

Partie I Cas d'une matrice à coefficients constants.

Question I. 1. La fonction X définie par $X : t \mapsto e^{\lambda t} V$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $X'(t) = \lambda e^{\lambda t} V$ (coefficient par coefficient). Ainsi X est solution de (E_0) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\lambda e^{\lambda t} V = A e^{\lambda t} V = e^{\lambda t} A V$ sur $\mathbb{R}$, ce qui équivaut à $AV = \lambda V$ donc à V (non nul) est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

Question I. 2. 1. Pour la matrice A et $x \in \mathbb{C}$, la fonction polynôme caractéristique vaut alors :

$$P_A(x) = \det(A - xI_4) = \begin{vmatrix} -x & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-x & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)(1-x) \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix}$$

en développant selon la deuxième ligne les deux fois, d'où $P_A(x) = (2-x)(1-x)(x^2 + 1)$

le spectre de A dans $\mathbb{C}$ est $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{1, 2, i, -i\}$

A est donc **diagonalisable** dans $\mathbb{C}$, puisqu'elle admet 4 valeurs propres distinctes, ce qui est une condition suffisante de diagonalisabilité pour une matrice 4×4 , de plus les **sous-espaces propres sont des droites**.

Par résolutions des systèmes $AX = \lambda X$, on trouve : **Rappel : les calculatrices sont autorisées.**

$$E_1 = \text{Vect}(\vec{v}_1) \text{ où } \vec{v}_1 = (0, 0, 1, 1), E_2 = \text{Vect}(\vec{v}_2) \text{ où } \vec{v}_2 = (0, 1, 1, 0), \\ E_i = \text{Vect}(\vec{v}_3) \text{ où } \vec{v}_3 = (1, 0, 0, -i), \text{ et } E_{-i} = \text{Vect}(\vec{v}_4) \text{ où } \vec{v}_4 = (1, 0, 0, i).$$

On a donc une famille de 4 fonctions de $Sol(E_0)$ qui est de dimension 4, constituée des fonctions :

$$X_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, X_2 : t \mapsto e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3 : t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, X_4 : t \mapsto e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

La matrice wronskienne de cette famille a pour déterminant $\det(W(t)) = e^{3t} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -i & i \end{vmatrix}$ qui est non nul,

puisque l'on a une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes.

Donc la famille $(X_j)_{1 \leq j \leq 4}$ est libre, et c'est un système fondamental de solutions de (E_0) .

C'est donc une famille génératrice : toute solution est une combinaison linéaire de ces solutions,

$$\text{la solution générale de } (E_0) \text{ sur } I = \mathbb{R} \text{ est } X : t \mapsto \sum_{1 \leq j \leq 4} k_j X_j(t) \text{ où } (k_j)_{1 \leq j \leq 4} \in \mathbb{K}^4.$$

Question I. 2. 2. $(E) : X'(t) = AX(t) + B(t)$ s'écrit

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_2(t) + x_3(t) - x_4(t) + t e^t & (1) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) + e^t & (2) \\ x_3'(t) = x_2(t) + x_3(t) & (3) \\ x_4'(t) = x_1(t) - x_2(t) + x_3(t) - t e^t & (4) \end{cases}$$

(2) est une EDL1 à coefficient constant et second membre e^t , la solution générale de l'équation homogène associée est $x(t) = k e^{2t}$ et une solution particulière de la forme $p(t) e^t$ fournit $-e^t$.

$$x_2(t) = k_2 e^{2t} - e^t \text{ sur } \mathbb{R} \text{ solution générale de (2).}$$

On reporte cette solution dans (3) et on résout selon les mêmes méthodes, on trouve :

$$x_3(t) = k_3 e^t + k_2 e^{2t} - t e^t \text{ sur } \mathbb{R} \text{ solution générale de (3)}$$

Alors $\begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1'(t) = -x_4(t) + (k_3 + 1) e^t \\ x_4'(t) = x_1(t) + (k_3 + 1 - 2t) e^t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_4(t) = -x_1'(t) + (k_3 + 1) e^t \\ x_1''(t) = -x_1(t) + 2t e^t \end{cases}$

En tirant x_4 de la 1^{ère} équation et en reportant dans la 2^{de}.

Cette dernière EDL2 à coefficients constants a pour solution générale homogène $x_1(t) = k_1 \cos(t) + k_4 \sin(t)$ et on trouve une solution particulière en $x(t) = q(t) e^t$ avec $q''(t) + 2q'(t) + q(t) = -q(t) + 2t$, on prend donc $q(t)$ de degré 2 en t , et $q(t) = t - 1$ convient.

D'où
$$\begin{cases} x_1(t) = k_1 \cos(t) + k_4 \sin(t) + (t-1)e^t \\ x_4(t) = k_1 \sin(t) - k_4 \cos(t) + (k_3 + 1 - t)e^t \end{cases} \text{ solution de } \begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases} \text{ sur } \mathbb{R} \quad \text{Ainsi}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} k_1 \cos(t) + k_4 \sin(t) + (t-1)e^t \\ k_2 e^{2t} - e^t \\ k_3 e^t + k_2 e^{2t} - t e^t \\ k_1 \sin(t) - k_4 \cos(t) + (k_3 + 1 - t)e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 & 0 & \sin(t) \\ 0 & e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^t & 0 \\ \sin(t) & 0 & e^t & -\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -t e^t \\ (1-t)e^t \end{pmatrix}$$

est la solution générale à valeurs réelles sur $\mathbb{R}$ de (E) , avec $(k_j)_{1 \leq j \leq 4} \in \mathbb{R}^4$ quelconque et fixé.

On cherche $(k_j)_{1 \leq j \leq 4}$
pour trouver la
solution telle que :

$$X(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 - 1 \\ k_2 - 1 \\ k_3 + k_2 \\ -k_4 + k_3 + 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = -1 \\ k_4 = 0 \end{cases} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} (t-1)e^t \\ -e^t \\ -(1+t)e^t \\ -t e^t \end{pmatrix}$$

Partie II Matrice résolvante.

Question II. 1. Φ_{t_0} est linéaire et bijective avec le Thm de Cauchy, c'est bien un isomorphisme, et $\Phi_{t_0}^{-1}$ est l'application qui à un vecteur V de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associe la solution de (E_0) : X dans S_0 telle que $X(t_0) = V$.

$$\text{Alors } \Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}(V) = X(t)$$

Question II. 2. 1. Ayant choisi ces bases, la matrice se remplit en colonnes : la j ème colonne est constituée des composantes de l'image $\Phi_{t_0}(X_j)$ du j ème vecteur de la base $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ dans la base de l'espace d'arrivée. C'est donc la colonne représentant $X_j(t_0)$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et on retrouve bien :
 $W(t_0) = (X_1(t_0) \cdots X_n(t_0)).$

Question II. 2. 2. La matrice $R(t, t_0)$ est la matrice de $\Phi_t \circ \Phi_{t_0}^{-1}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, muni de sa base canonique. Sa j ème colonne est $R(t, t_0) C_j$ qui est la valeur en t de la solution de (E_0) telle que $X(t_0) = C_j$ qui est unique, et **indépendante de la famille** $(X_j)_{1 \leq j \leq n}$ qu'on a choisie comme base de S_0 .

Question II. 3. 1. $R(t, t_0) = W(t) W(t_0)^{-1}$ est dérivable comme produit sur I , et $R'(t, t_0) = W'(t) W(t_0)^{-1}$. Mais W se dérive composante par composante, donc colonne par colonne : $W'(t) = (X'_1(t) \cdots X'_n(t))$ sur I . Et pour chaque colonne : $X'_j(t) = A(t) X_j(t)$ sur I , donc matriciellement : $W'(t) = A(t) (X_1(t) \cdots X_n(t))$ sur I .

Ainsi $W'(t) = A(t) W(t)$ donc $R'(t, t_0) = A(t) W(t) W(t_0)^{-1} = A(t) R(t, t_0)$ pour t, t_0 dans I

Alors si $X : t \mapsto R(t, t_0) V$ on a $X'(t) = R'(t, t_0) V = A(t) R(t, t_0) V = A(t) X(t)$ sur I , donc X est une solution de (E_0) sur I , et $X(t_0) = R(t_0, t_0) V = V$. (Car il est clair que $R(t_0, t_0) = W(t_0) W(t_0)^{-1} = I_n$.)

C'est donc la solution de (E_0) vérifiant cette condition initiale.

Question II. 3. 2. Pour tout $(t_0, t_1, t_2) \in I^3$: $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = [W(t_2) W(t_1)^{-1}] \times [W(t_1) W(t_0)^{-1}]$.
Donc $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = W(t_2) W(t_0)^{-1}$ par associativité, et $R(t_2, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_2, t_0)$.

Appliqué à $t_2 = t_0$ on obtient $R(t_0, t_1) R(t_1, t_0) = R(t_0, t_0) = I_n$

$$\text{donc } R(t_1, t_0) \text{ est inversible et } R(t_1, t_0)^{-1} = R(t_0, t_1)$$

Question II. 4. 1. Si on considère $X : t \mapsto R(t, t_0) V(t)$, elle est dérivable sur I par produit.

Et $X'(t) = R'(t, t_0) V(t) + R(t, t_0) V'(t) = A(t) R(t, t_0) V(t) + R(t, t_0) V'(t) = A(t) X(t) + R(t, t_0) V'(t)$ sur I .

Ainsi : $(X \text{ de cette forme est une solution de } (E) \text{ sur } I) \Leftrightarrow (R(t, t_0) V'(t) = B(t) \text{ sur } I)$

Question II. 4. 2. Ce qui équivaut encore à $(V'(t) = R(t_0, t)B(t) \text{ sur } I)$ et on a une fonction continue sur I .
Donc une intégrale fonction de la borne supérieure est une fonction V qui convient :

$$V : t \mapsto \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du \text{ fournit une solution } Y : t \mapsto R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du \text{ de } (E)$$

Question II. 4. 3. Pour cette fonction $Y : t \mapsto R(t, t_0) \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du$, on peut dans le calcul de l'intégrale par rapport à u , rentrer le terme $R(t, t_0)$ dans l'intégrale (on considère t comme fixé pour ce calcul de $Y(t)$), en admettant, par linéarité, que $M \int_{t_0}^t H(u) du = \int_{t_0}^t M H(u) du$ pour une matrice carrée M et une colonne H .

$$\text{Ainsi } Y : t \mapsto \int_{t_0}^t R(t, u) B(u) du \text{ définit une solution particulière de } (E) \text{ sur } I$$

Remarque : elle est nulle en $t = t_0$. La solution de (E) vérifiant $X(t_0) = V_0$ est associée à la fonction définie sur I par : $X : t \mapsto R(t, t_0) \left[V_0 + \int_{t_0}^t R(t_0, u) B(u) du \right]$.

Partie III Une application de la résolvante.

Question III. 1. 1. Puisque (e_0) est linéaire sans second membre, l'ensemble de ses solutions est un espace vectoriel, donc on peut chercher un polynôme normalisé solution, avec $a_m = 1 : y(t) = t^m + \dots + a_0$.
Si y est un polynôme, alors $t(t-1)y'' + 3y' - 6y$ est aussi un polynôme. Considérons les termes de plus haut degré : $3y'$ est de degré $m-1$, alors que $t(t-1)y''$ et $-6y$ ont des termes de degré m , donc le terme de plus haut degré du polynôme $t(t-1)y'' + 3y' - 6y$ est $[m(m-1) - 6]t^m$.
Si ce polynôme est nul, il est nécessaire que $m^2 - m - 6 = 0$ donc que $(m-3)(m+2) = 0$.

Si y est un polynôme solution de (e_0) alors y est de degré 3.

Cherchons $y(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ solution de (e_0) : alors $y'(t) = 3at^2 + 2bt + c$ et $y''(t) = 6at + 2b$ sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Et alors } t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t) &= (t^2 - t)(6at + 2b) + 3(3at^2 + 2bt + c) - 6(at^3 + bt^2 + ct + d) \\ &= (3a - 4b)t^2 + (4b - 6c)t + 3c - 6d \quad \text{polynôme nul} \end{aligned}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 3a - 4b = 0 \\ 4b - 6c = 0 \\ 3c - 6d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{4}a \\ c = \frac{2}{3}b = \frac{a}{2} \\ d = \frac{c}{2} = \frac{a}{4} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} y(t) = k(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1) \\ \text{où } k \in \mathbb{R}, \text{ est la solution générale} \\ \text{polynôme de } (e_0). \end{cases}$$

Le polynôme $P(t) = 4t^3 + 3t^2 + 2t + 1$ tel que $P(0) = 1$ dirige cette droite de solutions polynômes sur $\mathbb{R}$.

Question III. 1. 2. La fonction Q est C^∞ sur $] -\infty, 1[$ et $Q'(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, $Q''(t) = \frac{6}{(1-t)^4}$.

$$\text{Ainsi sur }] -\infty, 1[: t(t-1)Q''(t) + 3Q'(t) - 6Q(t) = \frac{6t(t-1) + 3 \times 2(1-t) - 6(1-t)^2}{(1-t)^4} = 0$$

La fonction Q est une solution de (e_0) sur $] -\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$ aussi d'ailleurs.

Question III. 1. 3. 1. On suppose $R > 0$ et $y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k$ de rayon de convergence R . On peut dériver terme à terme, y est de classe C^∞ sur $] -R, R[$, et $t(t-1)y''(t) + 3y'(t) - 6y(t)$ égale la somme d'une série entière $E(t)$.

$$\text{Sur }] -R, R[, E(t) = t^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} - t \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} 3ka_k t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 6a_k t^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k t^k - \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)a_k t^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 3ka_k t^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} 6a_k t^k$$

changement d'indice $p = k$ $p = k-1$ $p = k-1$ $p = k$

$$\text{Ainsi } E(t) = \sum_{p=0}^{\infty} [p^2 - p - 6]a_p t^p - \sum_{p=0}^{\infty} [(p+1)(p-3)]a_{p+1} t^p = \sum_{p=0}^{\infty} [(p-3)(p+2)a_p - (p+1)(p-3)a_{p+1}] t^p$$

Par le thm d'unicité des coefficients d'une série entière, cette série est constante nulle sur $] -R, R[$ si et seulement

$$\text{si : } \forall p \in \mathbb{N}, (p-3)(p+2)a_p - (p+1)(p-3)a_{p+1} = 0 \Leftrightarrow a_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}a_p \text{ si } k \neq 3$$

Ce qui équivaut à :

$$\begin{cases} a_1 = 2a_0, & a_2 = \frac{3}{2}a_1 = 3a_0, & a_3 = \frac{4}{3}a_1 = 4a_0 \\ \text{et par récurrence, pour } k \geq 4, & a_k = \frac{k+1}{5}a_4 \end{cases}$$

On peut donc choisir a_0 et a_4 dans $\mathbb{R}$, et alors

$$y(t) = a_0(1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) + \frac{a_4}{5} \left[\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)t^k \right]$$

Si $a_4 = 0$ alors $R = \infty$ car on a une solution polynôme.

Si $a_4 \neq 0$, alors les a_k sont non nuls pour $k \geq 4$ et $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \rightarrow \ell = 1$ donc $R = \frac{1}{\ell} = 1$. En effet si $x > 0$, et si on pose $u_k = |a_k|x^k$ on a $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| x \rightarrow x$ et on a donc absolue convergence si $x < 1$ et divergence grossière si $x > 1$, avec le critère de d'Alembert et $R = 1$ est le rayon de convergence.

Question III. 1. 3. 2. On sait que $\frac{1}{1-t} = \sum_{p=0}^{\infty} t^p$ sur $] -1, 1[$ donc $Q(t) = \frac{1}{(1-t)^2} = \sum_{p=1}^{\infty} p t^{p-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)t^k$

par dérivation sur $] -1, 1[$. Ainsi $\sum_{k=4}^{\infty} (k+1)t^k = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)t^k - (1 + 2t + 3t^2 + 4t^3) = Q(t) - P(t)$.

La solution générale développable en série entière est donc

$$y(t) = \left(a_0 - \frac{a_4}{5} \right) P(t) + \frac{a_4}{5} Q(t)$$

où a_0 et a_4 sont des réels quelconques et fixés. Si $a_4 = 0$, on a une solution sur $\mathbb{R}$, si $a_4 \neq 0$ sur $] -1, 1[$.

Question III. 2. 1. $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (y'' = -ay' - by + \varphi)$ et en posant $z = y'$:

$$(\mathcal{E}) \Leftrightarrow \left(X = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ solution de } \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -az - by + \varphi \end{pmatrix} \text{ sur } I. \right)$$

donc $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow (E) : X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ sur I

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix} \text{ continues sur } I.$$

Question III. 2. 2. On sait, sous nos hypothèses (forme normalisée, avec des coefficients a et b continus sur I intervalle), que le Thm de Cauchy permet d'assurer que $Sol(\mathcal{E}_0)$ est un plan vectoriel en bijection avec $\mathbb{K}^2$.

Si (f, g) forme une base de l'espace des fonctions associées aux solutions $Sol(\mathcal{E}_0)$, c'est une famille libre et

$\begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ g' \end{pmatrix}$ est aussi libre, donc système fondamental de (E_0) .

Avec les notations : $W(t_0) = \begin{pmatrix} f_0 & g_0 \\ f'_0 & g'_0 \end{pmatrix}$ et donc

$$W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g'_0 - f'_0 g_0} \begin{pmatrix} g'_0 & -g_0 \\ -f'_0 & f_0 \end{pmatrix}$$

avec $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t(Com(M))$, avec $f_0 g'_0 - f'_0 g_0 \neq 0$, car (f, g) base.

$$R(t, t_0) = W(t) W(t_0)^{-1} = \frac{1}{f_0 g'_0 - f'_0 g_0} \begin{pmatrix} f g'_0 - f'_0 g & f_0 g - f g_0 \\ f' g'_0 - f'_0 g' & f_0 g' - f' g_0 \end{pmatrix}$$

Question III. 3. 1. On a, sur $I =]0, 1[$, l'écriture normalisée de (e) qui est :

$$(\mathcal{E}) : y'' + \frac{3}{t(t-1)}y' - \frac{6}{t(t-1)}y = \frac{20t^3}{t-1} \text{ d'où } A(t) = \frac{1}{t(t-1)} \begin{pmatrix} 0 & t(t-1) \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } B(t) = \frac{20t^3}{(t-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Question III. 3. 2. Ainsi

$$\det(W(u)) = \begin{vmatrix} P(u) & Q(u) \\ P'(u) & Q'(u) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 & \frac{1}{(1-u)^2} \\ 12u^2 + 6u + 2 & \frac{2}{(1-u)^3} \end{vmatrix} = \frac{1}{(1-u)^3} \begin{vmatrix} 4u^3 + 3u^2 + 2u + 1 & 1-u \\ 12u^2 + 6u + 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\det(W(u)) = \frac{20u^3}{(1-u)^3} \text{ avec } 20u^3 = 2(4u^3 + 3u^2 + 2u + 1) - (1-u)(12u^2 + 6u + 2).}$$

Par ailleurs : $Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{(4u^3 + 3u^2 + 2u + 1)(1-u)^2 - (4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)(1-t)^2}{(1-t)^2(1-u)^2}$

et $(4u^3 + 3u^2 + 2u + 1)(1-u)^2 = 4u^5 - 5u^4 + 1$ donc :

$$\boxed{Q(t)P(u) - P(t)Q(u) = \frac{4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2} \text{ sur } I^2}$$

Question III. 3. 3. On applique II.4.3. , avec $Y(t) = \int_{t_0}^t R(t, u) B(u) du$ dont on ne garde que la première

composante car $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$, et $R(t, u)B(u) = \frac{1}{\det(W(u))} \begin{pmatrix} fg'_u - f'_u g & f_u g - fg_u \\ f' g'_u - f'_u g' & f_u g' - f' g_u \end{pmatrix} \times \frac{20u^3}{(u-1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

en prenant u à la place de t_0 . Cette première composante vaut : $\frac{1}{\det(W(u))} \frac{20t^3}{(t-1)} (Q(t)P(u) - P(t)Q(u))$

c'est à dire : $\frac{(1-u)^3}{20u^3} \frac{20u^3}{(u-1)} \left(\frac{4u^5 - 5u^4 - 4t^5 + 5t^4}{(1-t)^2(1-u)^2} \right) = \frac{4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4}{(1-t)^2} \quad (\text{Calculs sur }]0, 1[^2)$

$$\boxed{\text{La fonction } y : t \mapsto \frac{1}{(1-t)^2} \int_{t_0}^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du \text{ définit une solution particulière de (e) sur }]0, 1[}$$

$\int_0^{t_0} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du$ est bien définie, et vaut $(4t^5 - 5t^4)t_0 - \frac{2}{3}t_0^6 + t_0^5$

Alors $\frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du = \frac{1}{(1-t)^2} \left[(4t^5 - 5t^4)t_0 - \frac{2}{3}t_0^6 + t_0^5 \right]$

Or $(4t^3 + 3t^2 + 2t + 1)(1-t)^2 = 4t^5 - 5t^4 + 1$ donc $\frac{(4t^5 - 5t^4 + 1)}{(1-t)^2} = P(t)$ et $\frac{4t^5 - 5t^4}{(1-t)^2} = P(t) - Q(t)$

Ainsi $\frac{1}{(1-t)^2} \int_0^{t_0} (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du = t_0[P(t) - Q(t)] + \left[t_0^5 - \frac{2}{3}t_0^6 \right] Q(t)$ est une combinaison linéaire de P et Q , donc une solution de l'équation homogène (e_0). En l'ajoutant à la solution particulière de (e),

on obtient une autre solution particulière définie par $y_0(t) = \frac{1}{(1-t)^2} \int_0^t (4t^5 - 5t^4 - 4u^5 + 5u^4) du$ sur $]0, 1[$.

Ce qu'on peut calculer en $y_0(t) = \frac{\frac{10}{3}t^6 - 4t^5}{(1-t)^2}$ sur $]0, 1[$. Cette fonction est la restriction à $]0, 1[$ d'une fraction rationnelle de classe C^∞ sur $]-\infty, 1[$, il en est de même pour P et Q .

$$\boxed{\text{Les fonctions } y(t) = y_0(t) + k_1 P(t) + k_2 Q(t) \text{ décrivent les solutions de (e) sur }]0, 1[\text{ pour } (k_1, k_2) \in \mathbb{K}^2}$$

Ce sont celles dont on peut assurer l'existence et l'unicité pour des conditions initiales données en $t_0 \in]0, 1[$, par le Thm de Cauchy.

Si $(]0, 1[, y(t))$ est une solution sur $]0, 1[$, alors sa restriction à $]0, 1[$ est une solution de la forme précédente. Réciproquement une solution sur $]0, 1[$ de la forme précédente se prolonge en $t = 0$ de façon C^∞ (fraction rationnelle) avec $y(0) = k_1 + k_2$ et $y'(0) = 2k_1 + 2k_2$ car $y'_0(0) = 0$ (il y a un t^5 en facteur), $P'(0) = 2$ et $Q'(0) = 2$. D'ailleurs elles se prolongent sur $]-\infty, 1[$.

Les solutions qui vérifient $y(0) = y'(0) = 0$ sont les fonctions :

$$\boxed{y(t) = y_0(t) + k_1 [P(t) - Q(t)] = \frac{2t^5(5t-6)}{3(1-t)^2} + k_1 [P(t) - Q(t)] \text{ où } k_1 \in \mathbb{K} \text{ est quelconque et fixé.}}$$

Il y a donc une **droite affine** de solutions vérifiant ces conditions initiales.