

13 Mai 2002

Application du produit vectoriel à la recherche des plans stables par $u \in L(\mathbb{R}^3)$ et généralisation à \mathbb{R}^4 .

Ch Cumenge

Partie I : étude dans E_3

$$\mathbf{I-A} \quad \widetilde{U}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \widetilde{U}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

I-B Les deux applications $(x, y) \mapsto \widetilde{u}(x \wedge y)$ et $(x, y) \mapsto u(x) \wedge u(y)$ sont bilinéaires et alternées de $E \times E$ dans E ; il suffit donc de vérifier qu'elles sont égales sur les trois couples (e_1, e_2) , (e_1, e_3) et (e_2, e_3) , ce qui résulte de la définition de \widetilde{u} : $\forall (x, y) \in E^2 \quad \widetilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$

Si $\forall (x, y) \quad v(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$, alors $\forall (x, y) \in E^2, (v - \widetilde{u})(x \wedge y) = 0$; or les trois vecteurs de la base s'écrivent comme produits vectoriels, donc : $v - \widetilde{u} = 0_{L(E)}$.

I-C • $\widetilde{Id}_E = Id_E$ car (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormale directe.

• $\widetilde{u \circ v}(x \wedge y) = (u \circ v)(x) \wedge (u \circ v)(y) = u(v(x)) \wedge u(v(y)) = \widetilde{u}(v(x) \wedge v(y)) = \widetilde{u}(\widetilde{v}(x \wedge y)) = (\widetilde{u} \circ \widetilde{v})(x \wedge y)$ ceci $\forall (x, y) \in E^2$, en utilisant I-B, d'où : $\widetilde{u \circ v} = \widetilde{u} \circ \widetilde{v}$, toujours d'après B.

• Si u est inversible, $Id_E = \widetilde{Id}_E = \widetilde{u \circ u^{-1}} = \widetilde{u} \circ \widetilde{u^{-1}}$, donc \widetilde{u} est inversible et : $(\widetilde{u})^{-1} = \widetilde{u^{-1}}$.

I-D • Désignons par C_j les vecteurs-colonnes de U et par \widetilde{C}_j ceux de \widetilde{U} .

On a $\widetilde{C}_1 = C_2 \wedge C_3$, $\widetilde{C}_2 = -C_3 \wedge C_1$, $\widetilde{C}_3 = C_1 \wedge C_2$, ce qui donne en ligne i de \widetilde{C}_j le cofacteur de U_{ij} (noter qu'on récupère les signes sous la forme : $(-1)^{(i-1)+(j-1)!}$). On obtient : $\widetilde{U} = com(U)$.

• Nous savons que ${}^t com(U) \times U = det(U).I_3$ d'où ${}^t U \times com(U) = det(U).I_3$, soit ${}^t U \times \widetilde{U} = det(U).I_3$, et, passant aux endomorphismes, $u^* \circ \widetilde{u} = det(u).id_E$.

• On a aussi, en développant cette fois le déterminant suivant les lignes, $U \times {}^t com(U) = det(U).I_3$, d'où : $\widetilde{u} \circ u^* = det(u).id_E = u^* \circ \widetilde{u}$.

• Comme $com({}^t U) = {}^t(com(U))$, et en utilisant $com(U) = \widetilde{U}$, on obtient $\widetilde{u^*} = \widetilde{u}^*$.

I-E 1°) La relation $u^* \circ \widetilde{u} = det(u).Id_E$ fournit : $det(u^*).det(\widetilde{u}) = (det(u))^3$; or $det(u^*) = det(u)$, donc, si $det(u) \neq 0$, on obtient : $det(\widetilde{u}) = (det(u))^2$.

Par ailleurs cette relation fournit directement : $(\widetilde{u})^{-1} = \frac{1}{det(u)}.u^*$.

2°) On suppose cette fois u non inversible. Distinguons suivant le rang de u .

Si $u=0$ alors $\widetilde{u} = 0$. Si $rg(u)=1$, alors $u(e_1)$, $u(e_2)$ et $u(e_3)$ sont colinéaires donc $\widetilde{u} = 0$.

Si $rg(u)=2$ alors $Im(u)$ est un plan vectoriel, $Im(\widetilde{u})$ est la droite orthogonale à ce plan, donc \widetilde{u} est de rang 1, et $Ker(\widetilde{u})=Im(u^*)$ (qui est un plan) puisque $\widetilde{u} \circ u^* = 0$. Dans tous ces cas on a évidemment : $det(\widetilde{u}) = 0$.

Je n'ai pas bien compris le sens de cette question, en particulier en rapport avec le début de la suivante.

I-F • Le rang de \widetilde{u} , et même de façon plus précise son image, ont été déterminés au-dessus.

• L'application $u \mapsto \widetilde{u}$ n'est pas linéaire; en fait elle ne vérifie ni $\widetilde{u+v} = \widetilde{u} + \widetilde{v}$ - voir $U = I_3$ et $V = ((1))$ -, ni $\widetilde{\lambda u} = \lambda \widetilde{u}$ - car $det(\widetilde{u}) = (det(u))^2$ -.

• Cette application n'est pas injective puisque $\widetilde{u} = 0$ lorsque u est de rang 1; elle n'est pas non plus surjective car les endomorphismes de rang 2 ne sont pas atteints.

Partie II : recherche de plans stables par $u \in L(E_3)$

II-A • $\tilde{u}(x \wedge y) = u(x) \wedge u(y)$ (cf I-B) est normal à $\text{Vect}(x,y)$ (ou nul) puisque $\text{Vect}(x,y)$ est stable par u ; donc $\tilde{u}(x \wedge y)$ est colinéaire à $x \wedge y$ qui est par conséquent un vecteur propre de \tilde{u} (noter que $x \wedge y \neq 0_E$ puisque (x,y) est une famille libre).

• Considérons la base orthonormalisée de Schmidt $B' = (x', y', n)$ de la base $(x, y, x \wedge y)$ de E . On a $\tilde{u}(n) = \lambda.n$, où λ est la valeur propre cherchée. Or $\tilde{u}(n) = u(x') \wedge u(y')$ car $n = x' \wedge y'$; dans la base *orthonormée* B' , la matrice de u étant de la forme $\begin{pmatrix} a & b & . \\ c & d & . \\ 0 & 0 & . \end{pmatrix}$, on a $\tilde{u}(n) = (ad - bc).n$, d'où : $\lambda = ad - bc = \det(u|_{B'})$.

II-B • x orthogonal à z et normé et $y=z \wedge x$ donnent $x \wedge y = z$.

• $B = (x, y, z)$ est alors une b.o.n.d. de E ; soit $M(u)|_B = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & . \\ a_2 & b_2 & . \\ a_3 & b_3 & . \end{pmatrix}$; comme $u(x) \wedge u(y) = \tilde{u}(z) = \lambda.z$, on obtient $\lambda = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$ (par hypothèse sur λ). On a également le système :

$$\begin{cases} a_3 b_1 - a_1 b_3 = 0 \\ a_3 b_2 - a_2 b_3 = 0 \end{cases}$$

Considéré comme système en (a_3, b_3) , c'est un système de Cramer d'où $a_3 = b_3 = 0$, et par conséquent $\text{Vect}(x,y)$ est stable par u .

II-C et D • $\det(\tilde{u}) = (\det(u))^2$ (cf I-E-1), donc les deux déterminants s'annulent simultanément, et 0 est valeur propre de u si et seulement si 0 est valeur propre de \tilde{u} .

• Tout plan étant stable par $\pm \lambda.id_E$, les plans stables par u sont les plans stables par $u - \lambda.id_E$.

• II-a et II-B montrent que, si u est inversible, les plans stables par u sont les orthogonaux des droites stables par \tilde{u} . Dans le cas de U_1 , $\chi_{\tilde{U}_1}(X) = -(X-1)^3$, la seule droite stable est $\text{Vect}(e_1 - e_2 + e_3)$, donc le seul plan stable par u_1 est $(x-y+z)=0$.

• Si u n'est pas inversible, u a au plus 3 valeurs propres distinctes; on choisit λ_0 différent de celles-ci et on applique la méthode précédente à $u - \lambda_0.id_E$.

Cas de u_2 : 0 est l'unique valeur propre de u_2 , donc $u_2 - id_E$ est inversible.

$U_2 - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\widetilde{U_2 - I_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 1 est la seule valeur propre de $u_2 - id_E$, d'ordre 1 et de vecteur propre associé $(e_1 - e_3)$; il y a donc un unique plan stable par u_2 , d'équation $(x=z)$.

Partie III : un "produit vectoriel" de $(\mathbb{R}^4)^2$ dans \mathbb{R}^6

III-A $B = 0 \implies (\zeta, \zeta')$ est liée; si $\zeta = 0$ et $\zeta' \neq 0$ alors $a=0$ donc $X=0$; si $\zeta \neq 0$ alors $\exists \lambda$ tel que $\zeta' = \lambda.\zeta$ et la condition $A=0$ fournit $a' = \lambda a$, donc $Y = \lambda X$.

La condition "X et Y sont colinéaires" est donc nécessaire; il est clair qu'elle est suffisante.

III-B $\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = \langle a\zeta' - a'\zeta, \zeta \wedge \zeta' \rangle = a(\zeta', \zeta, \zeta') - a'(\zeta, \zeta, \zeta') = 0$ (produits mixtes).

III-C 1°) Avec les notations de l'énoncé on a $\zeta = C$ et $B = \zeta \wedge \zeta'$ donc la condition $C.B = 0$ est remplie. L'équation $B = C \wedge \zeta'$ fournit $\zeta' = \frac{1}{\|C\|^2}.(B \wedge C) + t.C$ (pour $t \in \mathbb{R}$). Puis (condition (C)) $A.B = 0$ donne $\langle \frac{a}{\|C\|^2}.(B \wedge C) + at.C - a'.C, B \rangle = 0$ qui est toujours vérifiée.

Il reste : $\frac{a}{\|C\|^2}.(B \wedge C) + (at - a').C = A$ (*), d'où $a = \frac{\|A\|^2.\|C\|^2 - (A.C)^2}{(A, B, C)}$ (et $a=0$ si (A, B, C) est liée), et $a' = at - \frac{A.C}{\|C\|^2}$, ces deux égalités étant obtenues en effectuant les produits scalaires de (*) par A et C .

En résumé : pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$X = \begin{pmatrix} a \\ \zeta \end{pmatrix} \text{ avec } (a = \frac{\|A\|^2 \cdot \|C\|^2 - (A \cdot C)^2}{(A, B, C)}, \zeta = C) \text{ (et } a=0 \text{ si } (A, B, C) \text{ est liée)}$$

$$Y = \begin{pmatrix} a' \\ \zeta' \end{pmatrix} \text{ avec } (a' = at - \frac{A \cdot C}{\|C\|^2}, \zeta' = \frac{1}{\|C\|^2} \cdot (B \wedge C) + t \cdot C) .$$

On vérifie sans difficulté que ces couples (X, Y) conviennent.

$$2^\circ) A = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad : \text{ on a bien } A \cdot B = 0 \text{ et } B \cdot C = 0 .$$

$$B = C \wedge \zeta' \text{ donne } \zeta' = \begin{pmatrix} 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ puis } a=1 \text{ et } a'=t-2, \text{ soit : } \{ (X, Y) \text{ tels que } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} t-2 \\ 2 \\ t \\ 4 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \}$$

3°) Les couples (X, Y) convenables sont ceux décrits dans le 1°), avec C parcourant le plan B^\perp privé du vecteur nul.

4°) On suppose $B = 0$.

• Si $\Sigma = 0$ on peut considérer les couples (ζ, ζ') de vecteurs colinéaires, avec les couples (a, a') tels que $a\zeta' - a'\zeta = 0$

• Si $\Sigma \neq 0$, soit $A \neq 0$; alors ζ et ζ' sont colinéaires et $A = a\zeta' - a'\zeta$ impose $(\zeta = \alpha \cdot A, \zeta' = \alpha' \cdot A)$ avec : $a\alpha' - a'\alpha = 1$; on obtient comme solutions les couples (X, Y) de la forme $(X = \begin{pmatrix} a \\ \alpha \cdot A \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a' \\ \alpha' \cdot A \end{pmatrix})$ avec

$$a\alpha' - a'\alpha = 1 . \text{ Dans ce cas, } Vect(X, Y) \text{ est le plan : } Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{pmatrix} \right) .$$

III-D Les conditions sont $(aa' + \zeta \cdot \zeta' = 0, a^2 + \|\zeta\|^2 = 1, (a')^2 + \|\zeta'\|^2 = 1)$; on en déduit :

$$\|a\zeta' - a'\zeta\|^2 = a^2\|\zeta'\|^2 + (a')^2\|\zeta\|^2 - 2aa'(\zeta \cdot \zeta') = a^2(1 - (a')^2) + (a')^2(1 - a^2) + 2a^2(a')^2 = a^2 + (a')^2$$

$$\|\zeta \wedge \zeta'\|^2 = \|\zeta\|^2 \cdot \|\zeta'\|^2 - (\zeta \cdot \zeta')^2$$

$$\text{Enfin : } \|X \times Y\|^2 = \|A\|^2 + \|B\|^2 = \|a\zeta' - a'\zeta\|^2 + \|\zeta \wedge \zeta'\|^2 = 1 .$$

$$\text{III-E L'énoncé suggère de poser : } X = \begin{pmatrix} a \\ \zeta \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a' \\ \zeta' \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} a'' \\ \zeta'' \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} a^{(3)} \\ \zeta^{(3)} \end{pmatrix} .$$

L'hypothèse devient : $aa^{(3)} + \zeta \cdot \zeta^{(3)} = a'a^{(3)} + \zeta' \cdot \zeta^{(3)} = 0$.

On écrit : $X \times Y = \begin{pmatrix} a\zeta' - a'\zeta \\ \zeta \wedge \zeta' \end{pmatrix}$ et $Z \times T = \begin{pmatrix} -a^{(3)}\zeta'' + a''\zeta^{(3)} \\ \zeta'' \wedge \zeta^{(3)} \end{pmatrix}$. A l'aide de la formule indiquée on obtient :

$$(X \times Y) \cdot (Z \times T) = -(aa^{(3)} + \zeta \cdot \zeta^{(3)})(\zeta' \cdot \zeta'') + (a'a^{(3)} + \zeta' \cdot \zeta^{(3)})(\zeta \cdot \zeta'') + aa''(\zeta' \cdot \zeta^{(3)}) - a'a''(\zeta \cdot \zeta^{(3)}) = a''\zeta^{(3)} \cdot (a\zeta' - a'\zeta) .$$

III-F Les 6 vecteurs $(e_i \times e_j)$ sont normés d'après III-D; considérons deux distincts d'entre eux, $(e_i \times e_j)$ et $(e_{i'} \times e_{j'})$.

• Si $j \neq j'$ on peut toujours supposer $j < j'$; alors III-E s'applique avec $(X = e_i, Y = e_j, Z = e_{i'}, T = e_{j'})$, ce qui fournit : $(e_i \times e_j) \cdot (e_{i'} \times e_{j'}) = 0$ si $i' \neq 1$ ($a''=0$), et ce produit scalaire est encore nul si $i'=1$ car dans ce cas, comme $i < j < j'$, ζ et ζ' sont orthogonaux à $\zeta^{(3)}$.

• Si $j=j'$ alors $i \neq i'$ et l'on peut utiliser le même argument avec les produits $(e_j \times e_i)$ et $(e_{j'} \times e_{i'})$, pour $i' \neq i$, en remarquant que le produit "×" est antisymétrique de par sa définition.

Partie IV : plans stables par $u \in L(\mathbb{R}^4)$

IV-A Si u est orthogonal alors $(u(e_i))_{i=1..4}$ est une b.o.n. de \mathbb{R}^4 , donc $(\tilde{u}(e_i \times e_j)) = (u(e_i) \times u(e_j))_{1 \leq i < j \leq 4}$ est une b.o.n. de \mathbb{R}^6 (cf III-F). Ainsi \tilde{u} transforme la b.o.n. $(e_i \times e_j)$ de \mathbb{R}^6 en une b.o.n., donc \tilde{u} est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{R}^6 .

IV-B Nous savons (cours) qu'un endomorphisme auto-adjoint u de \mathbb{R}^4 est diagonalisable dans une base or-

thonormée (f_1, \dots, f_4) de \mathbb{R}^4 , que nous pouvons supposer directe, quitte à changer f_4 en son opposé. Dans la base $\tilde{B} = (f_i \times f_j)_{i,j}$ de \mathbb{R}^6 on obtient : $\tilde{u}(f_i \times f_j) = u(f_i) \times u(f_j) = \lambda_i \lambda_j (f_i \times f_j)$; la matrice de \tilde{u} dans la base \tilde{B} est donc la matrice diagonale de terme générique $(\lambda_i \lambda_j)_{1 \leq i < j \leq 4}$. Cette matrice est évidemment symétrique, donc \tilde{u} est auto-adjoint.

IV-C REMARQUE : on a évidemment $\widetilde{id_{\mathbb{R}^4}} = id_{\mathbb{R}^6}$ (cf IV-B ou voir plus loin IV-E-4°), et comme $\widetilde{u \circ v} = \tilde{u} \circ \tilde{v}$ (admis dans l'énoncé), on obtient : pour u inversible \tilde{u} est inversible et $(\tilde{u})^{-1} = \widetilde{u^{-1}}$.

Donc $u = s \circ w \implies \tilde{u} = \tilde{s} \circ \tilde{w}$ d'où :

$$(\tilde{u})^* = (\tilde{w})^* \circ (\tilde{s})^* \stackrel{(B)}{=} (\tilde{w})^* \circ \tilde{s} \stackrel{(A)}{=} (\tilde{w})^{-1} \circ \tilde{s} \stackrel{(Remarque)}{=} (\widetilde{w^{-1}}) \circ \tilde{s} \stackrel{(admis)}{=} \widetilde{w^* \circ s} = \widetilde{w^*} \circ \widetilde{s} = (\widetilde{s \circ w})^* = (\tilde{u}^*)^* .$$

IV-D REMARQUE : $X \times X = 0$ et $Y \times X = -X \times Y$.

Si $Vect(X, Y)$ est stable par u , alors $u(X) = \alpha X + \beta Y$ et $u(Y) = \gamma X + \delta Y$ d'où $\tilde{u}(X \times Y) = u(X) \times u(Y)$ est égal à $(\alpha\delta - \beta\gamma)(X \times Y)$; donc $X \times Y$, qui n'est pas nul car X et Y ne sont pas colinéaires (cf III-A), est un vecteur propre de \tilde{u} .

IV-E 1°) $u^2 = -id_{\mathbb{R}^4}$; u n'a pas de vecteur propre car il n'a pas de valeur propre réelle ($\lambda^2 = -1$ impossible).

2°) $Vect(X, u(X)) = Vect(u(X), -X) = Vect(u(X), u^2(X))$ est stable par u ; c'est un plan car $(X, u(X))$ est libre (u n'ayant pas de vecteur propre). Réciproquement, soit X un vecteur non nul d'un plan P stable par u ; alors $u(X) \in P$ et $u(X)$ n'est pas colinéaire à X : $(X, u(X))$ est libre dans P , qui est un plan, donc $P = Vect(X, u(X))$.

$$3^\circ) \phi(X) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -t \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ yz - xt \\ xz + yt \\ z^2 + t^2 \\ xt - yz \\ -yt - xz \end{pmatrix}$$

4°) $\tilde{u}^2 = \tilde{u} \circ \tilde{u} = \widetilde{u^2} = (\widetilde{-id_{\mathbb{R}^4}}) = id_{\mathbb{R}^6}$; en effet $(\widetilde{-id_{\mathbb{R}^4}})(X \times Y) = -id_{\mathbb{R}^4}(X) \times -id_{\mathbb{R}^4}(Y) = X \times Y$.

On voit que, pour $X = (e_1)_{\mathbb{R}^4}$, on obtient $\phi(X) = (e_1)_{\mathbb{R}^6}$, et pour $X = (e_3)_{\mathbb{R}^4}$, on obtient $\phi(X) = (e_4)_{\mathbb{R}^6}$; les vecteurs numéros 1 et 4 de la base canonique de \mathbb{R}^6 sont donc, d'après 3°) et IV-D, des vecteurs propres de \tilde{u} .

$$5^\circ) \tilde{u}(X \times X') = u(X) \times u(X') = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ -t \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -y' \\ x' \\ -t' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy' - x'y \\ yt' - y't \\ y'z - z'y \\ t'z - tz' \\ x'z - xz' \\ x't - t'x \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où : } \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ car } X \times X' = \begin{pmatrix} xy' - x'y \\ xz' - x'z \\ xt' - x't \\ zt' - z't \\ y't - yt' \\ yz' - zy' \end{pmatrix} .$$

6°) \tilde{M} est symétrique donc diagonalisable.

7°) Un calcul rapide montre que $E_{+1} = Vect(e_1, e_4, e_2 - e_5, e_3 - e_6)$, qui est de dimension 4, donc 1 est valeur propre d'ordre 4 puisque \tilde{M} est diagonalisable.

De même $E_{-1} = Vect(e_2 + e_5, e_3 + e_6)$ donc (-1) est valeur propre double.

8°) Un vecteur Σ de E_{-1} est de la forme ${}^t(0, a, b, 0, a, b, 0)$ donc $\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = a^2 + b^2$, qui ne s'annule que pour $a = b = 0$, soit $\Sigma = 0$.

9°) Un vecteur Σ de E_{+1} est de la forme ${}^t(0, a, b, c, d, -b, -c)$ donc $\langle p(\Sigma), p'(\Sigma) \rangle = ad - b^2 - c^2$, qui s'annule pour $ad = b^2 + c^2$.

10°) Les vecteurs $\phi(X)$ du 3°) sont visiblement de la forme voulue; il reste à vérifier la condition du 9°), soit : $(x^2 + y^2)(z^2 + t^2) = (yz - xt)^2 + (xz + yt)^2$, ce qui est vrai.