

École polytechnique - Écoles normales supérieures

Concours d'admission 2016 - filière MP

Corrigé de l'épreuve de mathématiques A

(corrigé de l'énoncé modifié par Abdellah Bechata, après correction des erreurs d'énoncé)

Première partie

1a. On a $M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} {}^t\text{Com}(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$, puisque M étant à coefficients entiers, son déterminant et ses mineurs sont également entiers.

1b. Si M^{-1} est à coefficients entiers, son déterminant est entier: on en déduit que $\det(M)$ est un entier non nul dont l'inverse est également entier, soit $\det(M) = 1$ ou -1 .

Réciproquement, si $\det(M) = \pm 1$, $M^{-1} = \pm {}^t\text{Com}(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ puisque les mineurs de M sont des entiers.

2a. Si $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, $M(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et $M^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$. On en déduit que $\mathbb{Z}^n = M(M^{-1}(\mathbb{Z}^n)) \subset M(\mathbb{Z}^n)$, d'où l'égalité $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$.

Réciproquement, supposons que $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbb{R}^n . Pour tout i , $e_i \in \mathbb{Z}^n$ donc $x_i = Me_i \in \mathbb{Z}^n$. D'autre part, comme $e_i \in \mathbb{Z}^n = M(\mathbb{Z}^n)$, il existe $y_i \in \mathbb{Z}^n$ tel que $e_i = M(y_i)$. Comme M est inversible, $M^{-1} = (y_1 | \dots | y_n)$ et nous avons prouvé que M et M^{-1} étaient à coefficients entiers.

2b. Supposons que $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. On a alors $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, ce qui s'écrit (M est inversible):

$$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n t_i x_i \in \mathbb{Z}^n \iff t \in \mathbb{Z}^n.$$

On en déduit donc:

$$\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^n = \left\{ \sum_{i=1}^n t_i x_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, t_i \in [0, 1] \cap \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, \varepsilon_i \in \{0, 1\} \right\}.$$

Cet ensemble est bien de cardinal 2^n car la famille (x_1, \dots, x_n) est une base de \mathbb{R}^n .

Réciproquement, supposons que ii) est vérifié. On a tout d'abord $x_i \in \mathbb{Z}^n$ pour tout i (avec $\varepsilon_i = 1$ et $\varepsilon_j = 0$ pour $j \neq i$), donc $M(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$.

Il reste à montrer que $M^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$: soit donc $t = (t_1, \dots, t_n) \in M^{-1}(\mathbb{Z}^n)$, i.e. tel que $M(t) \in \mathbb{Z}^n$. On peut alors écrire $t = [t] + \{t\}$ en posant $[t] = ([t_1], \dots, [t_n])$ et $\{t\} = (\{t_1\}, \dots, \{t_n\})$. On a alors:

$$M(\{t\}) = M(t) - M([t]) \in \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{P}$$

donc $\{t\} \in \{0, 1\}^n$, ce qui impose $\{t\} = (0, \dots, 0)$ et $t \in \mathbb{Z}^n$. On a donc $M(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$ et M est élément de $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$.

3. Question de cours: le produit à gauche de M par $I_n + \alpha E_{i,j}$ correspond à l'opération élémentaire "ajouter à la i -ème ligne de M α fois sa j -ème ligne", soit $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$; le produit à droite correspond à l'opération "ajouter à la j -ème colonne de M α fois sa i -ème colonne", soit $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$.

4a. Notons $N = (y_1 | \dots | y_{n-1})$. En développant $\det(M)$ par rapport à sa première ligne, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \det(M) &= a_1 \det(y_2, \dots, y_{n-1}, v y_1) + (-1)^{n+1} u \det(N) \\ &= v a_1 (-1)^{n-2} \det(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) + (-1)^{n+1} u \det(N) \end{aligned}$$

puisqu'il faut effectuer $n-2$ permutations de vecteurs pour passer de $\det(y_2, \dots, y_{n-1}, y_1)$ à $\det(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$. Nous obtenons ainsi:

$$\det(M) = (-1)^n (v a_1 - u) \det(N).$$

4b. Notons $b = \det(N)$ et d un pgcd de (a_1, b) : d est alors un pgcd de (a_1, a_2, \dots, a_n) . Comme $d \in d\mathbb{Z} = a_1\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, il existe $U, V \in \mathbb{Z}$ tels que $a_1 U + b V = d$. Si les a_2, \dots, a_n sont non tous nuls, leur pgcd b est non nul. On peut donc poser

$$v = (-1)^n \frac{U}{b} \quad \text{et} \quad u = (-1)^{n+1} V$$

et ces deux rationnels donnent une matrice M à coefficients entiers (car b divise a_2, \dots, a_n), dont la première colonne est (a_1, a_2, \dots, a_n) et dont le déterminant vaut $(-1)^n (v a_1 - u) \det(N) = U a_1 + V b = d$.

Il reste à rédiger la preuve par récurrence:

- Si $n = 1$, la matrice $M = (a_1)$ est solution du problème posé.
- Soit $n \geq 2$ et supposons que la propriété ait été démontrée pour toute famille de $n-1$ entiers non tous nuls. Soit (a_1, \dots, a_n) une famille de n entiers non tous nuls. Si $a_2 = \dots = a_n = 0$, $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) = a_1$ et la matrice diagonale $\text{diag}(a_1, 1, \dots, 1)$ est solution du problème. Sinon, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille (a_2, \dots, a_n) et appliquer la construction précédente: la propriété est vérifiée au rang n .

5a. (x'_1, \dots, x'_n) est une famille de n vecteurs du \mathbb{Q} -espace vectoriel \mathbb{Q}^{n-1} , de dimension $n-1$: cette famille est donc liée et il existe une famille $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{Q}^{n-1} \setminus \{0\}$ telle que $a_1 x'_1 + \dots + a_n x'_n = 0$. Quitte à multiplier tous les a_i par le ppcm de leurs dénominateurs, on peut supposer qu'ils sont tous entiers. Il reste alors à remplacer chaque a_i par $\frac{a_i}{\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n)}$ pour obtenir des a_i entiers et premiers entre eux dans leur ensemble.

5b. On peut appliquer le résultat de la question 4 à la famille (a_1, \dots, a_n) obtenu au 5a: il existe $A_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne est (a_1, \dots, a_n) et dont le déterminant vaut ± 1 (les a_i sont premiers dans leur ensemble): on en déduit que $A_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ et la première colonne de $M A_1$ est $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$, vecteur dont seule la première coordonnée est non nulle (comme M et A_1 sont inversibles, $M A_1$ l'est également et ne peut avoir une première colonne nulle). Quitte à remplacer (a_1, \dots, a_n) par $(-a_1, \dots, -a_n)$, on peut supposer que le coefficient $\tilde{c}_{1,1}$ est strictement positif.

5c. Posons $MA_1 = (y_1 | \dots | y_n)$. En remplaçant A_1 par $A_1(I_n - q_2 E_{1,2}) \dots (I_n - q_n E_{1,n}) \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$, nous obtenons donc la matrice $(y_1 | y_2 - q_2 y_1 | \dots | y_n - q_n y_1)$, dont les coefficients de la première ligne sont $(\tilde{c}_{1,1}, r_2, \dots, r_n)$. Quitte à changer A_1 , nous pouvons donc supposer que $\tilde{c}_{1,1} > \tilde{c}_{1,j} \geq 0$ pour tout $j \in \{2, \dots, n\}$.

5d. La récurrence se fait sans problème, mais il ne faut appliquer la question 5c qu'après avoir rendu triangulaire le bloc inférieur.

- Si $n = 1$, il suffit de choisir $A = (\varepsilon) \in \text{GL}_1(\mathbb{Z})$ où ε est le signe de $m_{1,1}$ pour obtenir $c_{1,1} = |m_{1,1}| > 0$;
- Soit $n \geq 2$ et supposons la propriété démontrée pour toute matrice entière inversible de taille $n - 1$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ de déterminant non nul. Il existe alors une matrice $A_1 \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que:

$$MA_1 = \begin{pmatrix} \tilde{c}_{1,1} & \tilde{c}_{1,2} & \dots & \tilde{c}_{1,n} \\ 0 & \boxed{\text{N}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$$

avec $\tilde{c}_{1,1} \in \mathbb{N}^*$. Comme $\det(M)$ est non nul, on a également $\det(N)$ non nul et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence: il existe une matrice $B \in \text{GL}_{n-1}(\mathbb{Z})$ telle que $NB = (c_{i,j})_{2 \leq i, j \leq n}$ soit triangulaire supérieure, avec $0 \leq c_{i,j} < c_{i,i}$ pour tous i, j tels que $2 \leq i < j \leq n$ (et $c_{2,2} > 0$ si $n = 2$). On note alors:

$$A_2 = A_1 \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \boxed{\text{B}} & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$$

et la matrice $MA_2 = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est triangulaire supérieure, à diagonale strictement positive et $0 \leq c_{i,j} < c_{i,i}$ pour tout $i \geq 2$ et pour tout $j > i$. Il reste alors à appliquer la méthode explicitée à la question 5c pour imposer $0 \leq c_{1,j} < c_{1,1}$ sans modifier les autres lignes (les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - q_j C_1$ ne modifient que la première ligne de la matrice car seul la première composante de C_1 est non nulle).

6. Par transposition, le résultat de la question 5 permet d'obtenir une matrice $M \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $MA = (c_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est triangulaire inférieure, à diagonale strictement positive et telle que $0 \leq c_{i,j} < c_{j,j}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $j < i$.

Deuxième partie

7a. L'ensemble $K_n = \{(t_i)_{0 \leq i \leq n}, \forall i = 0 \dots n, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$ est une partie fermée bornée, donc compacte, de \mathbb{R}^n (espace vectoriel normé de dimension finie). \mathcal{S} est alors compact comme image de K_n par l'application continue $(t_i)_{0 \leq i \leq n} \mapsto \sum_{i=0}^n t_i s_i$.

Soient $t \in [0, 1]$ et $x, x' \in \mathcal{S}$, avec $x = \sum_{i=0}^n t_i s_i$ et $x' = \sum_{i=0}^n t'_i s_i$, où $(t_i)_{0 \leq i \leq n}, (t'_i)_{0 \leq i \leq n} \in K_n$. On a:

$$(1-t)x + tx' = \sum_{i=0}^n ((1-t)t_i + tt'_i) s_i \in \mathcal{S}$$

car $\forall i = 0 \dots n$, $(1-t)t_i + tt'_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^n \left((1-t)t_i + tt'_i \right) = (1-t) \sum_{i=0}^n t_i + t \sum_{i=0}^n t'_i = 1$.

\mathcal{S} est donc un compact convexe de \mathbb{R}^n .

7b. L'application $\varphi : (t_1, \dots, t_n) \mapsto s_0 + \sum_{i=1}^n t_i s_i$ est un isomorphisme affine de \mathbb{R}^n sur lui-même: elle est donc continue, ainsi que sa réciproque. En notant

$$\mathcal{S}_0 = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \mid \forall i = 1 \dots n, t_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i \leq 1 \right\},$$

nous avons $\mathcal{S} = \varphi(\mathcal{S}_0)$ et $\mathring{\mathcal{S}} = \varphi(\mathring{\mathcal{S}}_0)$. Il suffit donc de montrer que

$$\mathring{\mathcal{S}}_0 = \left\{ (t_1, \dots, t_n) \mid \forall i = 1 \dots n, t_i > 0 \text{ et } \sum_{i=1}^n t_i < 1 \right\} = \Omega$$

pour obtenir le résultat demandé. Remarquons tout d'abord que Ω est un ouvert, comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[^{n+1}$ par l'application continue $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n, t_1 + \dots + t_n)$. Comme $\Omega \subset \mathcal{S}_0$, on a $\Omega \subset \mathring{\mathcal{S}}_0$.

Pour montrer l'autre inclusion, nous allons munir \mathbb{R}^n de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Soit $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{S}_0 \setminus \Omega$ et $r > 0$. On a deux cas possibles:

- s'il existe i tel que $t_i = 0$, $(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i - r/2, t_{i+1}, \dots, t_n) \in B_\infty(t, r) \setminus \mathcal{S}_0$;
- sinon, $t_1 + \dots + t_n = 1$ et $(t_1 + r/2, t_2, \dots, t_n) \in B_\infty(t, r) \setminus \mathcal{S}_0$.

Ceci prouve que $t \notin \mathring{\mathcal{S}}_0$, ce qui donne $\mathring{\mathcal{S}}_0 \subset \Omega$.

Supposons que $0 \in \mathring{\mathcal{S}}$ et que $\lambda \in [0, 1[$. On peut alors écrire $0 = \sum_{i=0}^n t'_i s_i$ avec $t'_0, \dots, t'_n > 0$ et $t'_0 + \dots + t'_n = 1$.

Pour tout $x = \sum_{i=0}^n t_i s_i \in \mathcal{S}$, on peut écrire:

$$\lambda x = \lambda x + (1-\lambda)0 = \sum_{i=0}^n \left(\lambda t_i + (1-\lambda)t'_i \right) s_i \in \mathring{\mathcal{S}}$$

car $\forall i \in \{0, \dots, n\}$, $\lambda t_i + (1-\lambda)t'_i \geq (1-\lambda)t'_i > 0$ et $\sum_{i=0}^n \lambda t_i + (1-\lambda)t'_i = \lambda \sum_{i=0}^n t_i + (1-\lambda) \sum_{i=0}^n t'_i = 1$.

Ceci prouve donc que si 0 est intérieur à \mathcal{S} , $\lambda \mathcal{S} \subset \mathring{\mathcal{S}}$ pour tout $\lambda \in [0, 1[$.

7c. En soustrayant la première colonne à toutes les autres colonnes et en développant le déterminant par rapport à la première ligne, nous obtenons:

$$|\det(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_n)| = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ s_0 & s_1 - s_0 & \dots & s_n - s_0 \end{pmatrix} \right| = |\det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)| = n! \text{Vol}(\mathcal{S}).$$

On en déduit que le volume de \mathcal{S} ne dépend pas de l'ordre des sommets, puisque qu'une permutation des s_i ne fera que permuer les \hat{s}_i , ce qui ne modifiera que le signe de $\det(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_n)$.

8a. Pour tout entier $n \geq 1$, le simplexe \mathcal{S}_n défini par les sommets $s_0 = (0,0)$, $s_1 = (0,1)$ et $s_2 = (n,0)$ est un simplexe entier n'ayant aucun point intérieur entier (ses points intérieurs sont les points (nt_2, t_1) avec $t_1 > 0$, $t_2 > 0$ et $t_1 + t_2 < 1$, qui ne sont pas entiers puisque $0 < t_1 < 1$). Comme $\text{Vol}(\mathcal{S}_n) = n/2$, on obtient un simplexe entier de \mathbb{R}^2 de volume supérieur ou égal à V sans point entier intérieur en choisissant n suffisamment grand.

8b. Pour tout entier $n \geq 1$, soit \mathcal{S}_n le simplexe entier de sommets $s_0 = (0,0,0)$, $s_1 = (0,0,1)$, $s_2 = (0,1,1)$ et $s_3 = (n,1,0)$. Ses éléments sont les points $x = (nt_3, t_2 + t_3, t_1 + t_2)$ avec $t_1, t_2, t_3 \geq 0$ et $t_1 + t_2 + t_3 \leq 1$. Si un tel point est entier, on a $0 \leq t_1 + t_2 \leq t_1 + t_2 + t_3 \leq 1$ et $t_1 + t_2 \in \mathbb{Z}$, $t_1 + t_2 \in \{0,1\}$. De même, $t_2 + t_3 \in \{0,1\}$. Nous avons alors trois cas possibles:

- $t_1 + t_2 = 0$, ce qui impose $t_1 = t_2 = 0$ et $t_3 \in \{0,1\}$;
- $t_2 + t_3 = 0$, ce qui impose $t_2 = t_3 = 0$ et $t_1 \in \{0,1\}$;
- $t_1 + t_2 = t_2 + t_3 = 1$, d'où $2 = t_1 + 2t_2 + t_3 \leq 2(t_1 + t_2 + t_3) \leq 2$: ces inégalités sont donc des égalités, ce qui impose $t_1 = t_3 = 0$ et $t_2 = 1$.

Dans tous les cas, les seuls points entiers de \mathcal{S} sont ses sommets. Comme $\text{Vol}(\mathcal{S}_n) = n/6$, on obtient un simplexe entier de \mathbb{R}^3 de volume supérieur ou égal à V dont les seuls points entiers sont ses sommets en choisissant n suffisamment grand.

9a. Remarquons déjà que la partie $I = \{\lambda \geq 0, -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$ est non vide, puisqu'elle contient 0. Si λ_1 et λ_2 sont deux éléments de I et si $t \in [0,1]$:

$$\forall x \in \mathcal{K}, -((1-t)\lambda_1 + t\lambda_2)x = (1-t)(-\lambda_1 x) + t(-\lambda_2 x) \in \mathcal{K}$$

car $\lambda_1, \lambda_2 \in I$ et \mathcal{K} est convexe. I est donc un intervalle.

9b. Remarquons que $a(\mathcal{K})$ est bien défini (*a priori* dans $[0, +\infty]$) car I est non vide.

Comme \mathcal{K} est compact, il est borné. Il existe donc un réel $M \geq 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq M$ pour tout $x \in \mathcal{K}$. Comme 0 est intérieur à \mathcal{K} , il existe $x_0 \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$. Pour $\lambda \in I$, on a $-\lambda x_0 \in \mathcal{K}$, donc $\|-\lambda x_0\|_\infty \leq M$ et $\lambda \leq \frac{M}{\|x_0\|_\infty}$: ceci prouve que I est majoré, i.e. que $a(\mathcal{K}) < +\infty$.

D'autre part, comme $0 \in \overset{\circ}{\mathcal{K}}$, il existe un réel $r > 0$ tel que $\overline{B(0,r)} \subset \mathcal{K}$. Pour $x \in \mathcal{K}$, nous avons alors $-\frac{r}{M}x \in \overline{B(0,r)} \subset \mathcal{K}$, donc $\frac{r}{M}$ est un élément strictement positif de I et $a(\mathcal{K}) > 0$. Il reste à montrer que cette borne supérieure est atteinte. Soit $(\lambda_i)_{i \geq 0}$ une suite d'éléments de I qui converge vers $a(\mathcal{K})$. On a:

$$\forall x \in \mathcal{K}, \forall i \in \mathbb{N}, -\lambda_i x \in \mathcal{K}$$

À x fixé, $(-\lambda_i x)_{i \geq 0}$ converge vers $-a(\mathcal{K})x$, qui est donc élément de \mathcal{K} car \mathcal{K} est compact donc fermé. Ceci prouve que $a(\mathcal{K}) \in I$, i.e. que $a(\mathcal{K}) = \max\{\lambda > 0 \mid -\lambda\mathcal{K} \subset \mathcal{K}\}$.

9c. Comme \mathcal{K} est un compact non vide et non réduit à $\{0\}$, il existe $y \in \mathcal{K} \setminus \{0\}$ tel que $\|y\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{K}} \|x\|_\infty$ (l'application $x \mapsto \|x\|_\infty$ est continue sur le compact \mathcal{K} , donc elle est bornée et atteint ses bornes). Si $\lambda > 1$, $-\lambda y \notin \mathcal{K}$ puisque $\|-\lambda y\|_\infty > \|y\|_\infty$. On en déduit que $I \subset [0,1]$, ce qui donne $0 < a(\mathcal{K}) \leq 1$ (on a vu à la question précédente que $a(\mathcal{K})$ était strictement positif).

Si \mathcal{K} est symétrique par rapport à 0, $-\mathcal{K} = \mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ donc $1 \in I$ et $1 \leq a(\mathcal{K}) \leq 1$.

Si $a(\mathcal{K}) = 1$, $-\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ (car $a(\mathcal{K}) \in I$) et pour tout $x \in \mathcal{K}$, $-x \in \mathcal{K}$: \mathcal{K} est symétrique par rapport à 0.

10a. Il y a une nouvelle fois une maladresse dans l'énoncé: si $\beta = 0$, $\beta\mathcal{S}$ n'est pas un simplexe et $\text{Vol}(\beta\mathcal{S})$ n'est pas défini. Notons (s_0, \dots, s_n) les sommets de \mathcal{S}_n et fixons $\beta \neq 0$. La partie $\beta\mathcal{S}$ est alors un simplexe de sommets $(\beta s_0, \dots, \beta s_n)$, d'où, par n -linéarité du déterminant:

$$\text{Vol}(\beta\mathcal{S}) = \frac{1}{n!} |\det(\beta(s_1 - s_0), \dots, \beta(s_n - s_0))| = \frac{1}{n!} |\beta^n \det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)| = |\beta|^n \text{Vol}(\mathcal{S}).$$

Si $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{S} - x$ est le simplexe de sommet $(s_0 - x, \dots, s_n - x)$, donc:

$$\text{Vol}(\mathcal{S} - x) = |\det(s_1 - x - s_0 + x, \dots, s_n - x - s_0 + x)| = |\det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)| = \text{Vol}(\mathcal{S}).$$

Pour $\lambda \in]0, 1[$ (il faut une nouvelle fois avoir $\lambda \neq 0$), nous en déduisons:

$$\text{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) = \lambda^n \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \text{Vol}(\mathcal{S}) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 1^-} \left(\frac{a}{a+1}\right)^n \text{Vol}(\mathcal{S}) > k$$

donc il existe $\lambda_0 \in]0, 1[$ tel que $\text{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$ pour tout $\lambda \in [\lambda_0, 1]$.

10b. Une nouvelle fois l'énoncé est maladroit: il sous-entend que l'on choisit λ assez proche de 1 pour avoir $\text{Vol}\left(\frac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}\right) > k$, mais il oublie de préciser que $\lambda \in]0, 1[$. Enfin, on devrait écrire "soient v_0, \dots, v_k $k+1$ points distincts" au lieu de "soient v_0, \dots, v_k les $k+1$ points distincts".

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, il existe $x_i \in \mathcal{S}$ tel que $v_i = \frac{\lambda a}{a+1}x_i$. On a alors, pour tous $i, j \in \{0, \dots, n\}$:

$$\frac{a(v_i - v_j)}{a+1} = \frac{\lambda a}{a+1} \left(\frac{a}{a+1}x_i + \frac{1}{a+1}(-ax_j) \right)$$

Comme $-a\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$, $-ax_j \in \mathcal{S}$. Ainsi, x_i et $-ax_j$ sont éléments de \mathcal{S} et $\frac{a}{a+1}$ et $\frac{1}{a+1}$ sont deux réels positifs de somme 1: $\frac{a}{a+1}x_i + \frac{1}{a+1}(-ax_j) \in \mathcal{S}$ par convexité de \mathcal{S} , soit $\frac{a(v_i - v_j)}{a+1} \in \frac{\lambda a}{a+1}\mathcal{S}$.

On en déduit que $v_i - v_j \in \lambda\mathcal{S} \subset \hat{\mathcal{S}}$, en appliquant 7b (c'est ici qu'apparaît la condition $\lambda < 1$).

10c. Soit j tel que v_j soit le maximum des (v_i) pour l'ordre lexicographique de \mathbb{R}^n . Cet ordre est défini par récurrence sur n : si $n = 1$, c'est l'ordre usuel sur \mathbb{R} ; si $n \geq 2$, on a $(a_1, \dots, a_n) < (b_1, \dots, b_n)$ si et seulement si $(a_1 < b_1)$ ou $(a_1 = b_1$ et $(a_2, \dots, a_n) < (b_2, \dots, b_n))$. Dans la suite de la preuve, nous noterons $x[i]$ la i -ème composante d'un vecteur x .

Comme les v_i sont deux à deux distincts, les vecteurs $(v_i - v_j)_{0 \leq i \leq n}$ sont également deux à deux distincts, ainsi que les vecteurs $(v_j - v_i)_{0 \leq i \leq n}$. Il reste à montrer que 0 est le seul vecteur commun à ces deux familles. Soient donc $i, k \in \{0, \dots, n\}$ tels $v_i - v_j = v_j + v_i$, i.e. $v_i + v_k = 2v_j$.

En particulier, $v_i[1] + v_k[1] = 2v_j[1]$, ce qui impose $v_i[1] = v_k[1] = v_j[1]$, car $v_j[1]$ est le maximum des $v_m[1]$ pour $m \in \{0, \dots, n\}$. Les inégalités $v_i \leq v_j$ et $v_k \leq v_j$ donnent ensuite $v_i[2] \leq v_j[2]$ et $v_k[2] \leq v_j[2]$, d'où $v_i[2] = v_k[2] = v_j[2]$ car $v_i[2] + v_k[2] = 2v_j[2]$. Nous obtenons par itération que $v_i = v_j = v_k$, soit $i = j = k$: le seul vecteur commun aux deux familles est bien le vecteur nul.

Nous avons donc explicité $2k+1$ points entiers distincts appartenant à $\hat{\mathcal{S}}$, ce qui donne l'inégalité souhaitée.

Notons $x = \text{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a}{a+1} \right)^n$. Nous avons $k < x \leq k+1$, d'où $2k+1 \geq 2x-1$. Si $x \geq 1$, $2x-1 \geq x$, ce qui donne

$$\text{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 2k+1 \geq x.$$

Sinon, comme 0 est un point intérieur à \mathcal{C} :

$$\text{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq 1 > x.$$

Nous avons donc dans tous les cas, en remarquant que $1+a \leq 2$:

$$\text{Card}(\mathring{\mathcal{S}} \cap \mathbb{Z}^n) \geq \text{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a}{a+1} \right)^n \geq \text{Vol}(\mathcal{S}) \left(\frac{a(\mathcal{S})}{2} \right)^n.$$

Troisième partie

11. Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux simplexes entiers, de sommets (entiers) respectifs (s_0, \dots, s_n) et (s'_0, \dots, s'_n) .

Supposons que \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont équivalents et fixons $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ (quitte à réordonner les sommets) telle que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout i . Nous avons alors:

$$\forall j \in \{0, \dots, n\}, s'_j = As_j - (As_0 - s'_0)$$

En posant $b = As_0 - s'_0 \in \mathbb{Z}^n$, nous avons:

$$\begin{aligned} A\mathcal{S} - b &= \left\{ A \left(\sum_{i=0}^n t_i s_i \right) - b, \forall i = 0 \dots n, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i As_i - \sum_{i=0}^n t_i b, \forall i = 0 \dots n, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n t_i s'_i, \forall i = 0 \dots n, t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\} \\ &= \mathcal{S}' \end{aligned}$$

Il existe donc une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ et un vecteur entier b tel que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ et $b \in \mathbb{Z}^n$ tels que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$. On montre facilement que $A\mathcal{S} - b$ est le simplexe de sommets $(As_0 - b, \dots, As_n - b)$. On en déduit que quitte à permuter les s'_i , on peut supposer que $s'_i = As_i - b$ pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, ce qui donne bien $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$: \mathcal{S} et \mathcal{S}' sont équivalents.

12. Soient \mathcal{S} et \mathcal{S}' deux simplexes équivalents: il existe des numérotations de leurs sommets (s_0, \dots, s_n) et (s'_0, \dots, s'_n) et une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ telles que $A(s_i - s_0) = s'_i - s'_0$ pour tout i . Nous avons alors:

$$\text{Vol}(\mathcal{S}') = |\det(A(s_1 - s_0), \dots, A(s_n - s_0))| = |\det(A) \det(s_1 - s_0, \dots, s_n - s_0)| = \text{Vol}(\mathcal{S})$$

car $\det(A) = \pm 1$.

Il existe d'autre part $b \in \mathbb{Z}^n$ tel que $\mathcal{S}' = A\mathcal{S} - b$. Notons φ la bijection affine de \mathbb{R}^n sur lui-même qui à x associe $Ax - b$. Comme φ réalise également une bijection de \mathbb{Z}^n sur lui-même, on a:

$$\varphi(\mathbb{Z}^n \cap \mathcal{S}) = \varphi(\mathbb{Z}^n) \cap \varphi(\mathcal{S}) = \mathbb{Z}^n \cap \mathcal{S}'$$

donc \mathcal{S} et \mathcal{S}' contiennent autant de points entiers.

D'autre part, φ est continue, $\varphi^{-1}(\mathring{\mathcal{S}}')$ est un ouvert contenu dans \mathcal{S} , donc $\varphi^{-1}(\mathring{\mathcal{S}}') \subset \mathring{\mathcal{S}}$, soit $\mathring{\mathcal{S}}' \subset \varphi(\mathring{\mathcal{S}})$.

De même, φ^{-1} est continue, donc $\varphi(\mathring{\mathcal{S}}) = (\varphi^{-1})^{-1}(\mathring{\mathcal{S}})$ est un ouvert contenu dans \mathcal{S}' , donc $\varphi(\mathring{\mathcal{S}}) \subset \mathring{\mathcal{S}}'$.

On en déduit donc:

$$\varphi(\mathbb{Z}^n \cap \mathring{\mathcal{S}}) = \varphi(\mathbb{Z}^n) \cap \varphi(\mathring{\mathcal{S}}) = \mathbb{Z}^n \cap \mathring{\mathcal{S}}'$$

et les simplexes \mathcal{S} et \mathcal{S}' contiennent le même nombre de points intérieurs entiers.

- 13** Soit \mathcal{S} un simplexe entier de sommets (s_0, \dots, s_n) . La matrice $M = (s_1 - s_0 \mid \dots \mid s_n - s_0)$ est à coefficients entiers: il existe donc, d'après la question 6, une matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AM = (y_1 \mid \dots \mid y_n) = (c_{i,j})$ soit triangulaire inférieure, avec $c_{i,i} > 0$ pour tout i et $0 \leq c_{i,j} < c_{j,j}$ pour tous i, j tels que $1 \leq j < i \leq n$. En posant $y_0 = 0$, le simplexe \mathcal{S}' de sommets (y_0, y_1, \dots, y_n) est équivalent à \mathcal{S} (donc entier) et on a:

$$\text{Vol}(\mathcal{S}) = \text{Vol}(\mathcal{S}') = \frac{1}{n!} \prod_{i=1}^n c_{i,i}$$

Les $c_{i,i}$ sont des entiers naturels non nuls, donc $0 \leq c_{i,j} \leq c_{j,j} \leq \prod_{k=1}^n c_{k,k} = n! \text{Vol}(\mathcal{C})$ pour tous i, j : le simplexe \mathcal{S} est donc équivalent à un simplexe (entier) contenu dans le cube $[0, n! \text{Vol}(\mathcal{C})]^n$.

- 14.** Un simplexe entier \mathcal{S} possédant exactement k points intérieurs entier est équivalent à un simplexe \mathcal{S}' contenu dans le cube $[0, n! C(n, k)]^n$. Comme il n'existe qu'un nombre fini de tels simplexes (les $n + 1$ sommets de \mathcal{S}' doivent appartenir à l'ensemble fini $\{0, \dots, n! C(n, k)\}^n$), il n'existe à équivalence près qu'un nombre fini de simplexes de \mathbb{R}^n ayant exactement k points intérieurs.

On remarquera que la propriété $k \geq 1$ est indispensable, puisque le volume d'un simplexe entier sans point intérieur entier est non bornée dès que $n \geq 2$ (question 8): il existe donc une infinité de simplexes entiers sans points intérieurs entiers et deux à deux non équivalents.