

## PARTIE I

**I.1.1)**  $F(x) = 1$

**I.1.2)**  $F(x) = \frac{(x+1)^k - x^k}{k+1}$

**I.2.1)**  $F'(x) = f(x+1) - f(x)$

**I.2.2)** trivial

**I.2.3)**  $F$  constante  $\Leftrightarrow F'(x) = 0$

**I.2.4)**  $F$  est constante et il suffit de la calculer en 0. Donc  $F(x) = \int_0^1 \sin(\pi t) dt = \frac{2}{\pi}$

**I.2.5)**  $F(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt = \int_x^{x+1} f(t) - L_1 dt + L_1$  et on montre que l'intégrale tend vers 0. En effet, pour

tout  $\varepsilon$ , il existe  $A$  tel que, pour  $t > A$ ,  $|f(t) - L_1| < \varepsilon$  donc, pour  $x > A$ ,  $\left| \int_x^{x+1} f(t) - L_1 dt \right| < \varepsilon$ .

**I.3.1)** 
$$\begin{aligned} \psi(-u) &= \int_{-u-1/2}^{-u+1/2} f(t) dt \\ &= \int_{u-1/2}^{u+1/2} f(-v) dv \text{ en posant } v = -t \end{aligned}$$

Donc,  $\psi$  a même parité que  $f$ .

**I.3.2)** –

**I.4.1)** La série convergence normale.

**I.4.2)** La série des dérivées est  $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kt \exp(-kt^2)}{k^2 + 1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k}}{k^2 + 1} \sqrt{k} t \exp(-kt^2)$ . Par parité, on peut

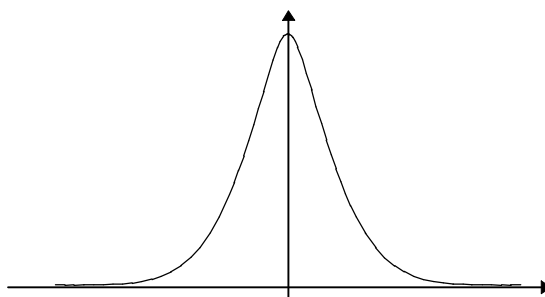
supposer  $t \geq 0$ . La fonction  $\varphi(u) = \sqrt{u} \exp(-u)$  est bornée sur  $[0, +\infty[$  (continue et de limite nulle). Il

en est donc de même de  $\varphi(\sqrt{k}t)$ . Comme la série  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{k}}{k^2 + 1}$  converge, la série des dérivées converge

normalement sur  $\mathbb{R}$  et la fonction est  $C^1$ . Sa dérivée est nulle en 0.

**I.4.3)** La limite en l'infini est nulle (convergence normale).

**I.4.4)**



**I.4.5)**  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-kx^2) dx = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du$  de la forme  $\frac{I}{\sqrt{k}}$ . Or  $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-kx^2)}{k^2+1} dx$  converge (et

la série est à termes positifs), donc  $\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-kx^2)}{k^2+1} dx$  est égale à cette somme et la fonction  $f$  est intégrable.

**I.4.6.1)** Forme comparable. (Utiliser I.2.2) et I.2.5))

**I.4.6.2)** Pour  $x \geq 0$ ,  $F(x) \leq f(x)$  (majoration bête de l'intégrale), donc  $F$  est intégrable.

## PARTIE II

**II.1)**  $\theta$  n'est pas surjectif puisque l'image est incluse dans  $C^1$ .

**II.2.1)**  $f \in \text{Ker } \theta \Leftrightarrow F = 0 \Leftrightarrow F$  est constant et  $F(0) = 0 \Leftrightarrow f$  est 1-périodique et  $\int_0^1 f(t) dt = 0$  (utiliser I.2.1)).

**II.2.2.1)**  $\langle C_j | C_k \rangle = 0$  si  $j \neq k$  et  $= \frac{1}{2}$  sinon.

**II.2.2.2)** Les  $C_k$  appartiennent au noyau et sont indépendantes (car orthogonales).

**II.2.3.1)** Intégrons par parties  $\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$  :

$$\int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt = \left[ -\frac{\varphi_n(t)}{t} \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt = -\frac{\varphi_n(n+1)}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt$$

On utilise la périodicité de  $f$  pour dire que  $\varphi_n(n+1) = \varphi_0(1)$ .

**II.2.3.2)** Si  $f$  appartient à  $\text{Ker } \theta$ , alors  $\varphi_0(1) = 0$ . En outre  $\varphi_n$  est bornée et  $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^2} dt \leq \frac{1}{n^2}$  donc la série des  $W_n$  converge.

**II.2.3.3)** Si  $f$  n'appartient pas à  $\text{Ker } \theta$ , alors  $\varphi_0(1) \neq 0$  et la série  $\sum \frac{\varphi_0(1)}{n+1}$  diverge alors que la série  $\sum \int_n^{n+1} \frac{\varphi_n(t)}{t^2} dt$  continue à converger, donc la série des  $W_n$  diverge.

**II.3.1)**  $\int_x^{x+1} e^{at} dt = \frac{e^a - 1}{a} e^{ax}$

**II.3.2)** Le numérateur de sa dérivée vaut  $ue^u - e^u + 1 = g(u)$ . Or  $g'(u) = ue^u$  est du signe de  $u$ . Donc  $g$  admet un minimum en 0, donc est positive ou nulle, donc la fonction  $\frac{e^u - 1}{u}$  est croissante.

**II.3.3)** Les  $\frac{e^a - 1}{a}$  sont valeurs propres, et la fonction  $u \rightarrow \frac{e^u - 1}{u}$  varie de 0 à  $+\infty$ , donc tout réel strictement positif est valeur propre. 0 est également valeur propre ( $\text{Ker } \theta \neq \{0\}$ ).

## PARTIE III

**III.1.1)**  $\rho'(t) = \sin(2t) + 2t\cos(2t) - 2t - 2\sin(t)\cos(t) = 2t\cos(2t) - 2t \leq 0$  donc  $\rho$  décroît. Étant négatif en  $2k\pi$ ,  $\rho < 0$ .

**III.1.2)**  $g'(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{t}{\sin^2(t)} + \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{1}{t} = 2 \frac{\cos(t)}{\sin(t)} - \frac{t}{\sin^2(t)} - \frac{1}{t} = \frac{\rho(t)}{t \sin^2(t)} < 0$ , donc  $g$  décroît strictement depuis  $+\infty$  jusqu'à  $-\infty$ .

**III.2.1)**  $\int_x^{x+1} e^{\gamma t} dt = \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{\gamma x}$

**III.2.2)** On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^\gamma - 1}{\gamma} e^{\gamma x} &= \frac{e^a e^{ib} - 1}{a + ib} e^{ax} e^{ibx} = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (e^a \cos(b) - 1 + i e^a \sin(b)) (\cos(bx) + i \sin(bx)) (a - ib) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (e^a \cos(b) - 1 + i e^a \sin(b)) (a \cos(bx) + b \sin(bx) + i a \sin(bx) - i b \cos(bx)) \end{aligned}$$

Donc, en prenant la partie réelle :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+1} e^{ax} \cos(bx) dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} ((e^a \cos(b) - 1)(a \cos(bx) + b \sin(bx)) - e^a \sin(b)(a \sin(bx) - b \cos(bx))) \\ &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a(e^a \cos(b) - 1) + b e^a \sin(b)) \cos(bx) + \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b(e^a \cos(b) - 1) - a e^a \sin(b)) \sin(bx) \end{aligned}$$

Donc  $e^{ax} \cos(bx)$  est vecteur propre si et seulement si  $b(e^a \cos(b) - 1) - a e^a \sin(b) = 0$ . On veut en outre que  $\frac{a(e^a \cos(b) - 1) + b e^a \sin(b)}{a^2 + b^2} = \lambda$ .

**III.3)** On a donc :

$$\begin{cases} b e^a \cos(b) - a e^a \sin(b) = b \\ b e^a \sin(b) + a e^a \cos(b) = a + \lambda(a^2 + b^2) \end{cases}$$

Posons  $a = r \cos(t)$  et  $b = r \sin(t)$ . Le système équivaut à :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} e^a \sin(t-b) = \sin(t) \\ e^a \cos(t-b) = \cos(t) + r\lambda \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^a = \frac{\sin(t)}{\sin(t-b)} \\ \frac{\sin(t)}{\sin(t-b)} \cos(t-b) = \cos(t) + r\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = \frac{\sin(t)}{\sin(t-b)} \\ \sin(b) = \sin(t-b) r\lambda \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^a = \frac{\sin(t) r\lambda}{\sin(b)} = \frac{b\lambda}{\sin(b)} \\ \sin(t-b) = \frac{\sin(b)}{r\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = \frac{b\lambda}{\sin(b)} \\ \sin(t) \cos(b) - \cos(t) \sin(b) = \frac{\sin(b)}{r\lambda} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^a = \frac{b\lambda}{\sin(b)} \\ b \cos(b) - a \sin(b) = \frac{\sin(b)}{\lambda} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^a = \frac{b\lambda}{\sin(b)} \\ b \frac{\cos(b)}{\sin(b)} - a = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} e^a = \frac{b\lambda}{\sin(b)} \\ g(b) = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

La deuxième équation admet une infinité de solutions  $b$ , et la première détermine  $a$ .