

Partie 1 : Quelques résultats préliminaires

1.1) φ et ψ sont C^∞ sur $[1, +\infty[$ et $\forall x \in [1, +\infty[$:

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0$$

$$\psi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-1}{(x+2)(x+1)^2} < 0.$$

φ est donc croissante et ψ décroissante sur $[1, +\infty[$.

En outre, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x) = 0$.

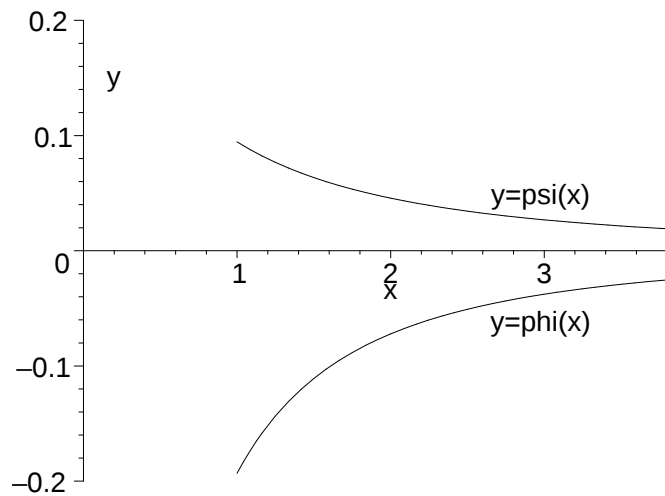
D'où les tableaux de variations :

x	1	$+\infty$		x	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	1/4	+		$\psi'(x)$	-1/12	-
$\varphi(x)$	1/2 - ln 2	↗	0	$\psi(x)$	1/2 - ln 3/2	↘ 0

On obtient :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \varphi(x) < 0 \text{ et } \psi(x) > 0$$

1.2) On obtient ainsi les représentations graphiques :



2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \varphi(n) < 0$ et (u_n) est décroissante.

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \psi(n) > 0$ et (v_n) est croissante.

Enfin $u_n - v_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ qui tend vers 0 en $+\infty$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.

3.1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. f est une fonction rationnelle continue sur $]0, 1]$. En 0, $f(x) = \frac{1 - (1 - nx + o(x))}{x} = n + o(1)$ et f se prolonge par continuité en 0. D'où :

$$f \text{ est intégrable sur }]0, 1].$$

$$\begin{aligned}
3.2) \quad f(X) &= \frac{1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^k}{X} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^k}{X} \\
&= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} X^{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} X^k
\end{aligned}$$

et :

$$f(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n}{k+1} X^k$$

3.3) La famille $(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{n-1})$ est une famille de polynômes de degrés échelonnés, donc libre dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'autre part, $\dim \mathbb{R}_{n-1}[X] = n$ et la famille comprend n polynômes :

$(1, X-1, (X-1)^2, \dots, (X-1)^{n-1})$ est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$$\begin{aligned}
\text{On a aussi} \quad f(X) &= \frac{X \sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k}{X} \text{ car } a^n - b^n = (a-b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (1-X)^k
\end{aligned}$$

et :

$$f(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (X-1)^k$$

3.4) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{n}{p+1} \int_0^1 x^p dx \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{n}{p+1} \frac{1}{p+1} \\
&= \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1} \binom{n}{p}}{p}
\end{aligned}$$

et de même :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(x) dx &= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \int_0^1 (x-1)^p dx \\
&= \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \frac{(-1)^{p+2}}{p+1} \\
&= \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{p=1}^n \frac{(-1)^{p-1} \binom{n}{p}}{p} = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$$

Partie 2 : Transformée de Laplace

4) $\int_x^a \ln(t) dt = [t \ln(t) - t] = a \ln(a) - a - x \ln(x) + x$ qui tend vers $a \ln(a) - a$ quand x tend vers 0.

On en déduit que $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln$ (continue sur $]0, a]$ et de signe constant sur $]0, 1])$ est intégrable sur $]0, a]$.

En outre, l'on sait que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x) < x$ et donc, pour $A = 1$, $\beta = 1$ et $n = 1$, $\forall x \in [A, +\infty[$, $0 \leq \ln(x) < \beta x^n$.

Donc $\ln \in E$.

5) Soient f et $g \in E$ et λ et $\mu \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda f + \mu g \in C([0, +\infty[, \mathbb{C})$, $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur tout $]0, a]$, $a > 0$, et s'il existe $A, B > 0$, $\beta, \gamma > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall x \in [A, +\infty[, |f(x)| \leq \beta x^n$$

$$\forall x \in [B, +\infty[, |g(x)| \leq \gamma x^m,$$

et par exemple $n \leq m$, $\exists C > 0$ tel que si $x > C$, $|\lambda| \beta x^{n-m} \leq |\lambda| \beta$. D'où pour $x > \max(A, B, C) = D$

$$\begin{aligned} |(\lambda f + \mu g)(x)| &\leq |\lambda| |f(x)| + |\mu| |g(x)| \\ &\leq |\lambda| \beta x^n + |\mu| \gamma x^m \\ &\leq (|\lambda| \beta x^{n-m} + |\mu| \gamma) x^m \\ &\leq (|\lambda| \beta + |\mu| \gamma) x^m \end{aligned}$$

Donc $\lambda f + \mu g \in E$. Comme $E \neq \emptyset$,

E est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, sous-espace de $C([0, +\infty[, \mathbb{C})$

6) Tout d'abord, φ_x est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

D'autre part, $\exists A > 0$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tels que pour $x > A$, $|f(x)| \leq \beta x^n$. D'où pour $t > A$, $|\varphi_x(t)| \leq \beta t^n e^{-xt}$. On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \varphi_x(t) = 0$, ce qui permet d'affirmer que φ_x est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Enfin $|\varphi_x| \leq |f|$ ce qui permet d'affirmer que φ_x est intégrable sur $]0, 1]$.

Donc,

φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$

7) $\mathcal{L}$ est linéaire car l'intégrale est linéaire.

8) f est continue sur $\mathbb{R}^+$; donc f est intégrable sur tout $]0, a]$, ($a > 0$).

Il existe $A > 0$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tels que $\forall u \geq A$, $|f'(u)| \leq \beta u^n$

D'où, pour tout $t \geq A$,

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |f(A) + \int_A^t f'(u) du| \\ &\leq |f(A)| + \int_A^t |f'(u)| du \\ &\leq |f(A)| + \int_A^t \beta u^n du \\ &\leq |f(A)| + \beta \frac{t^{n+1} - A^{n+1}}{n+1} \\ &\leq |f(A)| + \beta \frac{t^{n+1} + A^{n+1}}{n+1} \\ &\leq K + \gamma t^{n+1} \text{ (avec } K = |f(A)| + \frac{A^{n+1}}{n+1} \text{ et } \gamma = \frac{\beta}{n+1}) \end{aligned}$$

Or $\exists B > 0$, $t \geq B \Rightarrow K t^{-n-1} \leq 1$.

Pour $t \geq \max(A, B)$, $|f(t)| \leq (\gamma + 1)t^{n+1}$ et $f \in E : \mathcal{L}$ a un sens.

Soient $u, v > 0$. Alors :

$\int_u^v f(t)e^{-xt}dt = \left[-f(t)\frac{e^{-xt}}{x}\right]_u^v + \int_u^v f'(t)\frac{e^{-xt}}{x}dt$ par intégration par parties. En faisant tendre u vers 0 et v vers $+\infty$, on obtient :

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt = \frac{f(0)}{x} + \frac{\mathcal{L}(f')(x)}{x} \text{ et}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \mathcal{L}(f')(x) = x\mathcal{L}(f)(x) - f(0)}$$

9) Soit $k \in \mathbb{N}$;

- $f_k \in C(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$

- f_k se prolonge par continuité sur tout $[0, a]$, $a > 0$. Ce qui montre que f_k est intégrable sur tout $]0, a]$, $a > 0$.

- D'autre part, pour $A = 1$, $\beta = 1$, $n = k$ et $t \geq A$, $|f_k(t)| = t^k \leq \beta t^n$.

$$\boxed{\text{Donc } f_k \in E}$$

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \int_0^\alpha t^{k+1}e^{-xt}dt \\ &= \left[-\frac{t^{k+1}e^{-xt}}{x}\right]_0^\alpha + \frac{1}{x} \int_0^\alpha (k+1)t^k e^{-xt} dt \text{ (par intégration par parties)} \\ &= -\frac{\alpha^{k+1}e^{-x\alpha}}{x} + \frac{k+1}{x} I_k \end{aligned}$$

et en faisant tendre α vers $+\infty$, l'on obtient $\forall x > 0$, $\mathcal{L}(f_{k+1})(x) = \frac{k+1}{x}\mathcal{L}(f_k)(x)$, ce qui montre par récurrence simple :

$\forall x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_k)(x) &= \frac{k}{x} \mathcal{L}(f_{k-1})(x) \\ &= \frac{x_k!}{x^k} \mathcal{L}(f_0)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \mathcal{L}(f_0)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt \\ &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\forall x > 0, \forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{L}(f_k)(x) = \frac{k!}{x^{k+1}}}$$

10.1) $f_\omega \in E$ car elle se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et elle est de module 1.

10.2) Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f_\omega)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{i\omega t} e^{-xt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{t(i\omega - x)} dt \\ &= \left[\frac{e^{t(i\omega - x)}}{i\omega - x} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{x - i\omega} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(f_\omega)(x) = \frac{1}{x - i\omega} = \frac{x + i\omega}{x^2 + \omega^2}$$

10.3) En passant aux parties réelle et imaginaire, on obtient :

$$\forall x > 0, \mathcal{L}(\cos_\omega)(x) = \frac{x}{x^2 + \omega^2} \text{ et } \mathcal{L}(\sin_\omega)(x) = \frac{\omega}{x^2 + \omega^2}$$

Partie 3 : Transformée de Laplace de la fonction de Bessel

11) Soit g l'application de $\mathbb{R} \times [0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à (t, θ) associe $\cos(t \cos \theta)$.
 g est évidemment C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, \pi] = U$.

$$\text{En outre, } \forall (t, \theta) \in U, \left\{ \begin{array}{l} |g(t, \theta)| \leq 1 \\ \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, \theta) \right| = |-\cos \theta \sin(t \cos \theta)| \leq 1 \\ \left| \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(t, \theta) \right| = |-\cos^2 \theta \cos(t \cos \theta)| \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{et l'intégrale } \int_0^\pi d\theta \text{ converge.}$$

Cela permet d'affirmer que J est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{l} J'(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \theta \sin(t \cos \theta) d\theta \\ J''(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cos(t \cos \theta) d\theta \end{array} \right.$$

12) Intégrons par parties l'intégrale qui donne J' .

$$\forall t \in \mathbb{R}, J'(t) = -\frac{1}{\pi} \left([\sin \theta \sin(t \cos \theta)]_0^\pi + \int_0^\pi t \sin^2 \theta \cos(t \cos \theta) d\theta \right) \Rightarrow$$

$$J'(t) = -\frac{t}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta \cos(t \cos \theta) d\theta$$

$$13) \forall t \in \mathbb{R}, tJ''(t) + J'(t) + tJ(t) = \frac{t}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) (-\cos^2 \theta - \sin^2 \theta + 1) d\theta = 0. \text{ D'où :}$$

$$J \text{ est solution de l'équation différentielle } (E) : tJ'' + J' + tJ = 0$$

14) J est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et intégrable sur tout $]0, a]$ où $a > 0$.

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, } \forall t \in [1, +\infty[, |J(t)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos(t \cos \theta)| d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\theta \\ &\leq 1 t^0 \end{aligned}$$

D'où $J \in E$.

$$15.1) \theta \rightarrow \frac{1}{x^2 + \cos^2 \theta} \text{ est } \pi\text{-périodique et paire. D'où :}$$

$$I(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{x^2 + \cos^2 \theta} d\theta = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2 + \cos^2 \theta} d\theta$$

15.2) Dans l'intégrale proposée, posons $\theta = \arctan u$. Cela est possible car $\arctan$ est un difféomorphisme de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. On obtient :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2 + \cos^2 \theta} &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{du}{1+u^2}}{x^2 + \frac{1}{1+u^2}} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 x^2 + 1 + x^2} \\
&= \frac{1}{1+x^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1 + \left(\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2} \\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{xdu}{\sqrt{1+x^2}}}{1 + \left(\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}} \right)^2} \\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \left[\arctan \left(\frac{ux}{\sqrt{1+x^2}} \right) \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^2 + \cos^2 \theta} = \frac{\pi}{2x\sqrt{1+x^2}} \text{ et } I(x) = \frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

16) La transformée de Laplace de J s'exprime, pour $x > 0$ par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(J)(x) &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(t \cos \theta) d\theta \right) e^{-xt} dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\int_0^{+\infty} \cos(t \cos \theta) e^{-xt} dt \right) d\theta
\end{aligned}$$

Or, en posant $a = \cos \theta$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \cos(at) e^{-xt} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{t(ia-x)} + e^{-t(ia+x)}}{2} dt \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{t(ia-x)}}{ia-x} - \frac{e^{-t(ia+x)}}{ia+x} \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia} \right) \\
&= \frac{x}{x^2 + a^2} \\
&= \frac{x}{x^2 + \cos^2 \theta}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(J)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{x}{x^2 + \cos^2 \theta} d\theta \\
&= \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi}{x\sqrt{1+x^2}} \text{ (d'après 15.2) } \\
&= \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\forall x > 0, \mathcal{L}(J)(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

Partie 4 : Transformée de Laplace de la fonction logarithme

17) g est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En 0, $\lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t} g(t) = 0$ (la puissance "l'emportant" sur le logarithme) et g est intégrable sur $]0, 1]$.

En 0, $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 g(t) = 0$ (l'exponentielle "l'emportant" sur le logarithme et la puissance) et g est intégrable sur $[1, +\infty[$.

D'où g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

18.1) $\ln$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\forall t > 0$, $\ln''(t) = -\frac{1}{t^2}$: $\ln$ est concave et sa courbe représentative est située en dessous de ses tangentes, en particulier au point d'abscisse 1. D'où :

$$\boxed{\forall u \in]-1, +\infty[, \ln(1+u) \leq u}$$

L'on en déduit que si $x \in]0, n[$, $-\frac{x}{n} \in]0, 1[$ et $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -\frac{x}{n} \Rightarrow$
 $\exp\left(\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{x}{n}\right) \Rightarrow$
 $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}$ ($n > 0$, $u \rightarrow u^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$).

(Erreur d'énoncé : pour $x \in]0, n[$, il faut prendre $U_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x)$.)

D'où, pour $x \in]0, n[$, $0 \leq |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)|$

Pour $x \in [n, +\infty[$, $0 = |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)|$.

On a montré :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq |U_n(x)| \leq e^{-x} |\ln(x)|}$$

18.2) x étant fixé, à partir d'un certain rang n ($E(x) + 1$), l'on a $x < n$ et

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(x) \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \ln(x) \end{aligned}$$

Or $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x}{n}$. D'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(x) = e^{-x} \ln(x)}$$

19.1) $h :]0, n] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $]0, n]$.

$$t \rightarrow \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$$

En outre $h(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ et $\ln$ est intégrable sur $]0, n]$ et de signe constant sur $]0, 1]$.

Donc h est intégrable sur $]0, n]$ et J_n existe.

$$\begin{aligned} 19.2) \int_{\varepsilon}^1 u^p \ln(nu) du &= \left[\frac{u^{p+1} \ln(nu)}{p+1} \right]_{\varepsilon}^1 - \int_{\varepsilon}^1 \frac{u^{p+1}}{u(p+1)} du \\ &= \frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{\varepsilon^{p+1} \ln(n\varepsilon)}{p+1} - \int_{\varepsilon}^1 \frac{u^p}{p+1} du \\ &= \frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{\varepsilon^{p+1} \ln(n\varepsilon)}{p+1} - \frac{1 - \varepsilon^{p+1}}{(p+1)^2} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\int_{\varepsilon}^1 u^p \ln(nu) du = \frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{\varepsilon^{p+1} \ln(n\varepsilon)}{p+1} - \frac{1 - \varepsilon^{p+1}}{(p+1)^2}}$$

En faisant tendre ε vers 0, le second membre tend vers $\frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}$ ce qui montre que :

$$\boxed{\int_0^1 u^p \ln(nu) du \text{ converge et vaut } \frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
 19.3) \quad \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1} &= \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!} \\
 &= \frac{1}{p+1} \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
 &= \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}
 \end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{p+1} = \frac{1}{p+1} \binom{n}{p}}$$

$$\begin{aligned}
 19.4) \quad J_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ln(t) \, dt \\
 &= n \int_0^1 (1-u)^n \ln(nu) \, ds \text{ (changement de variable valide } t = nu) \\
 &= n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p \int_0^1 u^p \ln(nu) \, du \\
 &= n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} (-1)^p \left(\frac{\ln(n)}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} \right) \text{ (d'après 19.2)} \\
 &= n \ln(n) \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \frac{(-1)^p}{p+1} + n \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)^2} \binom{n}{p} \\
 &= \frac{n \ln(n)}{n+1} \sum_{p=0}^n \binom{n+1}{p+1} (-1)^p + \frac{n}{n+1} \sum_{p=0}^n \frac{(-1)^{p+1}}{p+1} \binom{n+1}{p+1} \text{ (d'après 19.3)} \\
 &= \frac{n \ln(n)}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} (-1)^{p-1} + \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^p}{p} \binom{n+1}{p} \text{ (translation d'indice)} \\
 &= \frac{n \ln(n)}{n+1} \left(- \underbrace{\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} (-1)^p}_{(1-1)^{n+1}=0} + 1 \right) + \frac{n}{n+1} \left(- \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \binom{n+1}{p} \right) \\
 &= \frac{n \ln(n)}{n+1} - \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \text{ (d'après 3.4)} \\
 &= \frac{n}{n+1} \left(\ln n - \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p} \right) \\
 &= \frac{n}{n+1} \left(-u_n - \frac{1}{n+1} \right)
 \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{J_n = \frac{n}{n+1} \left(-u_n - \frac{1}{n+1} \right)}$$

20) On déduit de la question précédente que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -\gamma$.

$$\begin{aligned}
 \text{Or } \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) \, dx &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} U_n(x) \, dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n U_n(x) \, dx \text{ (} U_n(x) = 0 \text{ pour } x > n \text{)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n \\
 &= -\gamma
 \end{aligned}$$

On a montré :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x} \ln(x) \, dx = -\gamma}$$

21) On a montré dans la question 4 que $\ln \in E$: sa transformée de Laplace est donc définie.

On a alors pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\ln)(x) &= \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ln(t) \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln\left(\frac{u}{x}\right) \frac{du}{x} \quad (t \rightarrow u = xt \text{ est un difféomorphisme de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^{+*}) \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \ln(u) \, du - \frac{\ln(x)}{x} \int_0^{+\infty} e^{-u} \, du \\ &= \frac{-\gamma - \ln(x)}{x} \end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\mathcal{L}(\ln)(x) = \frac{-\gamma - \ln(x)}{x}}$$

△△△

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI

Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal, 22000 St Brieuc

Tel. 0296639414

Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr