si : $C'(t) = t\,\mathrm{sh}(t)$. Pour déterminer C, on effectue une intégration par parties :

$$C(t) = \int t\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{ch}(t) - \int \mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t = t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t),$$

d'où :

$$z(t) = \frac{t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}(t)} = t - \mathrm{th}(t).$$

$$\boxed{\text{les solutions de l'équation } z' + z\ \mathrm{th}(t) = t\,\mathrm{th}(t) \text{ sont } z : t \mapsto \frac{C}{\mathrm{ch}(t)} + t - \mathrm{th}(t),\ C \in \mathbb{R}.}$$

On a alors $z(0) = C$ donc

$$\boxed{\text{la solution de l'équation qui vérifie } z(0) = 0 \text{ est } z_2 : t \mapsto t - \mathrm{th}(t).}$$

II. Étude d'un arc paramétré

3. La fonction th étant impaire et la fonction ch étant paire, on en déduit que x est impaire et y est paire, donc

$$\boxed{\text{l'axe des ordonnées } (Oy) \text{ est un axe de symétrie de } (\Gamma).}$$

4. On a $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, donc

$$\boxed{\text{l'axe des abscisses } (Ox) \text{ et } (\Gamma) \text{ sont asymptotes.}}$$

5. Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad x'(t) = 1 - \big(1 - \operatorname{th}^2(t)\big) = \operatorname{th}^2(t) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad y'(t) = -\frac{\operatorname{sh}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)},$$

d'où le tableau :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$+$	
x	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$y'(t)$		$+$	0	$-$	

6. Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel t :

$$\begin{cases} x''(t) = 2\big(1 - \operatorname{th}^2(t)\big)\operatorname{th}(t) = 2\big(\operatorname{th}(t) - \operatorname{th}^3(t)\big) \\[2mm] y''(t) = -\dfrac{\operatorname{ch}^3(t) - 2\operatorname{sh}^2(t)\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^4(t)} = \dfrac{2\operatorname{sh}^2(t) - \operatorname{ch}^2(t)}{\operatorname{ch}^3(t)} \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} x''(0) = 0 \\ y''(0) = -1 \end{cases} \quad ;$$

$$\begin{cases} x'''(t) = 2\big(1 - \operatorname{th}^2(t)\big)\big(1 - 3\operatorname{th}^2(t)\big) \\[2mm] y''(t) = \dots \end{cases} \quad \text{donc :} \quad \begin{cases} x'''(0) = 2 \\ y''(0) = \dots \end{cases} .$$

Les entiers caractéristiques sont donc 2 et 3, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{le point } A(0,1) \text{ est un point de rebroussement de première espère.}}$$

7. *a)* On a l'identité : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}^2(t) - \operatorname{sh}^2(t) = 1$, d'où, puisque la fonction ch est positive :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{ch}(t) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2(t)}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\text{si } \operatorname{sh}(t) = 1, \text{ alors } \operatorname{ch}(t) = \sqrt{2} \text{ et } \operatorname{th}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}.}$$

De plus :

$$\mathrm{sh}(t) = 1 \iff \mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} = 2 \iff \left(\mathrm{e}^t\right)^2 - 2\,\mathrm{e}^t - 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré en e^t est : $\Delta = 8 = (2\sqrt{2})^2$, ce qui donne :

$$\mathrm{e}^t = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2} < 0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{e}^t = 1 + \sqrt{2} > 0.$$

Finalement, on obtient :

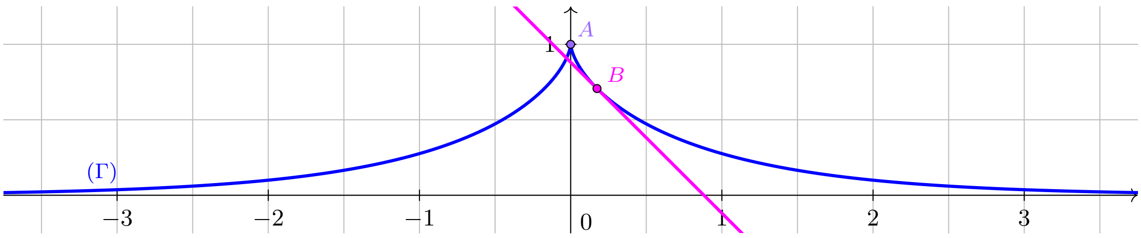
$$\boxed{\mathrm{sh}(t) = 1 \iff t = \ln(1 + \sqrt{2}).}$$

b) La tangente au point de paramètre $t \neq 0$ a pour coefficient directeur $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$. On doit donc avoir :

$$\frac{y'(t)}{x'(t)} = -1 \iff -\frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)} = -\frac{\mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^2(t)} \iff \mathrm{sh}(t) = 1.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{le point où la tangente à } (\Gamma) \text{ a pour coefficient directeur } -1 \text{ est } B\left(\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \\ \text{et une équation de cette tangente est : } y = -x + \ln(1+\sqrt{2}).\end{array}}$$

8. L'allure de la courbe est donc :



9. *a)* Pour $t \neq 0$, le coefficient directeur de la tangente à (Γ) au point $M(t)$ est : $\dfrac{y'(t)}{x'(t)} = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}(t)}$. Une équation de cette tangente est donc :

$$y = -\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\Big(x - x(t)\Big) + y(t) = -\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\Big(x - \big(t - \mathrm{th}(t)\big)\Big) + \frac{1}{\mathrm{ch}(t)},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{une équation de la tangente à } (\Gamma) \text{ au point } M(t) \text{ est : } y = -\frac{1}{\mathrm{sh}(t)}\,x + \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}.}$$

b) Le point $N(t)$ appartient à l'axe des abscisses donc : $y_N = 0$. De plus, il appartient aussi à la tangente au point $M(t)$ donc, d'après *9.a)* : $x_N = t$. On en déduit que :

$$\overrightarrow{MN} = \left(t - \big(t - \mathrm{th}(t)\big), 0 - \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right) = \left(\mathrm{th}(t), -\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right),$$

et donc :

$$MN^2 = \mathrm{th}^2(t) + \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)} = \frac{\mathrm{sh}^2(t) + 1}{\mathrm{ch}^2(t)} = 1,$$

d'où :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad MN = 1.}$$

III. Étude d'intégrales et de suites

10. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_1(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t)} = \int_0^x \frac{2\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}.$$

On effectue le changement de variable : $\mathrm{e}^t = u$, donc $t = \ln(u)$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$:

$$I_1(x) = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{\mathrm{e}^x} \frac{2}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\mathrm{Arctan}(u)\Big]_1^{\mathrm{e}^x},$$

d'où :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_1(x) = 2\,\mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2}.}$$

11. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_2(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2(t)} = \Big[\mathrm{th}(t)\Big]_0^x,$$

soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_2(x) = \mathrm{th}(x).}$$

12. *a)* Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{k+2}(x) = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\mathrm{ch}^2(t) - \mathrm{sh}^2(t)}{\mathrm{ch}^{k+2}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \mathrm{sh}(t)\cdot\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}^{-k-2}(t)\,\mathrm{d}t,$$

soit, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{k+2}(x) &= I_k(x) - \left(\left[\mathrm{sh}(t)\cdot\frac{\mathrm{ch}^{-k-1}(t)}{-k-1}\right]_0^x - \int_0^x \mathrm{ch}(t)\cdot\frac{\mathrm{ch}^{-k-1}(t)}{-k-1}\,\mathrm{d}t\right) \\ &= I_k(x) + \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} - \frac{1}{k+1}\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t \\ &= I_k(x) + \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} - \frac{1}{k+1}\,I_k(x), \end{aligned}$$

et donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{k+2}(x) = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)} + \frac{k}{k+1}\,I_k(x).}$$

b) Pour $k = 1$ puis $k = 2$, on obtient :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_3(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{2\,\mathrm{ch}^2(x)} + \mathrm{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad I_4(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{3\,\mathrm{ch}^3(x)} + \frac{2}{3}\,\mathrm{th}(x).}$$

13. *a)* Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction I_k est définie sur $\mathbb{R}$ et le changement de variable $u = -t$ permet d'écrire, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$I_k(-x) = \int_0^{-x} \frac{1}{\mathrm{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(-u)}\,(-\mathrm{d}u) = -\int_0^x \frac{1}{\mathrm{ch}^k(u)}\,\mathrm{d}u = -f_k(x),$$

donc :

$$\boxed{\text{la fonction } I_k \text{ est impaire.}}$$

b) Puisque la fonction ch est continue sur $\mathbb{R}$ (et ne s'annule pas), alors la fonction $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k}$ est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'intégration, I_k est la primitive de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k}$ qui s'annule en 0. En particulier

$$\boxed{I_k \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

c) Plus généralement, ch est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc il en est de même de $\dfrac{1}{\mathrm{ch}^k}$, et donc :

$$\boxed{I_k \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

14. D'après *13.b)*, on en déduit que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_k'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)}.}$$

En écrivant $I_k' = \mathrm{ch}^{-k}$, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_k''(x) = \frac{-k\ \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^{k+1}(x)},}$$

et :

$$I_k'''(x) = -k\,\frac{\mathrm{ch}(x)\ \mathrm{ch}^{k+1}(x) - \mathrm{sh}(x)\,(k+1)\,\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}^k(x)}{\mathrm{ch}^{2k+2}(x)} = -k\,\frac{\mathrm{ch}^2(x) - (k+1)\big(\mathrm{ch}^2(x) - 1\big)}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)},$$

soit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_k'''(x) = \frac{k^2}{\mathrm{ch}^k(x)} - \frac{k(k+1)}{\mathrm{ch}^{k+2}(x)}.}$$

15. La formule de Taylor-Young s'écrit :

$$I_k(x) \underset{0}{=} I_k(0) + I_k'(0)\,x + \frac{I_k''(0)}{2}\,x^2 + \frac{I_k'''(0)}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3),$$

donc, d'après *14.* :

$$\boxed{I_k(x) \underset{0}{=} x - \frac{k}{6}\,x^3 + \mathrm{o}(x^3).}$$

16. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $I_k'(x) = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$, donc

$$\boxed{I_k \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$$

17. *a)* Puisque I_k est croissante d'après *16.*, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = I_k(n) < I_k(n+1) = u_{n+1}$, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante.}}$$

b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire :

$$\mathrm{ch}(t)\,2\,\mathrm{e}^{-t} = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}\,2\,\mathrm{e}^{-t} = 1 + \mathrm{e}^{-2t} > 1,$$

donc, puisque la fonction ch est strictement positive :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad 2\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant \frac{1}{\mathrm{ch}(t)}.}$$

On en déduit donc que, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$0 < \frac{1}{\operatorname{ch}^k(t)} \leqslant 2^k \,\mathrm{e}^{-kt},$$

d'où, par croissance de l'intégrale et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant \int_0^n \frac{1}{\operatorname{ch}^k(t)}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n 2^k\,\mathrm{e}^{-kt}\,\mathrm{d}t = \frac{2^k}{-k}\Big[\mathrm{e}^{-kt}\Big]_0^n = \frac{2^k}{k}\Big(1-\mathrm{e}^{-kn}\Big) \leqslant \frac{2^k}{k}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée : d'après le théorème de la limite monotone :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge.}}$$

18. *a)* D'après *16.*, la fonction I_k est croissante : d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite en $+\infty$. De plus, d'après *17.b)*, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = \big(I_k(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. D'après la caractérisation séquentielle de la limite, on en déduit que

$$\boxed{\text{la fonction } I_k \text{ admet une limite finie en } +\infty, \text{ et donc } J_k \text{ existe.}}$$

b) D'après *10.* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_1(x) = 2\operatorname{Arctan}(\mathrm{e}^x) - \frac{\pi}{2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 2\,\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2},$$

donc :

$$\boxed{J_1 = \frac{\pi}{2}.}$$

c) D'après *11.* :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad I_2(x) = \operatorname{th}(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

donc :

$$\boxed{J_2 = 1.}$$

d) D'après *12.a)*, on sait que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad I_{k+2}(x) = \frac{k}{k+1}\,I_k(x) + \frac{\operatorname{sh}(x)}{(k+1)\operatorname{ch}^{k+1}(x)}.$$

Or, on sait que :

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}, \quad \text{donc :} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}^{k+1}(x)} = 0,$$

et il vient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad J_{k+2} = \frac{k}{k+1}\,J_k.$$

Donc, pour tout $k \geqslant 2$:

$$J_{2k} = \left(\prod_{j=2}^{k} \frac{2j-2}{2j-1}\right) J_2 = \frac{\left(\prod_{j=2}^{k} 2\right)\left(\prod_{j=2}^{k}(j-1)\right)}{\prod_{j=2}^{k}(2j-1)} \cdot \frac{\prod_{j=2}^{k}(2j-2)}{\prod_{j=2}^{k}(2j-2)}\,J_2 = \frac{\Big(2^{k-1}\,(k-1)!\Big)^2}{(2k-1)!}\,J_2,$$

donc :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad J_{2k} = \frac{2^{2k-2}\,\big((k-1)!\big)^2}{(2k-1)!}.}$$

Et de même pour $k \geqslant 1$:

$$J_{2k+1} = \left(\prod_{j=1}^{k} \frac{2j-1}{2j}\right) J_1 = \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k} 2\right)\left(\prod_{j=1}^{k} j\right)} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{k}(2j)}{\prod_{j=2}^{k}(2j)} J_1 = \frac{(2k)!}{\left(2^k\, k!\right)^2} J_1,$$

donc :

$$\boxed{\forall k \geqslant 2, \quad J_{2k+1} = \frac{(2k)!}{2^{2k}\,(k!)^2}\,\frac{\pi}{2}.}$$

DEUXIÈME PROBLÈME

IV. Étude de structures

1. *a)* On considère les matrices élémentaires :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$E = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} ;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = \left\{aE_{1,1} + bE_{2,2} + cE_{1,2} ;\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\} = Vect\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}\big),$$

ce qui signifie que

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

b) Puisque les matrices élémentaires forment la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on en déduit que la famille $\big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}\big)$ est libre, donc :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension 3 dont une base est } \big(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{1,2}\big).}$$

2. *a)* Soient $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} \in E$. Alors :

$$\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ac' + cb' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in E,$$

donc

$$\boxed{E \text{ est stable par produit.}}$$

b) Puisque $(E, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, alors $(E, +)$ est un groupe abélien. De plus, puisque $\times$ est une loi de composition interne dans E, il s'ensuit que

$$\boxed{(E, +, \times) \text{ est un sous-anneau de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$$

c) D'une part : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et, d'autre part : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cela nous permet d'affirmer que

$$\boxed{\text{l'anneau } (E, +, \times) \text{ n'est pas commutatif.}}$$

3. Démontrons que $(G,\times)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.

- Si $g=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}\in G$, alors $\det(g)=ab>0$ donc g est inversible : $G\subset\mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$.
- $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\in G$.
- Si $g=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}$ et $g'=\begin{pmatrix} a' & c' \\ 0 & b'\end{pmatrix}$ sont deux éléments quelconques de G, alors :

$$g\times g'=\begin{pmatrix} aa' & ac'+cb' \\ 0 & bb'\end{pmatrix}\in G.$$

- Enfin, si $g=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}\in G$, alors g est inversible et :

$$g^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & -c \\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{c}{ab} \\ 0 & \frac{1}{b}\end{pmatrix}\in G.$$

D'après une caractérisation des sous-groupes :

$$\boxed{(G,\times)\text{ est un sous-groupe de }\mathcal{GL}_2(\mathbb{R}).}$$

V. Puissances d'une matrice et suites

4. *a)* On suppose que $a\neq b$. On raisonne par récurrence.

- **Initialisation** : pour $p=1$, l'égalité est évidemment vérifiée.
- **Hérédité** : on suppose que, pour un entier $p\in\mathbb{N}^*$ donné, l'égalité est vérifiée. Alors :

$$A^{p+1}=A^p\times A=\begin{pmatrix} a^p & c\,\dfrac{a^p-b^p}{a-b} \\ 0 & b^p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{p+1} & \gamma_{p+1} \\ 0 & b^{p+1}\end{pmatrix},$$

où : $\alpha_{p+1}=a^pc+c\,\dfrac{a^p-b^p}{a-b}\,b=c\,\dfrac{a^{p+1}-a^pb+a^pb-b^{p+1}}{a-b}=c\,\dfrac{a^{p+1}-b^{p+1}}{a-b}$.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p\in\mathbb{N}^*,\quad A^p=\begin{pmatrix} a^p & c\,\dfrac{a^p-b^p}{a-b} \\ 0 & b^p\end{pmatrix}.}$$

b) On suppose que $a=b$. On calcule alors :

$$A=\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a\end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 2ac \\ 0 & a^2\end{pmatrix},\quad A^3=\begin{pmatrix} a^3 & 3a^2c \\ 0 & a^3\end{pmatrix}.$$

On conjecture que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $A^p=\begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p\end{pmatrix}$. On démontre cette conjecture par une récurrence.

- **Initialisation** : la propriété est initialisée pour $p\in\{1,2,3\}$.
- **Hérédité** : on suppose l'égalité vérifiée pour un entier $p\in\mathbb{N}^*$ donné. Alors :

$$A^{p+1}=A^p\times A=\begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{p+1} & a^pc+pa^{p-1}c\,a \\ 0 & a^{p+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{p+1} & (p+1)a^pc \\ 0 & a^{p+1}\end{pmatrix}.$$

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence :

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix}.}$$

5. a) L'inégalité de Taylor-Lagrange s'énonce ainsi : soit φ une fonction de $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I telle que $\left|\varphi^{(n+1)}\right|$ soit majorée sur I. Alors, pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\boxed{\left|\varphi(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leqslant \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{x\in I}\left|\varphi^{(n+1)}(x)\right|.}$$

b) La fonction exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exp^{(n)} = \exp$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exp est bornée sur le segment I d'extrémités 0 et x ; on peut donc appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à exp avec $a = 0$ et $b = x$, ce qui donne :

$$\left|\mathrm{e}^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t\in I}\left|\mathrm{e}^t\right|,$$

soit :

$$\left|\mathrm{e}^x - \varphi_n(x)\right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max\left(1, \mathrm{e}^x\right).$$

Or, si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{|x|^n}{n!}$ alors :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui implique qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ 0 \leqslant \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{soit :} \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{u_n}{2}.$$

Par une récurrence immédiate, on en déduit alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \ \Rightarrow\ 0 \leqslant u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-n_0} = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) = 0$. On en déduit donc que

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \text{ la suite } \big(\varphi_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \mathrm{e}^x.}$$

c) On suppose que $a \neq b$. D'après *4.a)* on a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & c\,\dfrac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & b^p \end{pmatrix},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^p}{p!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{c}{p!}\,\frac{a^p - b^p}{a-b} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{b^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n(a) & \dfrac{c}{a-b}\big(\varphi_n(a) - \varphi_n(b)\big) \\ 0 & \varphi_n(b) \end{pmatrix},$$

d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \varphi_n(a), \quad \beta_n = \varphi_n(b) \quad \text{et} \quad \gamma_n = \frac{c}{a-b}\big(\varphi_n(a) - \varphi_n(b)\big).}$$

Donc, d'après *5.b)*

$$\boxed{\text{les suites } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}, (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent respectivement vers } \mathrm{e}^a, \mathrm{e}^b \text{ et } \frac{c}{a-b}\left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b\right).}$$

d) On suppose que $a = b$. D'après *4.b)* on a alors :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p = \begin{pmatrix} a^p & pa^{p-1}c \\ 0 & a^p \end{pmatrix},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{p!} A^p = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^p}{p!} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{pa^{p-1}c}{p!} \\ 0 & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a^p}{p!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_n(a) & c \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^{p-1}}{(p-1)!} \\ 0 & \varphi_n(a) \end{pmatrix},$$

d'où, avec un changement d'indice :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n = \beta_n = \varphi_n(a) \quad \text{et} \quad \gamma_n = c\,\varphi_{n-1}(a).}$$

Donc, d'après *5.b)*

$$\boxed{\text{les suites } (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent respectivement vers } \mathrm{e}^a,\ \mathrm{e}^a \text{ et } c\,\mathrm{e}^a.}$$

6. *a)* D'après *5.d)* : $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc :

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas linéaire.}}$$

b) Soient $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de E telles que $f(A_1) = f(A_2)$. Alors, d'après *4.c)* et *4.d)*, on a :

$$\mathrm{e}^{a_1} = \mathrm{e}^{a_2} \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{b_1} = \mathrm{e}^{b_2}, \quad \text{donc :} \quad a_1 = a_2 \quad \text{et} \quad b_1 = b_2.$$

De plus :

- si $a_1 = b_1$ (c'est-à-dire si $a_2 = a_1 = b_1 = b_2$), alors : $c_1\,\mathrm{e}^{a_1} = c_2\,\mathrm{e}^{a_2}$, donc $c_1 = c_1$;
- si $a_1 \neq b_1$ (c'est-à-dire si $a_2 = a_1 \neq b_1 = b_2$), alors : $\dfrac{c_1}{a_1 - b_1}(\mathrm{e}^{a_1} - \mathrm{e}^{b_1}) = \dfrac{c_2}{a_2 - b_2}(\mathrm{e}^{a_2} - \mathrm{e}^{b_2})$, ce qui implique encore que $c_1 = c_2$.

Ainsi, on a $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ et $c_1 = c_2$, c'est-à-dire $A_1 = A_2$. Donc

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ est injective.}}$$

c) D'après *4.c)* et *4.d)*, on a $\alpha = \mathrm{e}^a$, donc la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent par f, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{l'application } f \text{ n'est pas surjective.}}$$

d) On utilise encore les résultats de *4.c)* et *4.d)*.

- Si $a \neq b$, alors $\alpha = \mathrm{e}^a \neq \mathrm{e}^b = \beta$ et $\gamma = \dfrac{c}{a-b}(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b)$. Donc, les couples (α, β) décrivent l'ensemble $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \setminus \Big\{(m,m)\ ;\ m \in \mathbb{R}_+^*\Big\}$, et les réels γ décrivent $\mathbb{R}$.
- Si $a = b$, alors $\alpha = \beta = \mathrm{e}^a$ et $\gamma = c\,\mathrm{e}^a$. Les couples (α, β) décrivent alors l'ensemble $\Big\{(m,m)\ ;\ m \in \mathbb{R}_+^*\Big\}$, et les réels γ décrivent encore $\mathbb{R}$.

Finalement :

$$\boxed{Im(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \ ; \ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \right\}.}$$

7. *a)* • Supposons que $a \neq b$. On a alors :

$$f(A) - I = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a - 1 & \frac{c}{a-b} \left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b \right) \\ 0 & \mathrm{e}^b - 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left(f(A) - I \right)^p = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^a - 1)^p & \lambda_p \\ 0 & (\mathrm{e}^b - 1)^p \end{pmatrix},$$

où, d'après *4.a)* :

$$\lambda_p = \frac{c}{a-b} \left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b \right) \frac{(\mathrm{e}^a - 1)^p - (\mathrm{e}^b - 1)^p}{(\mathrm{e}^a - 1) - (\mathrm{e}^b - 1)} = \frac{c}{a-b} \left((\mathrm{e}^a - 1)^p - (\mathrm{e}^b - 1)^p \right).$$

On obtient donc, par linéarité :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \psi_n(\mathrm{e}^a - 1), \quad b_n = \phi_n(\mathrm{e}^b - 1) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{c}{a-b} \left(\psi_n(\mathrm{e}^a - 1) - \psi_n(\mathrm{e}^b - 1) \right).}$$

• Supposons que $a = b$. On a alors :

$$f(A) - I = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a - 1 & c\, \mathrm{e}^a \\ 0 & \mathrm{e}^a - 1 \end{pmatrix},$$

donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left(f(A) - I \right)^p = \begin{pmatrix} (\mathrm{e}^a - 1)^p & \mu_p \\ 0 & (\mathrm{e}^a - 1)^p \end{pmatrix},$$

où, d'après *4.b)* :

$$\mu_p = p\, (\mathrm{e}^a - 1)^{p-1} c\, \mathrm{e}^a.$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = \psi_n'(x),$$

donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = b_n = \psi_n(\mathrm{e}^a - 1) \quad \text{et} \quad c_n = c\, \mathrm{e}^a\ \psi_n'(\mathrm{e}^a - 1).}$$

b) La fonction $\Lambda : x \mapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ et, pour tout $x > -1$:

$$\Lambda'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}, \quad \Lambda''(x) = -(1+x)^{-2}, \quad \Lambda'''(x) = 2(1+x)^{-3},$$

d'où, par une récurrence immédiate :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \Lambda^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)!(1+x)^{-k} \quad \text{et} \quad \Lambda^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange avec $a = 0$ et $b = x \in]0, 1[$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \ln(1+x) - \left(\ln(1) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!} x^k \right) \right| \leqslant \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [0,x]} \left| (-1)^n n!\, (1+t)^{-n-1} \right|,$$

soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \ln(1+x) - \psi_n(x) \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} n! = \frac{1}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On en déduit donc que

$$\boxed{\text{pour tout } x \in]0, 1[, \text{ la suite } \left(\psi_n(x) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \ln(1+x).}$$

c) Puisque $a \in]0, \ln 2[$, alors $\mathrm{e}^a - 1 \in]0,1[$ (et de même pour b).

• Supposons que $a \neq b$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\ln\Big(1 + (\mathrm{e}^a - 1)\Big) = a$; de même, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers b. Par opérations sur les limites, la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers

$$\frac{c}{a-b}\,(a-b) = c.$$

• Supposons que $a = b$. Alors, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers a. De plus, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\varphi_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} (-x)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-x)^k = \frac{1-(-x)^n}{1-(-x)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+x}.$$

Donc la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers : $c\,\mathrm{e}^a\,\dfrac{1}{1+(\mathrm{e}^a - 1)} = c$.

Dans tous les cas,

$$\boxed{\text{les suites } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*},\ (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ et } (c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ convergent respectivement vers } a,\ b \text{ et } c.}$$