Corrigé ENS BCPST 2009

Préliminaires : Equation logistique de dimension 1

1. Si y représente le nombre d'individus, r représente le taux de renouvellement (natalité - mortalité due à l'âge) et c le taux de mortalité due à la compétition inter-population (par exemple nourriture)

2. a) Si $y_0 = 0$
   Par le critère de Cauchy (Hors Programme), il y a unicité de la solution, et l'application nulle est une solution évidente, donc
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) = 0}$$
   b) Si $y_0 > 0$
   Soit un intervalle sur lequel y ne s'annule, on pose $z = 1/y$, z est alors dérivable sur cet intervalle , $z' = -y'/y^2$
   (1) équivaut à
   $$\boxed{z' = c - rz}$$
   Equation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constant sde solution : $z(t) = Ae^{-rt} + c/r$
   d'où $y(t) = \frac{1}{Ae^{-rt}+c/r}$ avec $y_0 = \frac{1}{A+c/r}$ d'où
   $$\boxed{y(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{y_0} - \frac{c}{r}\right) e^{-rt} + \frac{c}{r}}}$$
   c) $y'(t) = \dfrac{re^{-rt}}{\left(\left(\frac{1}{y_0} - \frac{c}{r}\right) e^{-rt} + \frac{c}{r}\right)^2} \left[-\frac{c}{r} + \frac{1}{y_0}\right]$
   - Si $y_0 < \dfrac{r}{c}$, $\quad y' \geq 0$, $\quad y$ est croissant et $\lim\limits_{t\to+\infty} y = \dfrac{r}{c}$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) \leq \max(y_0, \dfrac{r}{c})$
   - Si $y_0 \geq \dfrac{r}{c}$, $\quad y' \geq 0$, $\quad y$ est décroissant et $y(0) = y_0$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) \leq \max(y_0, \dfrac{r}{c})$
   $$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y(t) \leq \max(y_0, \frac{r}{c})}$$

3. Si $y_0 > 0$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} y = \dfrac{r}{c}$, $\quad y' = F(y) = y(y - cy)$ et $F\left(\dfrac{r}{c}\right) = 0$
   Si $y_0 = 0$, $\quad \lim\limits_{t\to+\infty} y = 0$ et $F(0) = 0$
   Dans tous les cas, cette limite est un équilibre de l'équation différentielle (1)

Première Partie : Systèmes de Lotka -Volterra compétitifs déterministes

1. Si y_i represente le nombre d'individus de l'espèce i
   r_1 est le taux de renouvellement de l'espèce 1 (naissance - mort naturelle)
   c_{11} est le taux de mortalité de la population 1 due à la présence de la population 1 (compétition intra -spécifique,)
   c_{12} est le taux de mortalité due à la population 2 (compétition inter -spécifique)

2. a) En résolvant le système $\left\{\begin{array}{l} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = r_1 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 = r_2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})y_2 = c_{11}f_2 \\ (c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21})y_1 = c_{22}f_1 \end{array}\right.$

f_1 et f_2 étant de signes opposés, y_1 et y_2 le sont aussi; il n'y a donc pas de solution telle que y_1 et y_2 soient positifs.

Les deux droites D_1 et D_2 n'ont pas de point d'intersection dans le quart de plan $(\mathbb{R}^+)^2$

Les deux droites ont une pente négative et coupent les 1/2 droites $[Oy_1)$ et $[Oy_2)$

$\dfrac{r_1}{c_{12}} < \dfrac{r_2}{c_{22}}$ car $f_1 < 0$ et $\dfrac{r_1}{c_{11}} < \dfrac{r_2}{c_{21}}$ car $f_2 > 0$ d'où D_1 est en dessous de D_2

D'où le graphe *:figure 1*

b) $f_1 f_2 < 0$. Par exemple $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$

On cherche y tel que $F(y) = 0 \quad (S)$

(S)$\iff \left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = 0 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0 \\ y_2 = \dfrac{r_2}{c_{22}} \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{r_1}{c_{11}} \\ y_2 = 0 \end{array}\right.$

Il n'y a que 3 équilibres et pas 4 car les droites D_1 et D_2 n'ont pas de point d'intersection dans le quart de plan.

Si on a $f_2 < 0$ et $f_1 > 0$, D_1 est au dessus de D_2 et il n'y a pas de point d'intersection et on trouve aussi 3 points d'équilibre.

c) $f_1 f_2 > 0$

On a bien sûr les 3 équilibres précédents

Si $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$, alors $\dfrac{r_1}{c_{12}} > \dfrac{r_2}{c_{22}}$ et $\dfrac{r_1}{c_{11}} < \dfrac{r_2}{c_{21}}$ et on a le graphe suivant *:figure 2*

Les droites D_1 et D_2 ont alors un point d'intersection dans le quart de plan, ce qui constitue un 4-ième point d'équilibre.

Même chose si $f_1 < 0$ et $f_2 < 0$

3. a) Soit u vérifiant : $u(t) = \exp\left(-r_1 t + c_{11}\int_0^t y_1(s)ds + c_{12}\int_0^t y_2(s)ds\right) y_1(t)$

$u'(t) = \exp\left(-r_1 t + c_{11}\int_0^t y_1(s)ds + c_{12}\int_0^t y_2(s)ds\right) \left[y_1'(t) - r_1 y_1(t) + c_{11}y_1^2(t) + c_{12}y_1(t)y_2(t)\right] = 0$

D'où $u(t) = u(0) = y_1(0)$;conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y_1(t) = y_1(0)\exp\left(r_1 t - c_{11}\int_0^t y_1(s)ds - c_{12}\int_0^t y_2(s)ds\right)}$$

Pour y_2 : $\quad y_2(t) = y_2(0)\exp\left(r_2 t - c_{21}\int_0^t y_1(s)ds - c_{22}\int_0^t y_2(s)ds\right)$

D'où la positivité des solutions est immédiate.

b) $z(t) = y_1(t) + y_2(t);\ \ z(0) \leq A$ avec $A > \overline{r}/\underline{c}$

Si $z(t) = A : z' = y_1(r_1 - c_{11}y_1 - c_{12}y_2) + y_2(r_2 - c_{21}y_1 - c_{22}y_2)$

$r_1 y_1 + r_2 y_2 \leq \overline{r}(y_1 + y_2) = \overline{r}A$

$-c_{11}y_1 - c_{12}y_2 \leq -\underline{c}A$ et $-c_{21}y_1 - c_{22}y_2 \leq -\underline{c}A$

D'où $z' \leq \overline{r}A - \underline{c}A(y_1 + y_2) = \overline{r}A - \underline{c}A^2 < 0$

$$\text{Pour } t \text{ tel que } z(t) = A, \quad z'(t) < 0$$

Supposons qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $z(t_0) > A$.

Notons $T = \sup\{t \leq t_0, z(t) \leq A\}$ .Ce sup existe car ensemble majoré non vide (contient 0)

Sur $]T, t_0]$, $\quad z(t) > A$.

Par continuité, $z(T) = A$, d'où $z'(T) < 0$ et z est décroissant dans un voisinage de T et $z(t) \leq A$ dans un voisinage de T.

Il y a donc contradiction

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad z(t) \leq A}$$

4. $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$

   a) *figure 3*

   b) Si $y \in E_1, \quad y_1' \geq 0$ et $y_2' \geq 0$
      Si $y \in E_2, \quad y_1' \leq 0$ et $y_2' \geq 0$
      Si $y \in E_3, \quad y_1' < 0$ et $y_2' < 0$
      Si $y \in D_1, \quad y_1' = 0$ et $y_2' > 0$
      Si $y \in D_2, \quad y_1' < 0$ et $y_2' = 0$

      Supposons qu'il existe $s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_2$;
      Nous allons faire le même type de raisonnement qu'au 3.b)
      Supposons qu'il existe $t_0 > s$ tel que $y(t_0) \in E_3$
      Notons $T = \sup\{t \leq t_0, y(t) \in E_2\}$ (ensemble non vide car $y(s) \in E_2$)
      $\forall t \in]T, t_0], \quad y(t) \notin E_2$. Par continuité, $\forall t \in]T, t_0], \quad y(t) \in E_3$ ou $\forall t \in]T, t_0], \quad y(t) \in E_1$
      Comme $y(t_0) \in E_3$, on en conclut que $\forall t \in]T, t_0], \quad y(t) \in E_3$.
      $y(T) \in D_2$ d'où $y_1'(T) < 0$ et $y_2'(T) = 0$;
      y_1 est décroissant dans un voisinage de T, d'où $y(t)$ est en dessous de D_2 dans un voisinage de T
      Ceci est contradictoire avec le fait que $\forall t \in]T, t_0], \quad y(t)$ est au dessus de D_2
      Conclusion :

$$\boxed{\forall t \geq s, \quad y(t) \in E_2}$$

   c) Supposons qu'il existe $s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_2$; alors $\forall t \geq s, \quad y(t) \in E_2$
      D'où y_1 est décroissant et y_2 est croissant sur $[t, +\infty[$
      y_1 est décroissant et minorée par 0, admet une limite finie en $+\infty$
      y_2 est croissant et majoré par $\dfrac{r_2}{c_{22}}$ (car $y(t) \in E_2$) admet une limite finie en $+\infty$
      y admet dont une limite finie y^* quand t tend vers $+\infty$

      Supposons que $\forall s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_1$
      y_1 est croissant et majoré par $\dfrac{r_1}{c_{11}}$ admet une limite finie en $+\infty$
      y_2 est croissant et majoré par $\dfrac{r_1}{c_{12}}$admet une limite finie en $+\infty$

      Supposons que $\forall s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_3$
      y_1 et y_2 sont décroissants et minorés par 0, admettent une limite finie en $+\infty$

      Ces 3 cas recouvrent tous les cas possibles en raison de la continuité de y.Dans tous les cas :

$$\boxed{y \text{ admet une limite finie } y^* \text{ quand } t \text{ tend vers } +\infty}$$

   d) Soit $\varepsilon \in]0, \dfrac{\underline{r}}{\overline{c}}[$
      Soit t tel que $y_1(t)+ y_2(t) = \varepsilon$
      $y_1'(t)+ y_2'(t) \geq \underline{r}\,(y_1(t) + y_2(t)) - y_1(t)\overline{c}\,(y_1(t) + y_2(t)) - y_2(t)\overline{c}\,(y_1(t) + y_2(t))$
      $y_1'(t)+ y_2'(t) \geq \varepsilon\,(\underline{r} - \overline{c}\varepsilon) > 0$
      Si $y_0 \neq (0,0)$
      Reprenons les 3 cas ci-dessus :

      i. Supposons que $\forall s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_3$, alors $y^* \in D_2$ et $y^* = (0, \dfrac{r_2}{c_{22}}) \neq (0,0)$

ii. Supposons qu'il existe $s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_2$; alors $\forall t \geq s, \quad y(t) \in E_2$
Alors $y^* \in E_2$ et $y^* \neq (0,0)$

iii. Supposons que $\forall s \geq 0$ tel que $y(s) \in E_1$ alors y_1 est croissant et y_2 est croissant, d'où $y^* \neq (0,0)$

$$\boxed{\text{Si } y_0 \neq (0,0)\text{ , alors } y^* \neq (0,0)}$$

e) Soit $\varepsilon \in]0, \dfrac{f_2}{2\overline{c}}[$ et soit t tel que $\left| y_1(t) - \dfrac{r_1}{c_{11}} \right| < \varepsilon$ et $0 < y_2(t) < \varepsilon$

$y_2'(t) = y_2(t) \left(f_2 - c_{21} \left(y_1(t) - \dfrac{r_1}{c_{11}} \right) - c_{22} y_2(t) \right)$

$y_2'(t) \geq y_2(t) \left(f_2 - c_{21}\varepsilon - c_{22}\varepsilon \right) \geq y_2(t) \left(f_2 - 2\overline{c}\varepsilon \right) > 0$

Soit $y_0 \neq (0,0)$, d'après la question précédente, il y a deux points d'équilibre possibles, $(\dfrac{r_1}{c_{11}}, 0)$ ou $(0, \dfrac{r_2}{c_{22}})$

Si $y_2(0) > 0$ d'après le 3.a), $\forall t \geq 0, \quad y_2(t) > 0$

Supposons que $y^* = (\dfrac{r_1}{c_{11}}, 0)$

Prenons un $\varepsilon \in]0, \dfrac{f_2}{2\overline{c}}[$, il existe t_0 tel que $\forall t \geq t_0$, $\left| y_1(t) - \dfrac{r_1}{c_{11}} \right| < \varepsilon$ et $0 < y_2(t) < \varepsilon$

D'où y_2 est strictement croissant sur $[\ t_0, +\infty[$ et ne peut donc tendre vers 0 en $+\infty$

Il y a donc contradiction : conclusion

$$\boxed{\text{Il y a un seul point d'équilibre } y^*=(0, \frac{r_2}{c_{22}})}$$

f) En résumé, dans le cas où $f_1 < 0$ et $f_2 > 0$:

Si $y_0 = (0,0)$, alors $y^* = (0,0)$ (

Si $y_0 = (0,a)$ avec a>0, alors $\forall t \geq 0, \quad y_2(t) = 0 \quad$ et $y^*=(\dfrac{r_1}{c_{11}}, 0)$

Dans tous les autres cas, alors $y^* = (0, \dfrac{r_2}{c_{22}})$: cela signifie, qu'à terme , l'espèce 1 disparaît.

Si on avait $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$, on montrerait l'erradication de l'espèce 2.

Dans tous les cas, à terme, il ne peut y avoir coexistence des 2 espéces

Deuxième partie : Le processus de Poisson

1. a) Il n'existe pas d'entier n tel que $S_n(\omega) \leq 0$, d'où $1_{\{S_n(\omega) \leq 0\}} = 0$ d'où $P(0, \omega) = 0$

Soit $t < t'$, si $S_n(\omega) \leq t$ alors $S_n(\omega) \leq t'$ d'où $P(t, \omega) \leq P(t', \omega)$

$P(t)$ est le plus grand entier n tel que $S_n(\omega) \leq t$

$\mathbb{P}\left(S_{n+1} > S_n\right) = \mathbb{P}\left(X_{n+1} > 0\right) = 1$

D'où n est le plus grand entier k tel que $S_k(\omega) \leq S_n(\omega)$; d'où

$$\boxed{P\left(S_n\right) = n}$$

A chaque temps aléatoire S_n, le processus augmente de 1

Considèrons une infinité de personnes passant à un guichet les unes après les autres. On suppose que le temps pour servir chacun des clients suit une loi $Exp(1)$ et ces temps sont indépendants.

S_n est le temps mis pour servir n personnes successivement

$P(t)$ est le nombre de personnes servies pendant l'intervalle de temps$[0, t]$

b) Démonstration très classique par récurrence à l'aide de la formule du produit de convolution qui n'est pas rappelé dans l'énoncé (**contrairement au programme)**

c) Soit $A > 0$

$\mathbb{P}\left(S_n \leq A\right) = \int_0^A \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x} dx \leq \dfrac{A^n}{(n)!}$; Par le thm des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(S_n \leq A\right) = 0$

$\forall n \geq 1, \quad 0 \leq \mathbb{P}\left(S_m \leq A, \forall m \in \mathbb{N}^*\right) \leq \mathbb{P}\left(S_n \leq A\right)$;

Par le thm des gendarmes,

$$\mathbb{P}\left(S_m \leq A, \forall m \in \mathbb{N}^*\right) = 0$$

d) Si S_n ne tend pas vers $+\infty$, comme la suite (S_n) est croissante, elle est majorée.

Il existe donc un entier N tel que $\forall n \geq 1, \quad S_n \leq N$

$\mathbb{P}(S_n \text{ ne tend pas vers } +\infty) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{N \geq 1} \left[\bigcap\limits_{n \geq 1} (S_n \leq N)\right]\right)$

Les événements $(S_n \leq N)_{n \geq 1}$étant décroissants : $0 \leq \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq 1} (S_n \leq N)\right) \leq \mathbb{P}\left(S_m \leq N\right)$, pour tout entier m

Par le thm des gendarmes, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n \geq 1} (S_n \leq N)\right) = 0$

Une union dénombrable d'événements quasi- impossibles est quasi-impossible,

d'où $\mathbb{P}(S_n \text{ ne tend pas vers } +\infty) = 0$; conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}(S_n \to +\infty) = 1}$$

Soit t un réel positif ;

Sauf sur un ensemble négligeable, $S_n(\omega) \to +\infty$, d'où il existe n (dépendant de ω) tel que $S_n(\omega) > t$ et alors $P(t, \omega) < n$

D'où $P(t) < +\infty$.

$$\boxed{\mathbb{P}(P(t) < +\infty) = 1}$$

D'autre part $P(t)$ ne prend que des valeurs entières d'où

$$\boxed{\mathbb{P}(P(t) \in \mathbb{N}) = 1}$$

2. a) S_n et E_{n+1} étant indépendantes, une densité f du couple est donnée par:

$$\boxed{\begin{cases} f(u,s) = \dfrac{s^{n-1}e^{-s}}{(n-1)!} e^{-u} & \text{si } u \geq 0 \text{ et } s \geq 0 \\ f(u,s) = 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

b) $\mathbb{P}(P(t) = n) = \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} > t) = \mathbb{P}(S_n \leq t, S_n + E_{n+1} > t)$

$\mathbb{P}(P(t) = n) = \iint\limits_{Dt} f(u,s) du ds$ avec $Dt = \left\{(u,s) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, s \leq t \text{ et } s + u > t\right\}$ *cf figure 4*

c) $\mathbb{P}(P(t) = n) = \int_0^t \dfrac{s^{n-1}e^{-s}}{(n-1)!} \left[\int_{t-s}^{+\infty} e^{-u} du\right] ds = \int_0^t \dfrac{s^{n-1}e^{-s}}{(n-1)!} e^{s-t} ds = e^{-t} \left[\dfrac{s^n}{(n)!}\right]_0^t = e^{-t} \dfrac{t^n}{(n)!}$

Conclusion :

$$\boxed{P(t) \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } t}$$

3. a) En utilisant la formule de Taylor Lagrange sur $[0,u]$ avec $f(x)=\ln(1+x)$

$\exists c\in[0,u]$ tel que $f(u)=f(0)+uf'(0)+\dfrac{u^2}{2!}f"(0)+\dfrac{u^3}{3!}f^{(3)}(c)$

$\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}\dfrac{1}{(1+c)^3}\geq u-\dfrac{u^2}{2}$; d'où :

$$\boxed{\forall u\geq 0,\quad h(u)=\ln(1+u)-u+\frac{u^2}{2}\geq 0}$$

Pour $u\in[0,1/2],\quad g(u)=\ln(1-u)+u+\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{2u^3}{3}$

$g'(u)=-\dfrac{1}{1-u}+1++u+2u^2=\dfrac{u^2-2u^3}{1-u}=\dfrac{u^2(1-2u)}{1-u}\geq 0$

g est donc croissante sur $[0,1/2]$ et $g(0)=0$; d'où

$$\boxed{\forall u\in[0,1/2],\quad \ln(1+u)\geq -u-\frac{u^2}{2}-\frac{2u^3}{3}}$$

b) Par la formule de transfert $\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}e^{\lambda n}\mathbb{P}\left(P(t)=n\right)$

$\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}e^{\lambda n}e^{-t}\dfrac{t^n}{n!}=e^{-t}\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{\left(te^{\lambda}\right)^n}{n!}=e^{-t}e^{te^{\lambda}}$

$$\boxed{\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right)=e^{t\left(e^{\lambda}-1\right)}}$$

c) Soit $\varepsilon>0$

$\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right)\geq\sum\limits_{n\geq t+\varepsilon}e^{\lambda n}\mathbb{P}\left(P(t)=n\right)\geq\sum\limits_{n\geq t+\varepsilon}e^{\lambda(t+\varepsilon)}\mathbb{P}\left(P(t)=n\right)=e^{\lambda(t+\varepsilon)}\mathbb{P}\left(P(t)\geq t+\varepsilon\right)$

D'où $\mathbb{P}\left(P(t)\geq t+\varepsilon\right)\leq e^{t\left(e^{\lambda}-1\right)}e^{-\lambda(t+\varepsilon)}$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(P(t)-t\geq\varepsilon\right)\leq\exp\left[\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)t-\lambda\varepsilon\right]}$$

d) Posons pour $\lambda\geq 0,\quad f(\lambda)=\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)t-\lambda\varepsilon$

$f'(\lambda)=\left(e^{\lambda}-1\right)t-\varepsilon$; $f"(\lambda)=te^{\lambda}$, d'où le tableau de variation *cf figure 5*

$a=\ln\left(\frac{\varepsilon+t}{t}\right)>0,\quad f(a)=\varepsilon-a(t+\varepsilon)$

En prenant $\lambda=a$ dans l'inégalité précédente valable pour tout $\lambda\geq 0$, on obtient

$\mathbb{P}\left(P(t)-t\geq\varepsilon\right)\leq\exp\left(f(a)\right)$

Or d(après le 3.a), $\ln\left(\frac{\varepsilon+t}{t}\right)=\ln\left(1+\frac{\varepsilon}{t}\right)\geq\frac{\varepsilon}{t}-\frac{\varepsilon^2}{2t^2}$

D'où $f(a)\leq\varepsilon-(t+\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{t}-\frac{\varepsilon^2}{2t^2}\right)=-\frac{\varepsilon^2}{2t}+\frac{\varepsilon^3}{2t^2}=-\frac{\varepsilon^2}{2t}\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)$; conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(P(t)-t\geq\varepsilon\right)\leq\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2t}\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)\right]}$$

e) $\lambda\leq 0$ et $t\geq 2\varepsilon$

Par le même principe qu'au 3.c)

$\mathbb{E}\left(e^{\lambda P(t)}\right)\geq\sum\limits_{n<t-\varepsilon}e^{\lambda n}\mathbb{P}\left(P(t)=n\right)\geq e^{\lambda(t-\varepsilon)}\mathbb{P}\left(P(t)-t<-\varepsilon\right)$

$\mathbb{P}\left(P(t)-t<-\varepsilon\right)\leq\exp\left[\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)t+\lambda\varepsilon\right]$

En étudiant la fonction : $\lambda\leq 0,\quad g(\lambda)=\left(e^{\lambda}-1-\lambda\right)t+\lambda\varepsilon$, on obtient un minimum en $b=\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)$

$\frac{\varepsilon}{t} \in [0,1/2]$ d'où d'après 3.a), $\ln\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right) \geq -\frac{\varepsilon}{t} - \frac{\varepsilon^2}{2t^2} - \frac{2\varepsilon^3}{3t^3}$
$g(b) = -\varepsilon + b(\varepsilon - t) \leq -\varepsilon - (\varepsilon - t)\left(\frac{\varepsilon}{t} + \frac{\varepsilon^2}{2t^2} + \frac{2\varepsilon^3}{3t^3}\right)$ car $\varepsilon - t < 0$
$g(b) \leq -\frac{\varepsilon^2}{2t} + \frac{\varepsilon^3}{6t^2} - \frac{2\varepsilon^4}{3t^3} \leq -\frac{\varepsilon^2}{2t} + \frac{\varepsilon^3}{6t^2} \leq -\frac{\varepsilon^2}{2t} + \frac{\varepsilon^2}{12t}$ car $\frac{\varepsilon}{t} \leq \frac{1}{2}$
Conclusion:

$$\boxed{\mathbb{P}\left(P(t) - t < -\varepsilon\right) \leq \exp\left[-\frac{5\varepsilon^2}{12t}\right]}$$

f) $t \geq 2\varepsilon$
$\mathbb{P}\left(|P(t)-t| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(P(t)-t < -\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(P(t)-t > \varepsilon\right) \leq \mathbb{P}\left(P(t)-t < -\varepsilon\right) + \mathbb{P}\left(P(t)-t \geq \varepsilon\right)$
$\mathbb{P}\left(|P(t)-t| > \varepsilon\right) \leq \exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{2t}\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right)\right] + \exp\left[-\frac{5\varepsilon^2}{12t}\right]$
$1 - \frac{\varepsilon}{t} \geq \frac{1}{2}$, d'où $-\frac{\varepsilon^2}{2t}\left(1-\frac{\varepsilon}{t}\right) \leq -\frac{\varepsilon^2}{4t}$; d'autre part, $-\frac{5\varepsilon^2}{12t} \leq -\frac{\varepsilon^2}{4t}$
Conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|P(t)-t| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left[-\frac{\varepsilon^2}{4t}\right]}$$

g) $t = \varepsilon$
$\mathbb{P}\left(|P(t)-t| > t\right) = \mathbb{P}\left(P(t)-t < -t\right) + \mathbb{P}\left(P(t)-t > t\right) = \mathbb{P}\left(P(t) > 2t\right)$ car $\mathbb{P}\left(P(t) < 0\right) = 0$
D'après 3.c), $\mathbb{P}\left(P(t)-t \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(f(a)\right)$ avec $a = \ln 2$ et $f(a) = (1-2\ln 2)\,t$
conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(P(t) > 2t\right) \leq \exp\left((1-2\ln 2)\,t\right)}$$

4. a) $\forall k \in \{1,..,K\}, \quad |P(k\varepsilon) - k\varepsilon| \leq \varepsilon$
Soit $t \in [0, K\varepsilon], \quad \exists k \in \{1,..,K\}$ tel que $t \in [(k-1)\varepsilon, k]$
P étant croissant : $P\left((k-1)\varepsilon\right) \leq P(t) \leq P(k\varepsilon)$
$P((k-1)\varepsilon) - (k-1)\varepsilon \geq -\varepsilon$ d'où $P((k-1)\varepsilon) \geq k\varepsilon - 2\varepsilon \geq t - 2\varepsilon$
$P(k\varepsilon) - k\varepsilon \leq \varepsilon$ d'où $P(k\varepsilon) \leq (k-1)\varepsilon + 2\varepsilon \leq t - 2\varepsilon$
D'où $t - 2\varepsilon \leq P\left((k-1)\varepsilon\right) \leq P(t) \leq P(k\varepsilon) \leq t - 2\varepsilon$
conclusion :

$$\boxed{\forall t \in [0, K\varepsilon], \quad |P(t) - t| \leq 2\varepsilon}$$

b) Soit K le plus petit entier supérieur à $N^{1-\alpha}T$
Soit $t \in [0, K\varepsilon]$
En prenant la contraposée de la proposition du 4.a):
si $|P(t)-t| > 2\varepsilon$, alors il existe $k \in \{1,..,K\}$ tel que $|P(k\varepsilon) - k\varepsilon| > \varepsilon$
D'où, $\mathbb{P}(\sup\{|P(t)-t|, t \in [0, K\varepsilon]\} > 2\varepsilon \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{K}\left(|P(k\varepsilon) - k\varepsilon| > \varepsilon\right)\right)$
On pose $\varepsilon = N^\alpha$, d'où $K\varepsilon \geq NT$
Notons l'événement $E = \left(\sup\left\{|P(t)-t|, t \in [0, NT]\right\} > 2\varepsilon\right)$
$\mathbb{P}(E) \geq \mathbb{P}(\sup\{|P(t)-t|, t \in [0, K\varepsilon]\}$ car $K\varepsilon \geq NT$
$\mathbb{P}(E) \leq \sum_{k=1}^{K} \mathbb{P}\left(|P(k\varepsilon) - k\varepsilon| > \varepsilon\right)$
Pour $k = 1$, P$(|P(\varepsilon) - \varepsilon| > \varepsilon) \leq \exp\left((1-2\ln 2)\,\varepsilon\right)$ d'après 3.g)
Pour $k \geq 2, \quad k\varepsilon \geq 2\varepsilon$, d'où $\mathbb{P}\left(|P(k\varepsilon) - k\varepsilon| > \varepsilon\right) \leq 2\exp\left[-\frac{\varepsilon}{4k}\right]$
conclusion :

$$\boxed{\mathbb{P}\left(sup\left\{|P(t)-t|, t \in [0, NT]\right\} > 2N^\alpha\right) \leq \exp\left((1-2\ln 2)\,N^\alpha\right) + 2\sum_{k=2}^{K} \exp\left[-\frac{N^\alpha}{4k}\right]}$$

c) $\dfrac{\exp\left((1-2\ln 2)\,N^\alpha\right)}{2\exp\left[-\frac{N^\alpha}{4K}\right]} = \exp\left[\left(1 - 2\ln 2 + \frac{\ln 2}{4K}\right)N^\alpha\right] \to 0$ quand $N \to +\infty$ car $1 - 2\ln 2 + \frac{\ln 2}{4K} \leq 1 - \frac{7}{4}\ln 2 < 0$

D'où, pour N assez grand, $\exp\left((1-2\ln 2)\,N^{\alpha}\right) \leq 2\exp\left[-\frac{N^{\alpha}}{4K}\right]$
$\mathbb{P}(E) \leq 2\exp\left[-\frac{N^{\alpha}}{4K}\right] + 2\sum_{k=2}^{K}\exp\left[-\frac{N^{\alpha}}{4K}\right]$
$\mathbb{P}(E) \leq 2K\exp\left[-\frac{N^{\alpha}}{4K}\right]$
K étant le plus petit entier supérieur à $N^{1-\alpha}T$, on a $(K-1) < N^{1-\alpha}T$
D'où $K < N^{1-\alpha}T + 1 \leq N^{1-\alpha}(T+1)$ car $N^{1-\alpha} \geq 1$
D'où $\mathbb{P}(E) \leq 2N^{1-\alpha}(T+1)\exp\left[-\frac{N^{\alpha}}{4N^{1-\alpha}(T+1)}\right]$
conclusion :

$$\boxed{\text{Pour } N \text{ assez grand , } \mathbb{P}\left(sup\left\{|P(t)-t|\,,t\in[0,NT]\right\} > 2N^{\alpha}\right) \leq 2N^{1-\alpha}(T+1)\exp\left[-\frac{N^{2\alpha-1}}{4(T+1)}\right]}$$

d) Soit $\varepsilon > 0$
Il existe $N_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall N \geq N_0, \quad 2N^{\alpha-1} < \varepsilon$ car $\alpha - 1 < 0$
$\forall N \geq N_0, \quad \mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sup|P(t)-t| > \varepsilon, t\in[0,NT]\right) \leq \mathbb{P}\left(\sup|P(t)-t| > 2N^{\alpha}, t\in[0,NT]\right)$
Pour N assez grand et plus grand que N_0 :
$0 \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{N}\sup|P(t)-t| > \varepsilon, t\in[0,NT]\right) \leq 2N^{1-\alpha}(T+1)\exp\left[-\frac{N^{2\alpha-1}}{4(T+1)}\right]$
Comme $2\alpha - 1 > 0$, $\lim\limits_{N\to\infty} N^{1-\alpha}\exp\left[-\frac{N^{2\alpha-1}}{4(T+1)}\right] = 0$ par croissances comparées.
Et finalement, par le thm des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\left(\sup\left\{|P(t)-t|\,,t\in[0,NT]\right\} > \varepsilon\right) = 0}$$

Troisième partie : Processus logistique

A. Construction du processus logistique

1. a) $X(0) = Z$ car $P_1(0) = 0$ et $P_2(0) = 0$
P_1, P_2, Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'où

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad X(t) \in \mathbb{Z}}$$

b) Supposons $X(t) = 0$
Définissons X' par : $\forall s \in [0,t], \quad X'(s) = X(s)$ et $\forall s > t, X'(s) = 0$
$\forall s > t, \quad \int_0^s X'(u)du = \int_0^t X(u)du$ et $\int_0^s X'^2(u)du = \int_0^t X^2(u)du$
D'où $\forall s > t, \quad Z + P_1\left(b\int_0^s X'(u)du\right) - P_2\left(d\int_0^s X'(u)du + c\int_0^s X'^2(u)du\right) = X(t) = 0 = X'(s)$
Bien entendu, $\forall s \in [0,t], X'(s) = Z + P_1\left(b\int_0^s X'(u)du\right) - P_2\left(d\int_0^s X'(u)du + c\int_0^s X'^2(u)du\right)$ car X vérifie cette équation

D'où X' vérifie l'équation (5). Or cette équation admet une unique solution X
D'où $X' = X$.; conclusion :

$$\boxed{\forall s \geq t, \quad X(s) = 0}$$

c) Si $X(0) = 0$, alors $\forall t \geq 0, \quad X(t) = 0$
Si $X(0) > 0$
Supposons qu'il existe t tel que $X(t) < 0$; comme X fait des sauts de 1, il existerait s tel que $X(s) = 0$.
Si on note T le premier instant tel que $X(T) = 0$, alors sur $[0,T[$, $X(s) > 0$, puis d'après la question précédente $X(s) = 0$ sur $[T,+\infty[$ et on a lors une contradiction.
D'où :

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad X(t) \in \mathbb{N}}$$

2.
$$\boxed{E/\lambda \text{ suit } Exp(\lambda)}$$

d'espérance $\mathbb{E}(E/\lambda) = 1/\lambda$, de variance $\mathbb{V}(E/\lambda) = 1/\lambda^2$

de fonction de répartition F : $\begin{cases} F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ F(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

3. Si $x \geq 0$, $\mathbb{P}\left(\min(E_1, E_2) > x\right) = \mathbb{P}\left(E_1 > x\right)\mathbb{P}\left(E_2 > x\right) = e^{-(\lambda+\mu)x}$

$$\boxed{\min(E_1, E_2) \ \text{ suit } \ Exp(\lambda + \mu)}$$

$\mathbb{P}\left(E_1 \leq E_2\right) = \iint\limits_D \lambda\mu e^{-\lambda x} e^{-\mu y} dxdy$ avec $D = \left\{(x,y) \in \left(\mathbb{R}^+\right)^2, x \leq y\right\}$

$\mathbb{P}\left(E_1 \leq E_2\right) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left[\int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy\right] dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\mu x} dx = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(E_1 \leq E_2\right) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}}$$

4. a) T_1 est le premier instant où il y a une naissance ou une mort dans la population. Le nombre d'individus est inchangé jusqu'à T_1

Cela correspond à un premier saut pour P_1 ou pour P_2

$\forall t \in [0, T_1[$, $X(t) = k$, d'où $f(T_1) = bkT_1$ et $g(T_1) = (dk + ck^2)T_1$

Si premier saut pour P_1 : $P_1\left(f(T_1)\right) = 1$ d'où $f(T_1) = E_1^{(1)}$ d'où $T_1 = \dfrac{E_1^{(1)}}{bk}$

Si premier saut pour P_2 : $P_2\left(g(T_1)\right) = 1$ d'où $g(T_1) = E_1^{(2)}$ d'où $T_1 = \dfrac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2}$

$$\boxed{T_1 = \min\left\{\frac{E_1^{(1)}}{bk}, \frac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2}\right\}}$$

Si $Z = 0$, alors X est toujours nul, il n'y a donc pas de saut et T_1 n'est pas défini.

On pose alors $T_1 = +\infty$

b) Si $k > 0$,

Soit $t \geq 0$, $\mathbb{P}\left(T_1 \leq t / Z = k\right) = \mathbb{P}\left(\min\left\{\dfrac{E_1^{(1)}}{bk}, \dfrac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2}\right\} \leq t\right)$

D'après le 2) et le 3), en raison de l'indépendance des variables,

$\min\left\{\dfrac{E_1^{(1)}}{bk}, \dfrac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2}\right\}$ suit $Exp\left(bk + dk + ck^2\right)$

$$\boxed{\text{La loi conditionnelle de } T_1 \text{ sachant } Z = k \text{ est la loi } Exp\left((b+d)k + ck^2\right)}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X(T_1) = k + 1 / Z = k\right) = \mathbb{P}\left(\frac{E_1^{(1)}}{bk} \leq \frac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2}\right) = \frac{bk}{(b+d)k + ck^2}}$$

$$\boxed{\mathbb{P}\left(X(T_1) = k - 1 / Z = k\right) = \mathbb{P}\left(\frac{E_1^{(2)}}{dk + ck^2} \leq \frac{E_1^{(1)}}{bk}\right) = \frac{dk + ck^2}{(b+d)k + ck^2}}$$

c) Je ne comprends pas . J'aurais défini :$X'(t) = X(t+T_1)$
$P_1'(t) = P_1(bZT_1 + t) - P_1(bZT_1)$ et $P_2'(t) = P_2((dZ + cZ^2)T_1 + t) - P_2(dZ + cZ^2)T_1)$
$X'(t) = X(t+T_1)$
$X'(t) = Z + P_1\left(b\int_0^{T_1} X(u)du + b\int_{T_1}^{t+T_1} X(u)du\right) - P_2\left(d\int_0^{T_1} X(u)du + d\int_{T_1}^{t+T_1} X(u)du - c\int_0^{T_1} X^2(u)du - c\int_{T_1}^{t+T_1} X^2\right.$
$X'(t) = Z + P_1\left(bZT_1 + b\int_0^t X'(s)ds\right) - P_2\left(dZT_1 + d\int_0^t X'(s)ds - cZ^2T_1 - c\int_0^t X'^2(s)ds\right)$

Si $X(T_1) = Z+1$, $P_1(bZT_1) = 1$ et $P_2(dZ + cZ^2)T_1) = 0$
Si $X(T_1) = Z-1$, $P_1(bZT_1) = 0$ et $P_2(dZ + cZ^2)T_1) = 1$
D'où $X(T_1) - Z = P_1(bZT_1) - P_2(dZ + cZ^2)T_1)$

D'où $X'(t) = X(T_1) + P_1'\left(b\int_0^t X'(s)ds\right) - P_2'\left(d\int_0^t X'(s)ds - c\int_0^t X'^2(s)ds\right)$
On a donc :

$$\boxed{X'(t) = X'(0) + P_1'\left(b\int_0^t X'(s)ds\right) - P_2'\left(d\int_0^t X'(s)ds - c\int_0^t X'^2(s)ds\right)}$$

d) On réitère le procédé en remplaçant Z par $X'(0)$, P_1 par P_1' et P_2 par P_2'
On a les mêmes hypothèses, on définit T_2' le premier instant tel que $X'(T_2') = X'(0) + 1$ ou $X'(0) - 1$
On pose alors $T_2 = T_1 + T_2'$, appelé deuxième temps de saut
On définit alors à nouveau d'autres processus de Poisson...
On définit ainsi une suite croissante de temps de sauts $(T_n)_{n\geq 1}$

e) $N = \min\{F_i, 1 \leq i \leq k\}$ suit $Exp\,(kb)$
D=min $\{\{G_i, 1 \leq i \leq k\} \cup \{H_{i,j}, 1 \leq i, j \leq k\}\}$ suit $Exp\left(kd + ck^2\right)$

Si initialement, la population compte k individus, notons F_i le temps mis pour l'individu i pour donner naissance à un autre individu. et supposons que F_i suit $Exp(b)$
b est alors le taux de naissance puique le temps moyen pour une naissance est $1/b$
Alors la première naissance dans la population aura lieu à l'instant N

Si G_i est le temps mis par l'individu pour décéder de mort naturelle (taux de mort naturelle égale à d) et $H_{i,j}$ le temps nécessaire à l'individu j pour tuer l'individu i (taux de compétition égal à c) , D est le premier instant de décès d'un individu dans la population
D'où $\min(N, D)$ est le premier temps de saut et a même loi que T_1

B. Limite de grande population

5. Posons $h(t) = e^{-Bt}\,(BF(t) + A)$
h est dérivable sauf aux points aù f n'est pas continue.
$h(t) = Be^{-Bt}\,(f(t) - BF(t) - A) \leq 0$
D'autre part h est continue sur $\mathbb{R}^+$ d'où h est décroissante sur $\mathbb{R}^+$
Comme $h(0) = A$, on a $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $h(t) \leq 0$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad F(t) \leq G(t)}$$

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \leq BF(t) - A \leq BG(t) - A$

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad f(t) \leq Ae^{Bt}}$$

6. $y(t) = y_0 + r\int_0^t y(s)ds - c\int_0^t y^2(s)ds$
   En divisant par N :
   $Y_N(t) = Y_N(0) + \varepsilon_N(t) + b\int_0^t Y_N(s)ds - d\int_0^t Y_N(s)ds - c\int_0^t Y_N^2(s)ds$
   $Y_N(t) - y(t) = Y_N(0) - y_0 + r\int_0^t (Y_N(s) - y(s))\,ds - c\int_0^t \left(Y_N^2(s) - y^2(s)\right)ds + \varepsilon_N(t)$

   L'inégalité $Y_N(t) \leq Y_N(0) + b\int_0^t Y_N(s)ds + \frac{1}{N}Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)$ est immédiate car $P_2(u) \geq 0$
   D'où $Y_N(t) \leq C + b\int_0^t Y_N(s)ds + \frac{1}{N}\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right|$ car les autres termes sont positifs.

7. On applique le 5) à $f(t) = Y_N(t)$, $A = C + \frac{1}{N}\sup\left\{\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right|, t \in [0,T]\right\}$, $\quad B = b$
   En effet l'inégalité du 5) montrée sur $\mathbb{R}^+$, est aussi valable en se limitant à $[0,T]$

$$\boxed{\forall t \in [0,T], \quad Y_N(t) \leq \left[C + \frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right|, t \in [0,T]\right\}\right]e^{bt}}$$

8. Pour $t \in [0,S]$, $\quad$ pour $s \in [0,t]$, $\quad 0 \leq Y_N(s) < M_2$ car $S \leq t_0$
   D'où $0 \leq Nb\int_0^t Y_N(s)ds \leq M_2Nbt \leq M_2NbT$ car $S \leq T$

   En reprenant l'inégalité ci-dessus sur $[0,S]$:
   $\forall t \in [0,S], \quad Y_N(t) \leq \left[C + \frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right|, t \in [0,S]\right\}\right]e^{bt}$, on obtient bien

$$\boxed{\forall t \in [0,S], \quad Y_N(t) \leq \left[C + \frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1(u)\right|, u \in [0, M_2NbT]\right\}\right]e^{bT}}$$

   Si $t_0 \leq T$, alors $S = t_0$ et en prenant l'inégalité ci-dessus avec $t = t_0$,
   $(C+1)e^{bT} = M_2 \leq Y_N(t_0) \leq \left[C + \frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1(u)\right|, u \in [0, M_2NbT]\right\}\right]e^{bT}$
   Alors $\frac{1}{N}sup\left(\left|Q_1(u)\right|, u \in [0, M_2NbT]\right) \geq 1$
   On en déduit que $\mathbb{P}(t_0 \leq T) \leq \mathbb{P}\left(\frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1(u)\right|, u \in [0, M_2NbT]\right\} \geq 1\right)$
   D'après la partie 2, 4. d), en remplaçant T par M_2bT et ε par 1, on a :
   $\lim\limits_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{1}{N}sup\left\{\left|Q_1(u)\right|, u \in [0, M_2NbT]\right\} \geq 1\right) = 0$
   Et par le thm des gendarmes : $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(t_0 \leq T) = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(t_0 > T) = 1}$$

9. $\forall s \in [0,S], \quad \left|Y_N^2(s) - y^2(s)\right| \leq \left|Y_N(s) - y(s)\right|(Y_N(s) - y(s)) \leq (M_1 + M_2)\left|Y_N(s) - y(s)\right|$
   $\forall t \in [0,S], \quad \left|\int_0^t \left(Y_N^2(s) - y^2(s)\right)ds\right| \leq (M_1 + M_2)\int_0^t \left|Y_N(s) - y(s)\right|ds$
   Puis par l'inégalité triangulaire :

$$\forall t \in [0,S], \quad \left|Y_N(t) - y(t)\right| \leq \left|Y_N(0) - y_0\right| + (r + c(M_1 + M_2))\int_0^t \left|Y_N(s) - y(s)\right|ds + sup\left\{\left|\varepsilon_N(t)\right|, t \in [0,S]\right\}$$

   Soit $\varepsilon > 0$,
   Si $t_0 > T$ et $|Y_N(0) - y_0| \leq D\varepsilon$ et $\sup\{|\varepsilon_N(t)|, t \in [0,S]\} \leq D\varepsilon$, alors $S = T$
   $\forall t \in [0,S], \quad \left|Y_N(t) - y(t)\right| \leq 2D\varepsilon + (r + c(M_1 + M_2))\int_0^t \left|Y_N(s) - y(s)\right|ds$
   D'après la question 5., (avec $A = 2D\varepsilon$ et $B = (r + c(M_1 + M_2))$ on en déduit que :
   $\forall t \in [0,S], \quad \left|Y_N(t) - y(t)\right| \leq 2D\varepsilon e^{(r+c(M_1+M_2))t}$
   D'où $\forall t \in [0,T], \quad \left|Y_N(t) - y(t)\right| \leq \varepsilon$

   On a donc l'inclusion :
   $[t_0 > T] \cap [|Y_N(0) - y_0| \leq D\varepsilon] \cap [\sup\{|\varepsilon_N(t)|, t \in [0,S]\} \leq D\varepsilon] \subset [\sup\{|Y_N(t) - y(t)|, t \in [0,T]\} \leq \varepsilon]$
   Puis par contraposée :

$[\sup\{|Y_N(t)-y(t)|, t\in[0,T]\}>\varepsilon] \subset [t_0\le T]\cap[|Y_N(0)-y_0|>D\varepsilon]\cap[\sup\{|\varepsilon_N(t)|, t\in[0,S]\}>D\varepsilon]$
Et comme $\mathbb{P}(A\cup B\cup C)\le \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(C)$, on en conclut l'inégalité demandée :

$$\boxed{\mathbb{P}[\sup\{|Y_N(t)-y(t)|, t\in[0,T]\}>\varepsilon]\le \mathbb{P}[t_0\le T]+\mathbb{P}[|Y_N(0)-y_0|>D\varepsilon]+\mathbb{P}[\sup\{|\varepsilon_N(t)|, t\in[0,S]\}>D\varepsilon]}$$

10. Si $t\in[0,S]$, alors $0\le Y_N(t)\le M_2$, d'où $\left|Q_1\left(Nb\int_0^t Y_N(s)ds\right)\right| \le \sup\{|Q_1(u)|, u\in[0,M_2NbT]\}$
De même, $\left|Q_2\left(Nd\int_0^t Y_N(s)ds+Nc\int_0^t Y_N^2(s)ds\right)\right| \le \sup\{|Q_2(u)|, u\in[0,NT(dM_2+cM_2^2]\}$

Et d'après la partie 2 5)d), on en déduit que $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}[\sup\{|\varepsilon_N(t)|, t\in[0,S]\}>D\varepsilon]=0$
$\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}[t_0\le T]=0$ d'après B. 8. et $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}[|Y_N(0)-y_0|>D\varepsilon]=0$ d'après les hypothèses de la partie 3
Par le thm des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}[\sup\{|Y_N(t)-y(t)|, t\in[0,T]\}>\varepsilon]=0}$$

11. Posont $E=\{\exists t\ge 0 \text{ tel que } Y_N(t)\in[r/c-\delta, r/c+\delta]\}$
$|Y_N(t)-r/c|\le|Y_N(t)-y(t)|+|y(t)-r/c|$
On sait que si $y_0>0$, alors $\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=r/c$
Donc il existe T tel que $|y(T)-r/c|<\delta/2$
Si $|Y_N(T)-y(T)|\le\delta/2$, alors $Y_N(T)\in[r/c-\delta, r/c+\delta]$
D'où $\mathbb{P}[\sup\{|Y_N(t)-y(t)|, t\in[0,T]\}\le\delta/2]\le\mathbb{P}[Y_N(T)\in[r/c-\delta, r/c+\delta]]\le\mathbb{P}(E)$

D'après la question précédente et le thm des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}\{\exists t\ge 0 \text{ tel que } Y_N(t)\in[r/c-\delta, r/c+\delta]\}=1}$$

12. a) Généralisation à la dimension 2 :
$$\begin{cases} X_1(t)=Z_1+P_1(b_1\int_0^t X_1(s)ds)-P_2(d_1\int_0^t X_1(s)ds+c_{11}\int_0^t X_1^2(s)ds+c_{12}\int_0^t X_1(s)X_2(s)ds) \\ X_2(t)=Z_2+P_3(b_2\int_0^t X_2(s)ds)-P_4(d_2\int_0^t X_2(s)ds+c_{22}\int_0^t X_2^2(s)ds+c_{21}\int_0^t X_1(s)X_2(s)ds) \end{cases}$$
c_{12} et c_{21} taux de compétition inter-spécifiques

b) On pose $Y_1^{(N)}=X_1/N$ et $Y_2^{(N)}=X_2/N$ et on remplace c_{11} par $c_{11}/N, c_{12}$ par $c_{12}/N, c_{21}$ par $c_{21}/N, c_{22}$ par c_{22}/N

(y_1,y_2) étant la solution du système différentiel (2) avec la condition initiale y_0, on trouvera que
$\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\sup\left\{\left|Y_1^{(N)}(t)-y_1(t)\right|, t\in[0,T]\right\}>\varepsilon\right]=0$
et $\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}\left[\sup\left\{\left|Y_2^{(N)}(t)-y_2(t)\right|, t\in[0,T]\right\}>\varepsilon\right]=0$

c) On trouvera :
$\lim\limits_{N\to\infty}\mathbb{P}\left\{\exists t\ge 0 \text{ tel que } Y_1^{(N)}(t)\in[0,\delta] \text{ et } Y_1^{(N)}(t)\in[r_2/c_{22}-\delta, r_2/c_{22}]\right\}=1$ où $r_2=b_2-d_2$

Fin

Corrigé proposé par Martine Ginestet (UPA)
Pour toutes remarques sur ce corrigé, veuillez me contacter : martine-ginestet@orange.fr

En annexe les figures

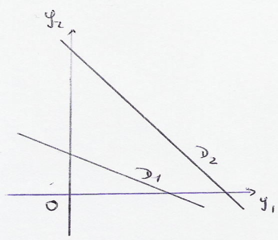

figure 1

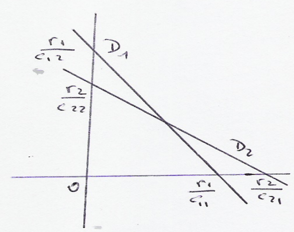

figure 2

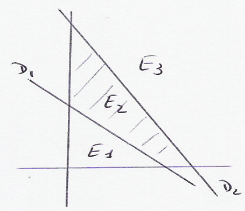

figure 3

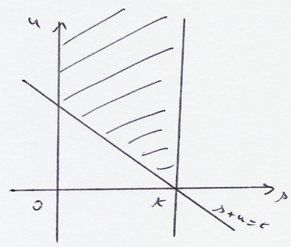

figure 4

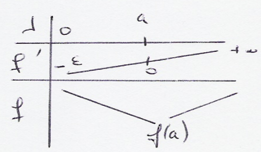

figure 5