

Exercice 1

1. La famille $\mathcal{F} = ((x + h_k)^n)_{k=0,1,\dots,n}$ est une famille libre de E_n si et seulement si son déterminant dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ est non nul. La décomposition de $(x + h_k)^n$ dans cette base s'obtient par la formule du binôme, et on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} C_n^0 h_0^n & C_n^0 h_1^n & \dots & C_n^0 h_n^n \\ C_n^1 h_0^{n-1} & C_n^1 h_1^{n-1} & \dots & C_n^1 h_n^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_n^n & C_n^n & \dots & C_n^n \end{vmatrix} = \det M_n \prod_{k=0}^n C_n^k \neq 0$$

car les h_k sont deux à deux distincts.

$$\boxed{((x + h_k)^n)_{k=0,1,\dots,n} \text{ est une famille libre de } E_n.}$$

Cette famille comporte $n + 1$ éléments, et $\dim E_n = n + 1$; c'est donc une base de E_n , et en particulier, c'est aussi une famille génératrice. Il en va donc de même de la sur-famille $((x + h)^n)_{h \in \mathbb{R}}$.

$$\boxed{((x + h)^n)_{h \in \mathbb{R}} \text{ est une famille génératrice de } E_n.}$$

2. Notons T_h l'application de E_n dans lui-même définie pour tout polynôme P par $\forall x \in \mathbb{R}, T_h(P)(x) = P(x + h)$. On vérifie facilement que T_h est un endomorphisme de E_n , et que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ peut être défini par :

$$\mathcal{E}_n = \{\phi \in \mathcal{L}(E_n), \quad \forall h \in \mathbb{R}, \quad \phi \circ T_h = T_h \circ \phi\}$$

Montrons que $\mathcal{E}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E_n)$:

– $\mathcal{E}_n \neq \emptyset$ car l'endomorphisme nul commute avec tout T_h .

$$\begin{array}{lcl} - \forall (\phi_1, \phi_2) \in \mathcal{E}_n^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, & \begin{array}{l} \phi_1 \circ T_h = T_h \circ \phi_1 \\ \phi_2 \circ T_h = T_h \circ \phi_2 \end{array} & \left\| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times \lambda \end{array} \right. \\ \hline & (\phi_1 + \lambda \phi_2) \circ T_h = T_h \circ (\phi_1 + \lambda \phi_2) & \end{array}$$

donc $\phi_1 + \lambda \phi_2 \in \mathcal{E}_n$.

De plus, $(\phi_2 \circ \phi_1) \circ T_h = \phi_2 \circ (\phi_1 \circ T_h) = \phi_2 \circ (T_h \circ \phi_1) = (\phi_2 \circ T_h) \circ \phi_1 = (T_h \circ \phi_2) \circ \phi_1 = T_h \circ (\phi_2 \circ \phi_1)$.
donc $\phi_2 \circ \phi_1 \in \mathcal{E}_n$.

$$\boxed{\mathcal{E}_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E_n) \text{ stable pour la composition des applications.}}$$

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall P \in E_n, (P(x + h))^{(k)} = P^{(k)}(x + h)$ (dérivée d'une composée), ce qui signifie que pour tout h de $\mathbb{R}$, $\phi_k \circ T_h = T_h \circ \phi_k$, soit encore

$$\boxed{\phi_k \text{ appartient à } \mathcal{E}_n.}$$

Par la formule de Taylor : $\forall P \in E_n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall h \in \mathbb{R}$

$$P(x + h) = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} P^{(k)}(x)$$

ce qui se traduit par :

$$T_h = \sum_{k=0}^n \frac{h^k}{k!} \phi_k \quad (\star)$$

Prenons comme dans le 1. $n+1$ nombres réels deux à deux distincts $h_0, h_1, \dots, h_n$. En écrivant les équations $(\star)$ pour $h = h_0, h_1, \dots, h_n$ on obtient un système linéaire d'inconnues $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$, de déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{n!} h_0^n & \frac{1}{n!} h_1^n & \cdots & \frac{1}{n!} h_n^n \\ \frac{1}{(n-1)!} h_0^{n-1} & \frac{1}{(n-1)!} h_1^{n-1} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!} h_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \det M_n \prod_{k=0}^n \frac{1}{k!} \neq 0$$

La résolution de ce système permet donc d'exprimer ϕ_k comme combinaison linéaire de $T_{h_0}, T_{h_1}, \dots, T_{h_n}$. Soit alors $\phi \in \mathcal{E}_n$. ϕ commute avec $T_{h_0}, T_{h_1}, \dots, T_{h_n}$, donc avec toute combinaison linéaire de ces endomorphismes, et en particulier avec ϕ_k .

$$\boxed{\phi_k \text{ commute avec tout élément de } \mathcal{E}_n.}$$

Montrons que tout endomorphisme ϕ de $\mathcal{E}_n$ se décompose de manière unique sous forme de combinaison linéaire des ϕ_k , $k = 0, 1, \dots, n$.

Supposons qu'une telle décomposition existe : $\phi = \sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k$.

$$\text{Alors, } \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x^n) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k(x^n) \iff \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x^n) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Le polynôme $\phi(x^n)$ se décompose de manière unique dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, x, \dots, x^n)$ de E_n ; on en déduit l'unicité de la famille $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

$$\text{Soit maintenant la famille } (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \text{ définie par : } \forall x \in \mathbb{R}, \phi(x^n) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}.$$

On a successivement, pour tous réels x et h :

$$\begin{aligned} \phi((x+h)^n) &= \phi(x^n)(x+h) \quad (\text{par définition de } \mathcal{E}_n) \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda_k \frac{n!}{(n-k)!} (x+h)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k((x+h)^n) \end{aligned}$$

et les endomorphismes ϕ et $\sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k$, qui coïncident sur la famille génératrice $((x+h)^n)_{h \in \mathbb{R}}$, sont égaux; on

a bien la décomposition $\phi = \sum_{k=0}^n \lambda_k \phi_k$.

$$\boxed{\text{La famille } (\phi_k)_{k=0,1,\dots,n} \text{ est une base de } \mathcal{E}_n.}$$

Exercice 2

1.1 La série $\sum_k u_k$ étant à termes positifs et convergente, à partir d'un certain rang n_0 , $u_k \in [0, 1[$.

Alors, $\ln\left(\prod_{k=n_0}^n (1 - u_k)\right) = \sum_{k=n_0}^n \ln(1 - u_k)$ est la somme partielle de rang n de la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 - u_k)$.

Or, comme la série $\sum_k u_k$ converge, son terme général u_k tend vers 0, et on a : $\ln(1 - u_k) \sim -u_k$.

La règle des équivalents s'applique, puisque les séries considérées sont à termes de signe constant; donc la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 - u_k)$ converge.

Par définition, la suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=n_0}^n \ln(1 - u_k)\right)_{n \geq n_0}$ converge.

Comme $P_n = \prod_{k=0}^n (1 - u_k) = \prod_{k=0}^{n_0-1} (1 - u_k) \exp\left(\sum_{k=n_0}^n \ln(1 - u_k)\right)$, il en résulte :

La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

1.2 D'après ce qui précède, en notant σ la somme de la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 - u_k)$, la limite L de la suite

$(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est : $L = \prod_{k=0}^{n_0-1} (1 - u_k) e^\sigma$, et on a :

$L = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}, 1 - u_k = 0$.

La limite de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle si et seulement si l'un au moins des termes de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est égal à 1.

1.2 Comme $1 + u_k > 0$ pour tout k , on a directement la convergence de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

– la série $\sum_{k \geq 0} \ln(1 + u_k)$ est convergente car $\ln(1 + u_k) \sim u_k$ (on a encore $u_k \rightarrow 0$)

– la suite $\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge

– la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge car $Q_n = \exp\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k)\right)$.

La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2.1 Distinguons deux cas :

1^{er} cas : u_k tend vers 0

Alors on peut reprendre intégralement le 1.2 en remplaçant converge par diverge.

2^{ème} cas : u_k ne tend pas vers 0

Alors $\ln(1 + u_k)$ ne tend pas vers 0 non plus, et la série $\sum_k \ln(1 + u_k)$ est encore divergente.

La série considérée dans les deux cas étant à termes positifs et divergente, la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$, et on peut préciser :

La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

2.2 Si de plus tous les u_k sont strictement inférieurs à 1, on peut adapter ce qui précède :

– la série $\sum_{k \geq 0} \ln(1 - u_k)$ est divergente car ou bien $\ln(1 - u_k) \sim -u_k$ (si $u_k \rightarrow 0$), ou bien $\ln(1 - u_k) \not\rightarrow 0$ (dans le cas contraire)

– la suite $\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 - u_k)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ de ses sommes partielles tend vers $-\infty$ (série à termes négatifs)

– la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 car $P_n = \exp\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 - u_k)\right)$.

$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0$

3. On procède de même qu'au 1. avec des valeurs absolues : si la série $\sum_k |u_k|$ est convergente, u_k tend vers 0, donc à partir d'un certain rang n_0 , $u_k > -1$.

Considérons la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 + u_k)$.

Comme u_k tend vers 0, on a : $\ln(1 + u_k) \sim u_k$, d'où $|\ln(1 + u_k)| \sim |u_k|$ et la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 + u_k)$ est absolument convergente, donc convergente.

La suite de ses sommes partielles $\left(\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) \right)_{n \geq n_0}$ converge.

Comme $Q_n = \prod_{k=0}^n (1 + u_k) = \prod_{k=0}^{n_0-1} (1 + u_k) \exp \left(\sum_{k=n_0}^n \ln(1 + u_k) \right)$, il en résulte :

La suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

On fait de même qu'au 1.2 :

Soit τ la somme de la série $\sum_{k \geq n_0} \ln(1 + u_k)$. La limite ℓ de la suite $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est alors : $\ell = \prod_{k=0}^{n_0-1} (1 + u_k) e^\tau$,
et on a : $\ell = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \{0, 1, \dots, n_0 - 1\}, 1 + u_k = 0$.

La limite de $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle si et seulement si l'un au moins des termes de la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est égal à -1 .

4. Dans le cas particulier où $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \end{cases}$ si $k \geq 1$, étudions encore la série $\sum_{k \geq 0} \ln(1 + u_k)$.

En utilisant le DL₂(0) de $u \mapsto \ln(1 + u)$: $\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, on obtient :

$$\forall k \geq 1, \quad \ln(1 + u_k) = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} - \frac{1 + o(1)}{2k}$$

La série $\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ est alternée, la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant, donc cette série est convergente. La suite de ses sommes partielles tend vers une limite réelle.

Une série de la forme $\sum_{k \geq 1} \frac{1 + o(1)}{2k}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang, et vérifie $\frac{1 + o(1)}{2k} \sim \frac{1}{2k}$.

Donc elle est divergente, et la suite de ses sommes partielles tend vers $+\infty$.

Il en résulte que la suite $\left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 0} \ln(1 + u_k)$ tend vers $-\infty$.

Comme $Q_n = \exp \left(\sum_{k=0}^n \ln(1 + u_k) \right)$, on peut conclure :

$(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 3

1. C_1 est la courbe de paramétrage $\begin{cases} x = a \left(\cos \phi + \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \right) \\ y = a \sin \phi \end{cases}$, $\phi \in]0, \pi[$.

$$x(\pi - \phi) = a \left(\cos(\pi - \phi) + \ln \left(\tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) \right) \right) = a \left(-\cos \phi + \ln \left(\frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}} \right) \right) = a \left(-\cos \phi - \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \right) = -x(\phi)$$

et $y(\pi - \phi) = a \sin(\pi - \phi) = a \sin \phi = y(\phi)$ donc C_1 est symétrique par rapport à $(O; \vec{j})$ et on peut réduire l'étude à $]0, \frac{\pi}{2}]$.

x et y sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle, et pour tout ϕ de $]0, \frac{\pi}{2}]$,

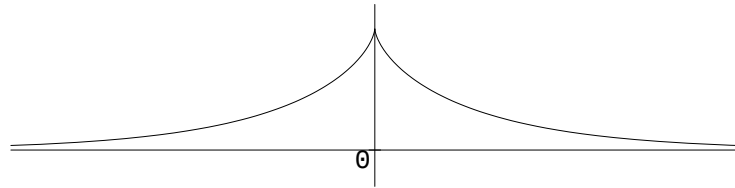
$$\begin{cases} x'(\phi) = a \left(-\sin \phi + \frac{1}{\sin \phi} \right) = a \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} \geq 0 \\ y'(\phi) = a \cos \phi \geq 0 \end{cases}$$

Le point $M(\frac{\pi}{2})$ est stationnaire. $\frac{d\vec{M}}{d\phi} = a \frac{\cos \phi}{\sin \phi} (\cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j})$ donc le vecteur unitaire $\vec{u}_\phi = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$ dirige la tangente en tout point; en particulier, pour $\phi = \frac{\pi}{2}$, la tangente est verticale.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow 0} \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) &= -\infty, \text{ donc } \lim_{\phi \rightarrow 0} x(\phi) = -\infty \\ \lim_{\phi \rightarrow 0} y(\phi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad C_1 \text{ admet } (O; \vec{i}) \text{ pour asymptote.}$$

Tableau de variations et courbe :

t	0	$\frac{\pi}{2}$
x'	+	0
x	$-\infty$	$\nearrow$ 0
y'	+	0
y	0	$\nearrow$ a



2. Un point P du plan est sur la tangente en $M(\phi)$ si et seulement si ses coordonnées (x, y) vérifient :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = a \left(\cos \phi + \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \right) + \lambda \cos \phi \\ y = a \sin \phi + \lambda \sin \phi \end{cases}$$

Le point $T(M)$ d'intersection de cette droite et de l'axe $(O; \vec{i})$ est caractérisé par $\lambda = -a$.

Son abscisse est alors $x = a \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right)$, et le vecteur $\overrightarrow{MT(M)}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \end{pmatrix}$, et on en déduit :

$$\boxed{\text{La distance } MT(M) \text{ est constante, et vaut } a.}$$

3. Examinons la birégularité de C_1 . $\frac{d\vec{M}}{d\phi} = a \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \vec{u}_\phi$ donc, en notant $\vec{v}_\phi = \frac{d\vec{u}_\phi}{d\phi} = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$,

$$\frac{d^2\vec{M}}{d\phi^2} = \frac{-a}{\sin^2 \phi} \vec{u}_\phi + a \frac{\cos \phi}{\sin \phi} \vec{v}_\phi, \text{ et ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si } \cos \phi = 0, \text{ soit } \phi = \frac{\pi}{2}.$$

C_1 se décompose donc en deux sous-arcs biréguliers, obtenus l'un pour $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et l'autre pour $\phi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Compte tenu de la symétrie trouvée au 1. il suffit de déterminer la développée du sous-arc γ_1 correspondant à $\phi \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\text{Notons } s \text{ une abscisse curviligne sur } \gamma_1. \quad \frac{ds}{d\phi} = \left\| \frac{d\vec{M}}{d\phi} \right\| = a \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

Le vecteur tangent unitaire est $\vec{T} = \vec{u}_\phi$, donc l'angle polaire $(\vec{i}, \vec{T})$ a pour mesure $\alpha = \phi$.

$$\text{Par définition, le rayon de courbure de } \gamma_1 \text{ en } M(\phi) \text{ est } \mathcal{R} = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{d\phi} = a \frac{\cos \phi}{\sin \phi}.$$

Le vecteur normal unitaire est $\vec{N} = \vec{v}_\phi$, donc le centre de courbure de γ_1 en $M(\phi)$ est le point

$\Omega = M(\phi) + \mathcal{R} \vec{N}$ de coordonnées :

$$\begin{cases} X = a \left(\cos \phi + \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \right) - a \cos \phi = a \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \\ Y = a \sin \phi + a \frac{\cos^2 \phi}{\sin \phi} = \frac{a}{\sin \phi} \end{cases}, \quad \phi \in]0, \frac{\pi}{2}[.$$

La développée du sous-arc correspondant à $\phi \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$ se déduit de la précédente par symétrie par rapport à $(O; \vec{j})$ ce qui revient à changer ϕ en $\pi - \phi$ dans le paramétrage précédent. On a donc :

La développée de $C_1 \setminus \{M(\pi/2)\}$ a pour paramétrage : $\begin{cases} X = a \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \\ Y = \frac{a}{\sin \phi} \end{cases}, \quad \phi \in]0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi[.$

Un point Ω de coordonnées (X, Y) est sur cette développée si et seulement si

$$\begin{aligned} \exists \phi \in]0, \pi[\setminus \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} X = a \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \\ Y = \frac{a}{\sin \phi} \end{cases} &\iff \exists \phi \in]0, \pi[\setminus \frac{\pi}{2}, \quad \begin{cases} \exp(X/a) = \tan \frac{\phi}{2} \\ Y = a \frac{1 + \tan^2 \frac{\phi}{2}}{2 \tan \frac{\phi}{2}} = \frac{a}{2} \left(\frac{1}{\tan \frac{\phi}{2}} + \tan \frac{\phi}{2} \right) \end{cases} \\ \iff \exists X \in \mathbb{R}^*, \quad Y = \frac{a}{2} (\exp(-X/a) + \exp(X/a)) &\quad \text{car } \phi \mapsto \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right) \text{ est une bijection de }]0, \pi[\setminus \frac{\pi}{2} \text{ sur } \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de cette développée est $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in \mathbb{R}^*.$

4. C_2 ayant pour équation cartésienne $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in \mathbb{R}_+$, une abscisse curviligne σ sur cette courbe est

définie par $\frac{d\sigma}{dx} = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$

La longueur de l'arc de C_2 entre les points d'abscisses 0 et x est donc :

$$s = \int_0^x \operatorname{ch} \frac{t}{a} dt = \left[a \operatorname{sh} \frac{t}{a} \right]_0^x = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

La longueur de l'arc de C_2 d'origine S et d'extrémité P est $s = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$

Un vecteur directeur de la tangente en P à C_2 est $\frac{d\vec{P}}{dx} = \vec{i} + \operatorname{sh} \frac{x}{a} \vec{j},$ et $\left\| \frac{d\vec{P}}{dx} \right\| = \frac{d\sigma}{dx} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ donc le vecteur tangent unitaire est $\vec{T}_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} \vec{i} + \operatorname{th} \frac{x}{a} \vec{j}.$

Les points de la tangente en P à C_2 situés à distance s de P sont les points $Q = P + \varepsilon s \vec{T}_2$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}.$

La condition $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{j} \leq 0$ équivaut à $\varepsilon \operatorname{th} \frac{x}{a} \leq 0$, donc, comme $x \in \mathbb{R}_+, \varepsilon = -1.$

Le point Q a donc pour coordonnées : $\begin{cases} \xi = x - a \frac{\operatorname{sh} \frac{x}{a}}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} = x - a \operatorname{th} \frac{x}{a} \\ \eta = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} - a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \operatorname{th} \frac{x}{a} = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} \end{cases}$

La courbe décrite par Q lorsque P parcourt C_2 a pour paramétrage : $\begin{cases} \xi = x - a \operatorname{th} \frac{x}{a} \\ \eta = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{x}{a}} \end{cases}, \quad x \in [0, +\infty[.$

Exercice 4

1. Notons $\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{v}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$.

S_1 est la surface de paramétrage $(r, \theta) \mapsto M_1(r, \theta) = O + r \vec{u}_\theta + a \theta \vec{k}$, $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$.

Pour tout (r, θ) de $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $M_1(r, \theta + 2\pi) = O + r \vec{u}_{\theta+2\pi} + a(\theta + 2\pi) \vec{k} = M_1(r, \theta) + 2\pi a \vec{k}$.

La translation de vecteur $2\pi a \vec{k}$ conserve S_1 .

Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ fixé. La ligne coordonnée $\theta = \theta_0$ de S_1 est définie par le paramétrage

$$r \mapsto M_1(r) = O + r \vec{u}_{\theta_0} + a \theta_0 \vec{k}, \quad r \in \mathbb{R}_+$$

Il s'agit de la demi-droite ayant pour origine le point $H_0(0, 0, a \theta_0)$ de $(O, \vec{k})$ et dirigée par $\vec{u}_{\theta_0}$.

Lorsque θ_0 décrit $\mathbb{R}$, ces demi-droites engendrent S_1 .

S_1 est une partie de surface réglée.

Examinons la régularité de S_1 : $\frac{\partial \vec{M}_1}{\partial r} = \vec{u}_\theta$ $\frac{\partial \vec{M}_1}{\partial \theta} = r \vec{v}_\theta + a \vec{k}$.

Ces deux vecteurs sont orthogonaux et non nuls, donc non colinéaires; la surface S_1 est régulière.

La normale à S_1 au point M_1 est dirigée par $\frac{\partial \vec{M}_1}{\partial r} \wedge \frac{\partial \vec{M}_1}{\partial \theta} = -a \vec{v}_\theta + r \vec{k}$.

Lorsque $\theta = \theta_0$ est fixé et r décrit $\mathbb{R}_+$, M_1 parcourt une génératrice (la demi-droite $(H_0, \vec{u}_{\theta_0})$).

r décrivant $\mathbb{R}_+$, les vecteurs $-a \vec{v}_{\theta_0} + r \vec{k}$ ne sont pas colinéaires donc la direction de la normale varie lorsque M_1 parcourt une génératrice.

S_1 n'est pas développable.

2. Avec les notations de l'énoncé, le point courant M_1 de C_1 est défini par :

$M_1 = O + r(\theta) \vec{u}_\theta + a \theta \vec{k}$ où r est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$.

On a donc $\frac{d\vec{M}_1}{d\theta} = r'(\theta) \vec{u}_\theta + r(\theta) \vec{v}_\theta + a \vec{k}$ d'où la longueur de l'arc C_1 :

$$s_1 = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r'^2 + r^2 + a^2} d\theta.$$

Pour $(r, \alpha, \beta) = (a \cos \theta, 0, 2\pi)$, on a : $s_1 = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + a^2} d\theta = \int_0^{2\pi} a \sqrt{2} d\theta = 2\pi a \sqrt{2}$.

Le projeté orthogonal de M_1 sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est le point m_1 défini par

$$\theta \mapsto m_1(\theta) = O + a \cos \theta \vec{u}_\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

m_1 décrit donc le cercle d'équation polaire $\rho = a \cos \theta$ tangent en O à $(O; \vec{j})$ et de diamètre de longueur a (parcoursu deux fois).

La projection orthogonale de C_1 sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un cercle.

3. Notons $\vec{p} = \cos v \vec{i} + \sin v \vec{j}$ et $\vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dv} = -\sin v \vec{i} + \cos v \vec{j}$.

S_2 est la surface de paramétrage $(u, v) \mapsto M_2(u, v) = O + u \vec{p} + z(u) \vec{k}$, $(u, v) \in [a, +\infty[\times [0, 2\pi]$, et le point courant M_2 de C_2 est défini par :

$M_2 = O + u(v) \vec{p} + z(u(v)) \vec{k}$ où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\gamma, \delta]$.

On a donc $\frac{d\vec{M}_2}{dv} = u'(v) \vec{p} + u(v) \vec{q} + z'(u(v)) u'(v) \vec{k}$ d'où la longueur de l'arc C_2 :

$$s_2 = \int_{\gamma}^{\delta} \sqrt{u^2 + u'^2 (1 + z'^2)} dv$$

$$z(u) = a \ln \left(\frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a} \right) \quad \text{donc} \quad z'(u) = a \frac{1 + \frac{u}{\sqrt{u^2 - a^2}}}{u + \sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

$$s_2 = \int_{\gamma}^{\delta} \sqrt{u^2 + u'^2 \left(1 + \frac{a^2}{u^2 - a^2} \right)} dv = \int_{\gamma}^{\delta} \sqrt{u^2 \left(1 + \frac{u'^2}{u^2 - a^2} \right)} dv = \int_{\gamma}^{\delta} u \sqrt{\frac{u^2 + u'^2 - a^2}{u^2 - a^2}} dv \quad (u \geq 0)$$

$$s_2 = \int_{\gamma}^{\delta} u \sqrt{\frac{u^2 + u'^2 - a^2}{u^2 - a^2}} dv.$$

4. Le changement de paramètres sur S_2 défini par $\begin{cases} u = \sqrt{a^2 + r^2} \\ v = \theta \end{cases}, (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$ est licite car (u, v) décrit alors $]a, +\infty[\times [0, 2\pi]$ (il manque le parallèle de S_2 du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$). Le nouveau paramétrage de S_2 est alors défini par

$$(r, \theta) \mapsto M_2(r, \theta) = O + \sqrt{a^2 + r^2} \vec{u}_{\theta} + a z(\sqrt{a^2 + r^2}) \vec{k} \quad (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi]$$

En définissant une courbe tracée sur S_2 de manière analogue à ce qui a été fait au 2. on obtient

$$\theta \mapsto M_2(\theta) = O + \sqrt{a^2 + r^2(\theta)} \vec{u}_{\theta} + a z(\sqrt{a^2 + r^2(\theta)}) \vec{k} \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_2}{d\theta} &= \frac{r r'}{\sqrt{a^2 + r^2}} \vec{u}_{\theta} + \sqrt{a^2 + r^2} \vec{v}_{\theta} + \underbrace{z'(\sqrt{a^2 + r^2})}_{= \frac{a}{r}} \frac{r r'}{\sqrt{a^2 + r^2}} \vec{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \left(r r' \vec{u}_{\theta} + (a^2 + r^2) \vec{v}_{\theta} + a r' \vec{k} \right) \end{aligned}$$

donc la longueur d'un arc de cette courbe correspondant à $\theta \in [\alpha, \beta]$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \sqrt{r^2 r'^2 + (a^2 + r^2)^2 + a^2 r'^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}} \sqrt{(a^2 + r^2)(a^2 + r^2 + r'^2)} d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{a^2 + r^2 + r'^2} d\theta \end{aligned}$$

formule analogue à celle du 2.