

CCP PSI 2000 math 1: corrigé

PARTIE I

I.1.1.1 (E) s'écrit $y'' = 0$ d'où $S(E) = \{x \mid ax + b/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $S^0(E) = \{0\}$.

I.1.2.1 (E) s'écrit $y'' - w^2 y = 0$ d'où $S(E) = \{x \mid ae^{ux} + be^{-ux}/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$y = ae^{ux} + be^{-ux}$ appartient à $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} a + b = 0 \\ ae^{up} + e^{-up} = 0 \end{cases}$ système de déterminant non nul car $w \neq 0$.

La seule solution est donc la solution nulle : $S^0(E) = \{0\}$.

I.1.2.2 (E) s'écrit $y'' + w^2 y = 0$ d'où $S(E) = \{x \mid a \cos ux + b \sin ux/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.

$y = a \cos ux + b \sin ux$ appartient à $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} a = 0 \\ a \cos up + b \sin up = 0 \end{cases}$.

Cas 1: $w \neq 0$ alors $S^0(E) = \{x \mid b \sin ux/b \in \mathbb{R}\}$.

Cas 2: $w = 0$ alors $S^0(E) = \{0\}$.

I.2.2.1 (E) s'écrit $y'' = \cos x$ qui donne $S(E) = \{x \mid -\cos x + ax + b/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Une telle solution

est dans $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ ap + b + 1 = 0 \end{cases}$. D'où $S^0(E) = \left\{x \mid -\cos x - \frac{2}{p}x + 1\right\}$.

I.2.1.2 (E) s'écrit $y'' = \sin nx$ qui donne $S(E) = \left\{x \mid -\frac{1}{n^2} + ax + b/(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Une telle solution est

dans $S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b = 0 \\ ap + b = 0 \end{cases}$. D'où $S^0(E) = \left\{x \mid -\frac{1}{n^2} \sin nx\right\}$.

I.2.2.1 (E) s'écrit $y'' = |\cos x|$.

Sur $[0, p/2]$ $y'' = \cos x \quad \hat{=} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad y = ax + b - \cos x$

$y'' = \cos x \quad \hat{=} \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad y = ax + b - \cos x$.

Sur $[p/2, p]$ $y'' = -\cos x \quad \hat{=} \quad (c,d) \in \mathbb{R}^2 \quad y = cx + d + \cos x$.

Une solution sur $[0, p]$ doit être solution sur $[0, p/2]$ et sur $[p/2, p]$ donc vérifie

$$(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad \forall x \in [0, p/2], y(x) = ax + b - \cos x$$

$$\forall x \in [p/2, p], y(x) = cx + d + \cos x.$$

De plus une telle fonction doit être définie de manière unique en $p/2$, continue et dérivable en $p/2$, ce qui suffira à la rendre C^2 sur $[0, p]$ et solution de (E) (car la dérivée seconde sera $x \mapsto |\cos x|$ continue en $p/2$).

D'où les conditions nécessaires et suffisantes $\begin{cases} a \frac{p}{2} + b = c \frac{p}{2} + d & (\text{continuité}) \\ a + 1 = c - 1 & (\text{dérivabilité}) \end{cases}$

d'où l'on tire: $\begin{cases} c = a + 2 \\ d = (a - c) \frac{p}{2} + b = -p + b \end{cases}$

Conclusion $S(E) = \left\{f : [0, p] \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{cases} \forall x \in [0, p/2], f(x) = ax + b - \cos x \\ \forall x \in [p/2, p], f(x) = (a + 2)x - p + b + \cos x \end{cases}\right\}$.

I.2.2.2 $f \in S^0(E)$ ssi $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ (a + 2)p - p + b - 1 = 0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} b = 1 \\ a = -1 \end{cases}$, ce qui fournit une unique solution.

D'où $S^0(E) = \left\{F : [0, p] \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{cases} \forall x \in [0, p/2], f(x) = -x + 1 - \cos x \\ \forall x \in [p/2, p], f(x) = x - p + 1 + \cos x \end{cases}\right\}$.

I.3 (E) s'écrit $y'' = f(x)$ qui se résout en $y' = \int_0^x f(t) dt + A$ puis $y = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt + Ax + B$.

La condition $y \in S^0(E)$ se traduit par $\begin{cases} B = 0 \\ \int_0^p \left(\int_0^t f(u) du \right) dt + Ap = 0 \end{cases}$ ce qui fournit une unique solution

D'où $S^0(E) = \left\{ F_1 : [0, p] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt + \frac{x}{p} \int_0^p \left(\int_0^t f(u) du \right) dt \right\}$.

I.4 D'une part j est bien une application de $C^0([0, p]; \mathbb{R})$ dans lui-même.

D'autre part si $l \in \mathbb{R}$ et $f, g \in C^0([0, 2p]; \mathbb{R})$ alors l'application $h = lj(f) + j(g)$ vérifie

$h'' = lj(f)'' + j(g)'' = lf + g$, $h(0) = lj(f)(0) + j(g)(0) = 0$, et de même $h(p) = 0$. L'unicité obtenue au **I.3** permet d'identifier $h = j(lf + g)$, ce qui établit la linéarité de j .

I.5 $f \in \ker j \iff j(f) = 0 \iff \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt = 0 \iff f = 0$. Ce qui établit l'injectivité de j .

La fonction $x \mapsto 1$ de $C^0([0, p]; \mathbb{R})$ n'a pas d'antécédent par j car elle ne s'annule pas en 0.

Donc j n'est pas surjective.

I.6 $j(f) = lf$ donne $f = lf''$ en dérivant deux fois. Or 0 n'est pas valeur propre d'après la

question précédente. D'où $f'' - \frac{1}{l}f = 0$ (avec toujours $f(0) = f(p) = 0$) ce qui nous ramène à la

question **I.1.2.2** Pour obtenir des solutions non nulles le seul cas est $-\frac{1}{l} = n^2$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ (ou $\mathbb{N}^*$) auquel cas le sous-espace propre associé est $\{x \mapsto b \sin nx / b \in \mathbb{R}\}$.

Conclusion : $\text{Sp}(j) = \left\{ -\frac{1}{n^2} / n \in \mathbb{N}^* \right\}$ et $E_{-\frac{1}{n^2}} = \{x \mapsto b \sin nx / b \in \mathbb{R}\}$.

I.7.1

I.7.2 $T_x = \{(t, u) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq t \leq x \text{ et } t \leq u \leq x\}$ donc par Fubini

$$\iint_{T_x} f(t) dt du = \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du = \int_0^x \left(\int_t^x f(t) du \right) dt = \int_0^x (x - t) f(t) dt.$$

I.7.3.1 $F_1 = j(f)$ s'exprime par la formule de **I.3** :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \int_0^x \left(\int_0^u f(t) dt \right) du - \frac{x}{p} \int_0^p \left(\int_0^u f(t) dt \right) du \\ &= \int_0^x (x - t) f(t) dt - \frac{x}{p} \int_0^p (p - t) f(t) dt \end{aligned}$$

(autrement dit $b = -\frac{1}{p}$).

I.7.3.2 $F_1(x) = \int_0^x (x - t) f(t) dt - \frac{x}{p} \int_0^p (p - t) f(t) dt - \frac{p}{p} \int_0^p (p - t) f(t) dt$ (Chasles)

soit $F_1(x) = \frac{1}{p} \left(\int_0^x f(t)(p - x) dt + \int_x^p x(p - t) f(t) dt \right)$ (autrement dit $g = -\frac{1}{p}$).

PARTIE II

II.1 Posons $u_n(x, y) = \frac{\sin nx \sin ny}{n^2}$. Alors $|u_n(x, y)| \leq \frac{1}{n^2}$ ce qui prouve que la série $\sum u_n(x, y)$ est absolument convergente. Donc la fonction K est bien définie sur $\mathbb{R}^2$.

II.2 En fixant $y \in \mathbb{R}$ posons $v_n(x) = u_n(x, y)$, ainsi $|v_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$. $\sum v_n$ est donc une série de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ convergeant normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$, sa somme est donc continue.

Pour tout y fixé, la fonction $x \mapsto K(x, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

II.3.1 On vérifie que la fonction E_x est continue en x , en 0, en p , et qu'elle est donc affine par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier elle est $2p$ -périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence normale: la série de Fourier de E_x converge et sa somme est E_x .

II.3.2 E_x étant impaire les a_n sont nuls et on obtient après calculs: $b_n = \frac{2}{p} \int_0^p E_x(t) \sin nt dt = \frac{2}{n^2} \sin nx$.