

Première partie

1. (a) On a $u_2 = (0, 0)$ est le vecteur nul donc la famille (u_1, u_2) n'est pas libre.

La famille (u_1, u_2) n'est pas une base de \mathbb{R}^2 .

- (b) On calcule de déterminant de la famille (u_1, u_2) dans la base (e_1, e_2) , qui est égal à

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$$

Or une famille de cardinal 2 de \mathbb{R}^2 est une base si et seulement si son déterminant dans une base est non nul. Donc

La famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 .

- (c) On procède de la même manière que précédemment, or

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

ainsi

La famille (u_1, u_2) est une base de \mathbb{R}^2 .

- (d) On montre que les vecteurs (u_1, u_2) sont liés en calculant une mesure à un multiple entier de π près de l'angle orienté entre ces vecteurs et e_1 : cet angle est l'argument des nombres complexes z_1 et z_2 , or, en utilisant les propriétés de l'argument d'un nombre complexe

$$\begin{aligned} \text{Arg}(z_1) &= -\text{Arg}(1 + i) \quad [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{4} \quad [\pi] \\ \text{Arg}(z_2) &= \text{Arg}(-3) + \text{Arg}\left(\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)\right) \quad [2\pi] \\ &= \pi - \frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{4} \quad [\pi] \end{aligned}$$

où $[2\pi]$ (resp. $[\pi]$) signifie "modulo 2π " ou à un multiple entier de 2π (resp. "modulo" π). Les vecteurs u_1 et u_2 sont donc sur la droite d'équation $y = -x$.

La famille (u_1, u_2) ne forme pas une base de \mathbb{R}^2 .

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. L'application $\text{Aff} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ est un isomorphisme de \mathbb{R} -espaces vectoriels, et on a par définition

$$g_{a,b} = \text{Aff}^{-1} \circ f_{a,b} \circ \text{Aff}$$

Ainsi montrer que $g_{a,b}$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 revient à montrer que $f_{a,b}$ un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} . L'application $f_{a,b}$ ayant \mathbb{C} comme espace de départ et d'arrivée, montrons qu'elle est \mathbb{R} -linéaire. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned} f_{a,b}(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) &= a(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + \overline{b(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)} \\ &= a(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2) + b(\lambda_1 \bar{z}_1 + \lambda_2 \bar{z}_2) \quad \text{car } \lambda_1, \lambda_2 \text{ sont réels} \\ &= \lambda_1(a z_1 + b \bar{z}_1) + \lambda_2(a z_2 + b \bar{z}_2) \\ &= \lambda_1 f_{a,b}(z_1) + \lambda_2 f_{a,b}(z_2) \end{aligned}$$

Donc $f_{a,b}$ est un endomorphisme, donc

l'application $g_{a,b}$ est un endomorphisme de \mathbb{R}^2 .

3. (a) On a d'après la question précédente que $G \subseteq \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. De plus
- G est non vide, il contient par exemple $g_{0,0}$ qui est l'endomorphisme nul.
 - Un calcul direct montre que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, (a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4,$

$$\lambda g_{a,b} + \mu g_{c,d} = g_{\lambda a + \mu c, \lambda b + \mu d} \in G$$

Donc G est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et donc est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- (b) On montre que G est de dimension au moins 4, qui est également la dimension de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour cela on montre que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad g_{a,b} \text{ est l'endomorphisme nul} \Rightarrow a = b = 0$$

En vertu de la relation $g_{a,b} = \text{Aff}^{-1} \circ f_{a,b} \circ \text{Aff}$, il suffit de montrer que l'assertion précédente est vraie en remplaçant $g_{a,b}$ par $f_{a,b}$. Soit donc $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, et supposons que $f_{a,b}$ est l'endomorphisme nul. Alors en particulier

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b = 0 \\ f(i) &= i(a - b) = 0 \end{aligned}$$

On en déduit que $a = -b$ et $a = b$, donc $a = b = 0$. Soit maintenant $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$x g_{1,0} + y g_{i,0} + x' g_{0,1} + y' g_{0,i} = 0$$

alors, d'après le calcul fait dans la question précédente, on a que $g_{x+iy, x'+iy'}$ est l'endomorphisme nul. D'après ce que l'on vient de démontrer, on obtient $x + iy = x' + iy' = 0$, or un nombre complexe est nul si et seulement si ces parties réelles et imaginaires sont nulles, donc $x = y = x' = y' = 0$. Ainsi la famille

$$\{g_{1,0}, g_{i,0}, g_{0,1}, g_{0,i}\}$$

est libre dans G . Donc

$$4 \leq \dim(G) \leq \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)) \leq 4$$

donc $\dim(G) = \dim(\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)) = 4$, or G est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, donc on a bien

$$G = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$$

4. (a) i. Il s'agit d'une homothétie de rapport a .
 ii. Il s'agit de la rotation d'angle θ .
 iii. il s'agit de la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses.

- (b) Les endomorphismes $g_{a,b}$ et $g_{a',b'}$ sont des isométries vectorielles de \mathbb{R}^2 d'après leur description faite en question précédente, or la composée d'isométries vectorielle est une isométrie vectorielle, donc

$$g_{a,b} \circ g_{a',b'} \text{ est une isométrie vectorielle.}$$

De plus $g_{a,b}$ est une rotation donc une isométrie positive et $g_{a',b'}$ est une symétrie donc une isométrie négative, donc on peut calculer, grâce aux opérations sur les déterminants d'endomorphismes que

$$\begin{aligned} \det(g_{a,b} \circ g_{a',b'}) &= \det(g_{a,b}) \det(g_{a',b'}) \\ &= 1 \times (-1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

et donc

$$g_{a,b} \circ g_{a',b'} \text{ n'est pas une isométrie positive.}$$

D'après la classification des isométries du plan, l'isométrie $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est une symétrie. La droite dirigée par le vecteur $u_{\frac{\theta}{2}} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e_2$ est invariante par cette symétrie, et donc

l'isométrie $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)y = 0$.

5. (a) La relation (du cours) est

$$s = 2p - \text{id}_E$$

- (b) La question 4 nous invite à trouver c, d des complexes tels que $g_{a,b} \circ g_{a',b'} = g_{c,d}$. Un calcul direct montre que

$$\forall (a, b, a', b') \in \mathbb{C}^4, \quad f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa'+b\bar{b}', ab'+b\bar{a}'}$$

De plus si $a = \exp(2i\alpha), b = 0, a' = 0, b' = 1$ où $\alpha \in \mathbb{R}$, alors d'après la question 4, la composée $g_{a,b} \circ g_{a',b'}$ est la symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par u_α . Ainsi $g_{0,\exp(2i\alpha)}$ est cette symétrie. De plus $\text{id}_E = g_{1,0}$, et d'après la question 3a et la question précédente, on a alors que

$$\frac{1}{2} (g_{0,\exp(2i\alpha)} + g_{1,0}) = g_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \exp(2i\alpha)}$$

qui est bien la projection orthogonale sur $\text{Vect}(u_\alpha)$.

le couple $(a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2} \exp(2i\alpha))$ convient.

Remarque.

On peut procéder directement en calculant l'expression complexe de la symétrie orthogonale, mais les risques de mélanger des nombres complexes et des vecteurs est grand. De plus il nous n'avions pas encore analysé le comportement multiplicatif de l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2) \\ (a, b) &\mapsto g_{a,b} \end{aligned}$$

6. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculons les affixes de $g_{a,b}(e_1)$ et $g_{a,b}(e_2)$ et mettons les sous forme algébrique, on a

$$\text{Aff} \circ g_{a,b}(e_1) = f_{a,b}(1) = a + b = \text{Re}(a) + \text{Re}(b) + i(\text{Im}(a) + \text{Im}(b))$$

$$\text{Aff} \circ g_{a,b}(e_2) = f_{a,b}(i) = i(a - b) = \text{Im}(b) - \text{Im}(a) + i(\text{Re}(a) - \text{Re}(b))$$

Ainsi

$$G_{a,b} = \begin{pmatrix} \text{Re}(a) + \text{Re}(b) & \text{Im}(b) - \text{Im}(a) \\ \text{Im}(a) + \text{Im}(b) & \text{Re}(a) - \text{Re}(b) \end{pmatrix}$$

7. Dans ce cas la matrice $G_{a,b}$ est symétrique et à coefficients réels,

elle est donc diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ et ce dans une base orthonormée en vertu du théorème spectral. Les espaces propres sont donc orthogonaux.

8. (a) Un calcul direct donne, en notant comme dans toute la suite $\chi_{a,b}$ ce polynôme caractéristique

$$\chi_{a,b} = X^2 - 2\text{Re}(a)X + |a|^2 - |b|^2$$

- (b) Le discriminant de $\chi_{a,b}$ est donné par

$$\Delta_{a,b} = 4 \left(|b|^2 - \text{Im}(a)^2 \right)$$

donc dans le cas de cette question $\Delta_{a,b} \neq 0$ et donc $\chi_{a,b}$ admet $2 = \dim(\mathbb{R}^2)$ racines distinctes et d'après le critère suffisant de diagonalisation

la matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$

Une condition nécessaire pour être diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ est d'avoir ses valeurs propres réelles. Pour que $G_{a,b}$ soit diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ il faut donc que $\Delta_{a,b} > 0$, c'est-à-dire que

$$|b|^2 \geq \text{Im}(a)^2$$

or $|b|^2 \neq \text{Im}(a)^2$, et dans ce cas $\chi_{a,b}$ est scindé sur \mathbb{R} avec deux racines distinctes, donc d'après le critère suffisant de diagonalisation $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$. Finalement

Si $|b|^2 \neq \text{Im}(a)^2$, alors $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $|b| > |\text{Im}(a)|$.

- (c) Dans ce cas $\Delta_{a,b} = 0$, et donc $\chi_{a,b}$ n'admet qu'une racine double qui est $\text{Re}(a)$ (on vérifie facilement que $\chi_{a,b} = (X - \text{Re}(a))^2$). Donc $G_{a,b}$ n'admet qu'une seule valeur propre, or une matrice n'ayant qu'une seule valeur propre est diagonalisable si et seulement si c'est une homothétie de rapport cette valeur propre. Donc $G_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si

$$G_{a,b} = \begin{pmatrix} \text{Re}(a) & 0 \\ 0 & \text{Re}(a) \end{pmatrix}$$

On trouve donc $\text{Im}(a) = \text{Re}(b) = \text{Im}(b) = 0$ grâce à la question 6. Finalement

La matrice $G_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si $a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$

- (d) L'endomorphisme $g_{a,b}$ étant un endomorphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{R}^2 , nous répondons donc à la question de la diagonalisabilité sur \mathbb{R} . Cet endomorphisme est diagonalisable si et seulement si $G_{a,b}$ est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire d'après les deux questions précédentes : l'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si

$$\begin{cases} |b| > |\text{Im}(a)| \\ \text{ou} \\ |b|^2 = \text{Im}(a)^2 \text{ et } a \in \mathbb{R} \text{ et } b = 0 \end{cases}$$

Dans la deuxième ligne, la condition $|b|^2 = \text{Im}(a)^2$ et la condition $b = 0$ est inutile d'après la question 7. Finalement

l'endomorphisme $g_{a,b}$ est diagonalisable si et seulement si

$$\begin{cases} |b| > |\text{Im}(a)| \\ \text{ou} \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Deuxième partie

1. (a) Un point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans cette intersection si et seulement si

$$\begin{cases} x = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - z^2 = 1 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'une hyperbole équilatère dans le plan $x = 0$.

- (b) Soit $a \in \mathbb{R}$, un point $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ est dans l'intersection de S avec le plan d'équation $z = a$ si et seulement si

$$\begin{cases} z & = a \\ x^2 + y^2 - z^2 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = a \\ x^2 + y^2 & = 1 + a^2 \end{cases}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$ et de rayon $\sqrt{1 + a^2}$ dans le plan $z = a$.

Tous ces cercles ont leur centre sur la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que

la surface S est une surface de révolution.

- (c) La figure 1 représente la surface S .

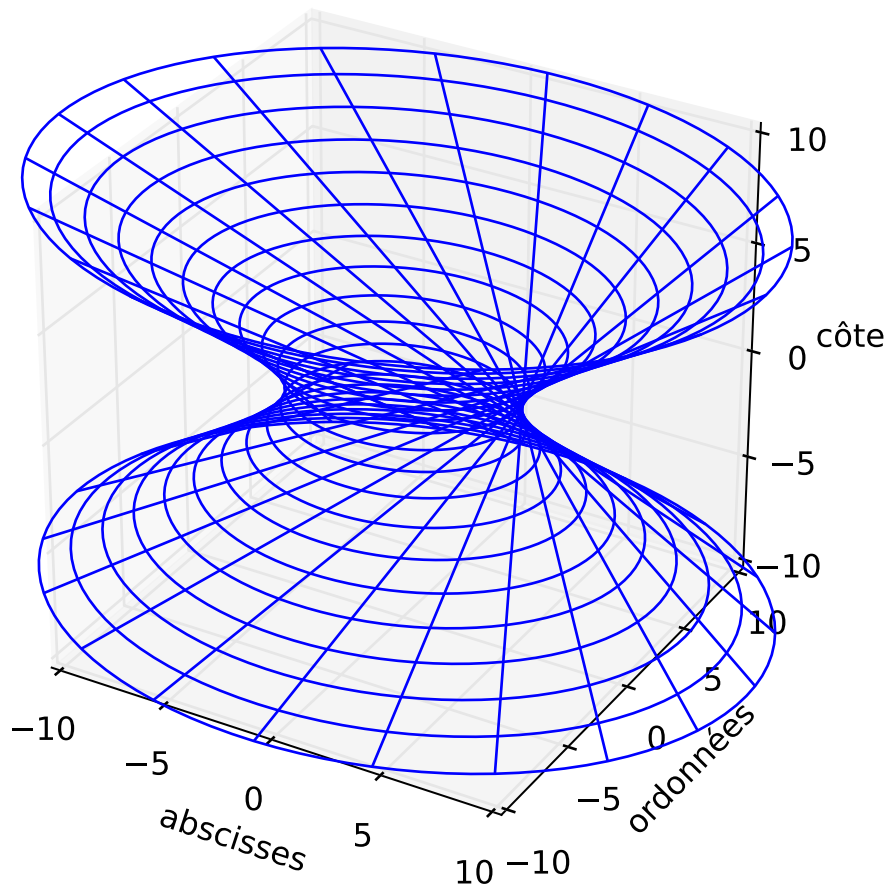


Figure 1: La surface S

2. (a) Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a en utilisant l'équation de la surface S :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \in S$$

Donc le plan d'équation $z = 0$ est un plan de symétrie de S .

- (b) Pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a de même

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix} \in S$$

on en déduit que le plan d'équation $x = y$ est un plan de symétrie de S .

(c) Il s'agit de montrer que la surface S est laissée invariante par la rotation d'axe la droite

$\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ et d'angle π . La matrice dans la base canonique d'une telle rotation est

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Or pour $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in S \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \in S$$

La surface S admet donc bien la droite $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ comme axe de symétrie.

3. (a) Soit $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Sigma &\Leftrightarrow \exists A \in (Oz), B \in \Delta, \begin{cases} \langle \overrightarrow{AM}, \vec{k} \rangle = 0 \\ \langle \overrightarrow{AB}, \vec{k} \rangle = 0 \\ \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{AB}\|^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \begin{cases} z = \lambda \\ \lambda = \mu \\ x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2 = 1 + \mu^2 + (\mu - \lambda)^2 \end{cases} \quad (A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + z^2 \end{cases} \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation de S et donc $\Sigma = S$.

(b) La surface Σ est une réunion de toutes les droites images de Δ par rotation autour de l'axe (Oz) , donc la surface Σ est une surface réglée par définition. Or $S = \Sigma$, donc

la surface S est réglée.

La droite Δ est la droite passant par le point $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice dans la base canonique de la rotation d'angle θ et d'axe (Oz) est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par suite les droites images de Δ par de telles rotations sont les droites passant par les points

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$ et dirigée par les vecteurs $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une famille de génératrice de S est donnée par la famille

$$\Delta_{\theta}^+ = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

pour $\theta \in [0, 2\pi[$.

4. (a) Soit D une droite horizontale, alors il existe $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$D = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Supposons D incluse dans S , alors

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad (x_0 + t\alpha)^2 + (y_0 + t\beta)^2 - z_0^2 &= 1 \\ \text{donc } \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\alpha^2 + \beta^2)t^2 + 2t(\alpha x_0 + \beta y_0) &= 0 \end{aligned}$$

donc le polynôme $(\alpha^2 + \beta^2)X^2 + 2(\alpha x_0 + \beta y_0)X$ est le polynôme nul : tous ses coefficients sont nuls, en particulier $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$, et la droite D est réduite à un point.

La surface S ne contient pas de droite horizontale.

- (b) La droite D n'étant pas horizontale, elle rencontre donc le plan d'équation $z = 0$. Soit donc $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ le point d'intersection de la droite D avec le plan d'équation $z = 0$. Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur directeur de la droite D . Alors $z \neq 0$ car D n'est pas horizontale, ainsi le vecteur $\begin{pmatrix} \frac{x}{z} \\ \frac{y}{z} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite D . Finalement la droite D passe par un point de la forme $\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ et admet pour vecteur directeur un vecteur de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}$, ainsi il existe bien a, b, α, β des réels tels que

$$D = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Autrement dit

il existe des réels a, b, α, β tels que

$$\begin{cases} x &= a + \alpha t \\ y &= b + \beta t \\ z &= t \end{cases}$$

soit une représentation paramétrique de D

(c) On a

$$D \subseteq S \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad (a + \alpha t)^2 + (b + \beta t)^2 - t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\alpha^2 + \beta^2 - 1)t^2 + 2(a\alpha + b\beta)t + a^2 + b^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a\alpha + b\beta = 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 = 1 \end{cases}$$

polynôme nul \Leftrightarrow ses coefficients sont nuls

\Leftrightarrow la famille $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$ forme une base orthonormée du plan

$$\Leftrightarrow \text{caractérisation de } O(2) \quad \boxed{\begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix} \in O(2)}$$

(d) D'après la description des matrices de $O(2)$ du cours,

toute matrice de $O(2)$ est soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme canoniquement associé est la rotation d'angle θ , soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme canoniquement associé est la symétrie orthogonale par rapport à la droite d'équation $x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = y \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

(e) En remplaçant les valeurs de a, b, α, β dans la représentation paramétrique de D par les valeurs trouvées dans la question précédente, dans le premier cas on retrouve les génératrices de la question 3b, et dans le deuxième cas on trouve les droites de représentation paramétriques

$$\Delta_{\theta}^{-} \begin{cases} x = \cos(\theta) + t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) - t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

qui est la droite orthogonale à la génératrice Δ_{θ}^{+} de la question 3b contenue dans le plan d'équation $x \cos(\theta) + y \sin(\theta) = 1$. Ainsi

Les droites contenues dans la surface S sont les droites de représentation paramétriques :

$$\theta \in \mathbb{R}, \quad \Delta_{\theta}^{\pm} : \begin{cases} x = \cos(\theta) \mp t \sin(\theta) \\ y = \sin(\theta) \pm t \cos(\theta) \\ z = t \end{cases}$$

Troisième partie

1. (a) On a pour $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} z(\theta) &= \theta x(\theta) + i y(\theta) \\ &= \theta \cos(\theta) + i \theta \sin(\theta) \\ &= \theta \exp(i\theta) \end{aligned}$$

Ainsi

$$z(\theta) = \theta \exp(i\theta)$$

- (b) La fonction $\theta \mapsto z(\theta)$ est dérivable sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ car ses parties réelles et imaginaires le sont (fonctions de référence) et les règles du calcul différentiel donnent

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, 2\pi], \quad z'(\theta) &= \exp(i\theta) + i\theta \exp(i\theta) \\ &= (1 + i\theta) \exp(i\theta) \end{aligned}$$

d'où

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad z'(\theta) = (1 + i\theta) \exp(i\theta)$$

- (c) On a alors pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) \right\| &= |z'(\theta)| \\ &= |1 + i\theta| |\exp(i\theta)| \\ &= \sqrt{1 + \theta^2} \end{aligned}$$

d'où

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \left\| \frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta) \right\| = \sqrt{1 + \theta^2}$$

Ainsi pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, cette norme est strictement positive donc le vecteur dérivé $\frac{d\overrightarrow{OM}}{d\theta}(\theta)$ est non nul ainsi

tous les points de la courbe Γ sont réguliers.

2. (a) La fonction f est dérivable sur son intervalle de définition (fonction de référence) et les règles du calcul différentiel donnent

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, 2\pi] \setminus \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}, \quad f'(\theta) &= 1 + 1 + \tan^2(\theta) \\ &= 2 + \tan^2(\theta) \end{aligned}$$

On en déduit, car on connaît aussi la fonction tangente qui est une fonction de référence, le tableau de variations suivant

θ	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$f(\theta)$	+		+	
f'	0 \longrightarrow $+\infty$	$-\infty \longrightarrow +\infty$	$-\infty \longrightarrow 2\pi$	

- (b) D'après le tableau précédent la fonction f réalise trois bijections :

- une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ vers \mathbb{R}_+ ,
- une bijection de $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ vers \mathbb{R} ,
- une bijection de $] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$ vers $] -\infty, 2\pi]$.

Or $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ est la réunion disjointe des trois intervalles $[0, \frac{\pi}{2}]$, $] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et $] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, et 0 est dans chacun des intervalles d'arrivées de la fonction f restreinte à chacun de ces intervalles.

Ainsi la fonction f s'annule exactement trois fois : en $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, en $\theta_2 \in] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ et en $\theta_4 \in] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, en particulier $\theta_0 < \theta_2 < \theta_4$.

- (c) On remarque que pour $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $y'(\theta) = f(\theta) \cos(\theta)$, ainsi, l'intervalle $[0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$ ne contenant pas de valeur d'annulation du cosinus et d'après la question précédente, la fonction y' s'annule exactement trois fois : une fois en θ_0 , une fois en θ_2 et une fois en θ_3 . Tous les points de la courbes étant réguliers, les points $M(\theta_0), M(\theta_2)$ et $M(\theta_4)$ sont des points à tangente horizontale et ce sont les seuls.

Remarque.

Si l'on note pour $\theta \in [0, 2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$, $\alpha(\theta)$ l'angle polaire entre la tangente à la courbe au point $M(\theta)$ et l'axe des abscisse, alors on a

$$\begin{aligned} \alpha(\theta) &= \text{Arg}(z(\theta)) \\ &= \theta + \text{Arg}(1 + i\theta) \\ &= \theta + \arctan(\theta) \end{aligned}$$

ce qui permettait, après une étude de cette fonction, de redémontrer le résultat sur les tangentes horizontales ainsi que l'assertion admise.

3. (a) Ayant une valeur approchée de $\cos(\theta_4)$ et sachant que $\theta_4 \in] \frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, on a $\sin(\theta_4) < 0$ et donc on peut tracer avec la règle graduée et le compas l'intersection ayant une ordonnée négative de la droite d'équation $x = \cos(\theta_4)$ avec le cercle de centre O et de rayon 1. Ceci nous donne le point N d'affixe $\exp(i\theta_4)$. En utilisant la règle graduée, on trace alors l'image du vecteur \overrightarrow{ON} par l'homothétie de centre O et de rapport θ_4 dont on a une valeur approchée. Ceci nous donne le point $M(\theta_4)$ d'affixe $\theta_4 \exp(i\theta_4)$.
- (b) Nous avons représenté ces points sur la figure 2, la méthode utilisée peut être celle présentée dans la question précédente en justifiant du signe du sinus en chaque point.
- (c) Nous avons tracé la courbe Γ ainsi que le point $M(\frac{4\pi}{3})$ sur la figure 2.

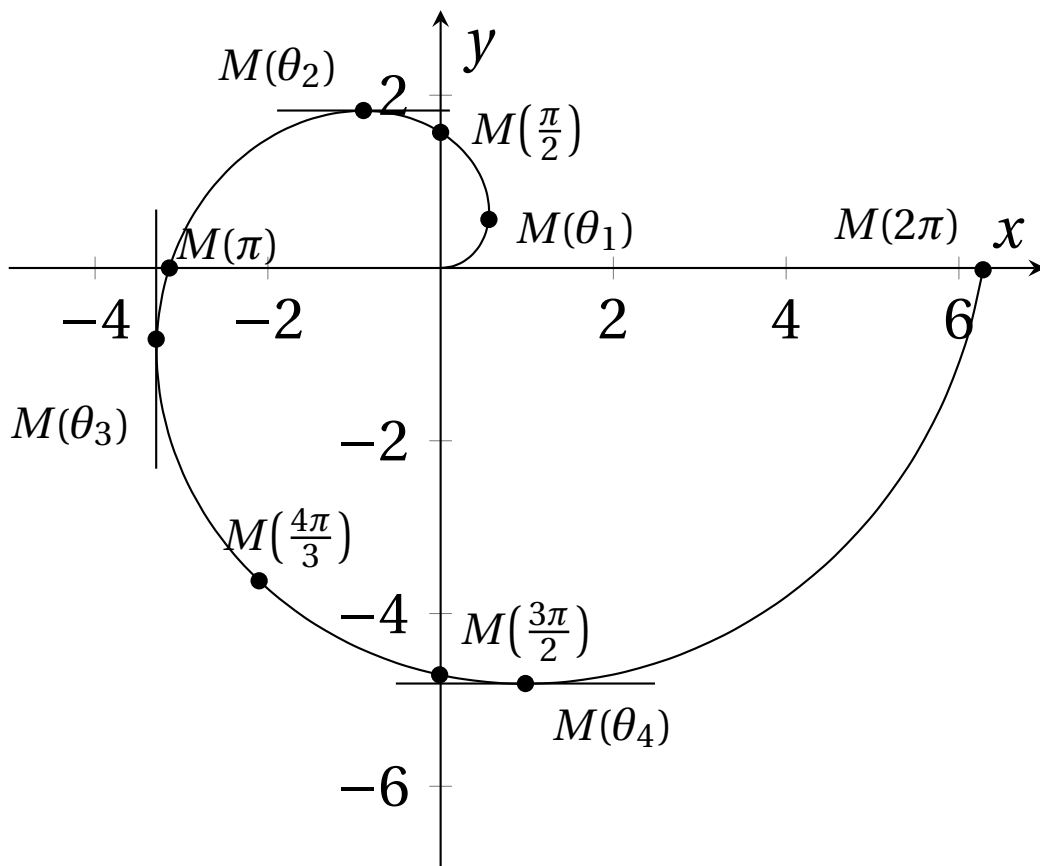


Figure 2: La courbe Γ et les points particuliers

4. (a) Il s'agit de l'aire d'un secteur angulaire, ou portion de cercle d'angle $t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{n}$ et de rayon R , une règle de trois par rapport à l'aire d'un cercle permet de dire

$$\text{l'aire de } \mathcal{A}_k(R) \text{ vaut bien } \frac{\pi}{n} R^2.$$

- (b) On remarque que, comme on peut le voir sur la figure 3,

$$D(t_k) \subseteq \Delta_k \subseteq D(t_{k+1})$$

d'où, d'après la question précédente

$$\frac{4\pi^2}{n^3} k^2 \leq \mathcal{A}_k \leq \frac{4\pi^3}{n^3} (k+1)^2$$

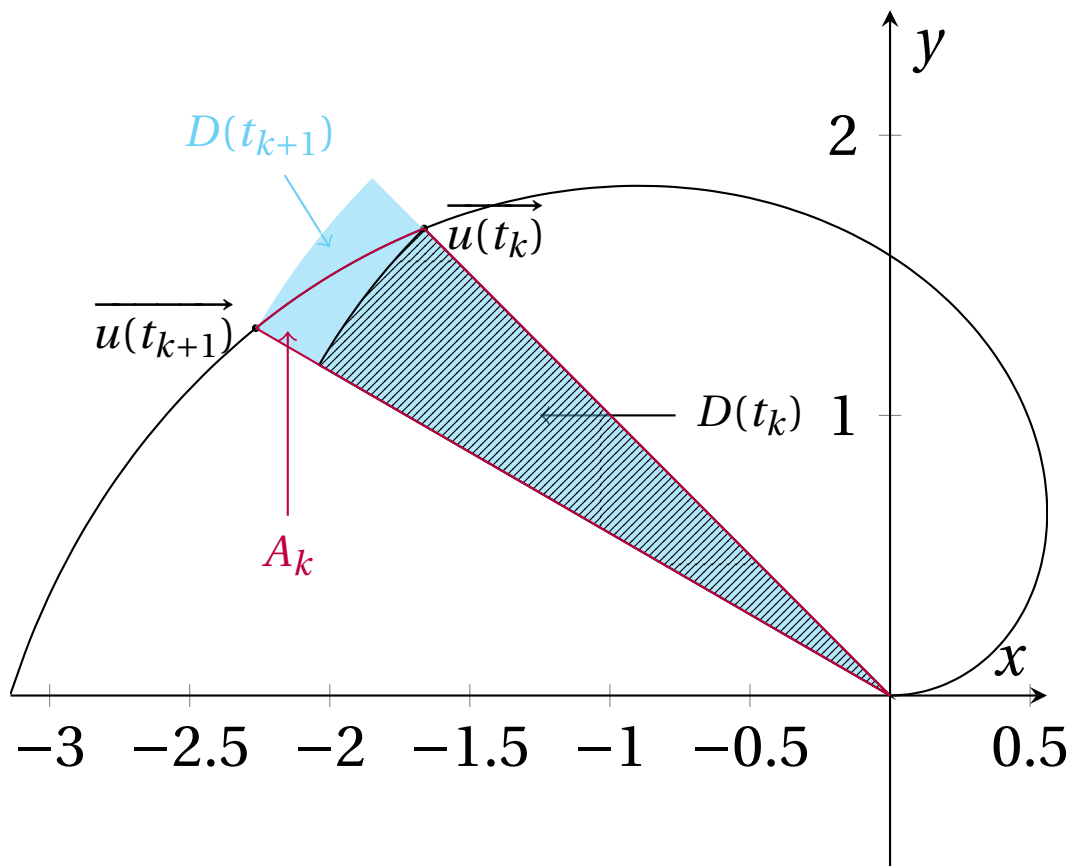


Figure 3:

(c) On procède par récurrence, pour tout $N \geq 0$, posons

$$P_n : \sum_{p=0}^N p^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Initialisation. Pour $N = 0$, l'égalité est immédiate.

Hérédité. Soit $N \geq 0$ et supposons P_n , montrons P_{n+1} .

On a

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{N+1} p^2 &= \sum_{p=0}^N p^2 + (N+1)^2 \\ &\stackrel{\text{par } P_n}{=} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} + (N+1)^2 \\ &= \frac{(N+1)(2N^2 + 7n + 6)}{6} \\ &= \frac{(N+1)(2N+3)(N+2)}{6} \end{aligned}$$

C.Q.E.D

Conclusion :

Pour tout n, P_n .

(d) On a d'après le découpage effectué par l'énoncé que $A = \sum_{k=0}^{n-1} A_k$, ainsi d'après la question

4.b, on peut encadrer A . On obtient

$$\frac{4\pi^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \leq A \leq \frac{4\pi^3}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^2$$

ce qui grâce au calcul de la question précédente donne bien

$$\frac{2\pi^3}{3n^2}(n-1)(2n-1) \leq A \leq \frac{2\pi^3}{3n^2}(n+1)(2n+2)$$

Or la valeur de A ne dépend pas de n , que l'on peut donc faire tendre vers $+\infty$ dans cette inégalité. Or les deux membres tendent vers $\frac{4\pi^3}{3}$, donc on obtient

$$A = \frac{4\pi^3}{3}$$

5. (a) La question 1b permet de dire qu'un vecteur directeur de la tangente à la courbe Γ au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc l'équation de cette tangente est

$$x + \frac{\pi}{2}y = \frac{\pi^2}{4}$$

Donc $N = \begin{pmatrix} \frac{\pi^4}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ et on en déduit que

la longueur du segment $[ON]$ vaut $\frac{\pi^2}{4}$.

- (b) La longueur du périmètre du cercle de centre O passant par le point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est celle d'un cercle de rayon $\frac{\pi}{2}$ et donc vaut $2\pi \times \frac{\pi}{2} = \pi^2$, on en déduit que le point N_1 vérifiant $\overrightarrow{ON_1} = 4\overrightarrow{ON}$ répond à la question, en conséquence

on peut construire le point N_1 en reportant au compas sur l'axe des abscisses 4 fois la longueur du segment $[ON]$ en partant du point O .

6. (a) On peut procéder de la façon suivante.
- Tracer une droite D passant par A mais pas par B .
 - Reporter au compas la distance AB sur la droite D en partant de A pour construire un point C' tel que $\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'} \rangle > 0$.
 - Construire au compas sur la droite D le point B' vérifiant $\overrightarrow{AB'} = 3\overrightarrow{AC'}$.

alors d'après le théorème de Thalès, la parallèle à la droite (BB') passant par C' coupe la droite (AB) en un point C vérifiant $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$. De plus par construction le point C appartient au segment $[AB]$. On a représenté la situation sur la figure 4, où la droite D' est perpendiculaire aux droites (BB') et (CC') .

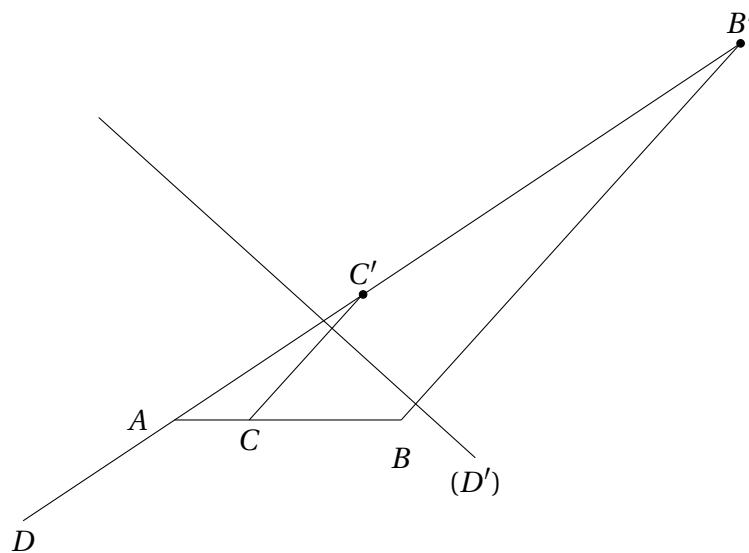


Figure 4:

- (b) On construit le point P grâce à la méthode décrite précédemment. Alors l'intersection du cercle de centre O et passant par P intersecte la courbe au point $M(\frac{4\pi}{9})$ puisque le point P a pour affixe un nombre complexe de module $\frac{4\pi}{9}$. La situation est représentée sur la figure 5.

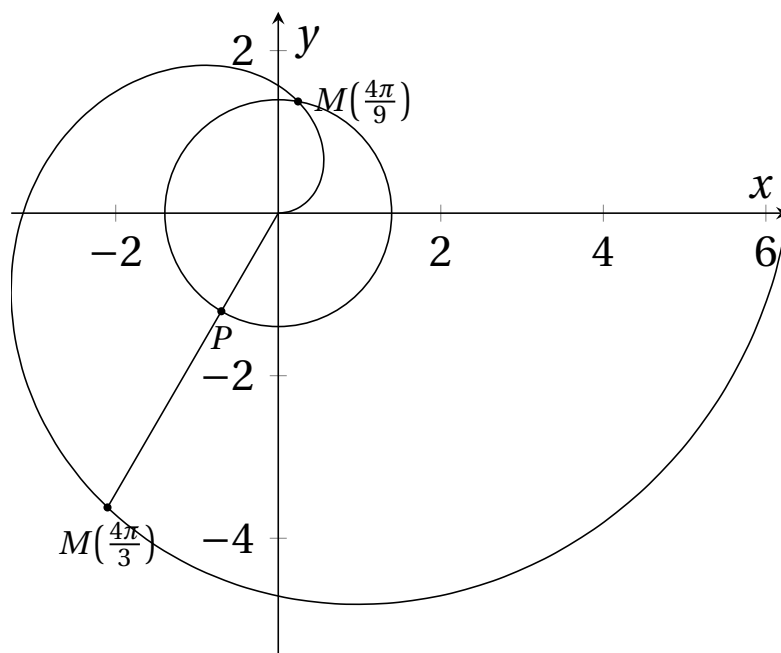


Figure 5: