

Première partie

- 1a)** $(V | x^{(\ell)}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k x_k^{(\ell)} \det(X_k)$ où X est la matrice de terme général $x_j^{(i)}$ et X_k la matrice déduite de X en supprimant la k -ème ligne. La somme précédente est égale à l'opposé au déterminant de la matrice X complétée par la colonne $x^{(\ell)}$ sur sa gauche. Cette matrice a deux colonnes égales donc son déterminant vaut zéro.
- 1b)** $V = 0$ si et seulement si tous les mineurs d'ordre n extraits de X sont nuls, ce qui équivaut au fait que $\text{rg}(X) < n$, ou aussi à la liaison de la famille $(x^{(i)})$.
- 1c)** En reprenant le raisonnement de **1a**, pour tout vecteur $u \in \mathbf{R}^{n+1}$ on a $(u | V) = \det(u, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, déterminant calculé dans la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} . En particulier $\|V\|^2 = \det(V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$.
- 2a)** Si $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est libre alors le vecteur $W = V/\|V\|$ vérifie **i** et **ii**. Par ailleurs, $\{x^{(1)}, \dots, x^{(n)}\}^\perp$ est une droite vectorielle (orthogonal d'un hyperplan de \mathbf{R}^{n+1}) donc les seuls vecteurs orthogonaux à tous les $x^{(i)}$ sont les multiples de W et les conditions **i** et **ii** imposent que le coefficient de proportionnalité vaut 1. Ceci prouve l'unicité de W .
- 2b)** La notion de rotation n'est pas claire. S'agit-il de la composée de deux réflexions ou d'un endomorphisme orthogonal positif quelconque (les deux notions coïncident en dimension 2 et 3, la deuxième est plus générale dans le cas n quelconque) ? On considère ici qu'il s'agit d'un endomorphisme orthogonal positif. Soit donc $R \in \mathcal{O}^+(\mathbf{R}^{n+1})$ et $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ une famille libre de \mathbf{R}^{n+1} . La famille image est aussi libre par injectivité de R . De plus, comme R conserve la norme et le produit scalaire, on a $R(W) \perp R(x^{(i)})$ pour tout i et $\|R(W)\| = 1$. Enfin, $\det(R(W), R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = \det(R) \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = \det(W, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) > 0$ car $\det(R) = 1$.
- 3a)** Q est diagonalisable car symétrique réelle. La forme quadratique q associée à Q est définie par $q(a_1, \dots, a_n) = \|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\|^2$, donc elle est définie positive puisque (e_1, \dots, e_n) est libre. On en déduit $\text{Spec}(Q) \subset \mathbf{R}^{+*}$ et en particulier Q est inversible.

3b) $(v | e_i) = (v_1 \dots v_n) Q \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où le « 1 » est en i -ème ligne. On en déduit : $((v | e_1) \dots (v | e_n)) = (v_1 \dots v_n) Q$.

- 4a)** Chaque vecteur $x^{(i)} = \partial_i F(u)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 de u . Le vecteur V défini en **1** est une fonction polynomiale des $x_j^{(i)}$, donc est aussi de classe \mathcal{C}^1 et $V \neq 0$ pour tout u par hypothèse. On en déduit que $\|V\|$ et $W = V/\|V\|$ sont aussi des fonctions de u de classe \mathcal{C}^1 .
- 4b)** En dérivant la relation $(W(u) | \partial_i F(u)) = 0$ par rapport à la k -ème coordonnée de u et à l'aide du théorème de Schwarz on obtient : $(\partial_k W(u) | \partial_i F(u)) = - (W(u) | \partial_k \partial_i F(u)) = - (W(u) | \partial_i \partial_k F(u))$.
- 4c)** De même, la relation $(W(u) | W(u)) = 1$ donne par dérivation : $(W(u) | \partial_i W(u)) = 0$. Donc le vecteur $\partial_i W(u)$ appartient à $W(u)^\perp = \langle \partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u) \rangle$. Les coefficients $a_{ij}(u)$ sont les composantes de $\partial_i W(u)$ dans la base $(\partial_1 F(u), \dots, \partial_n F(u))$ de $W(u)^\perp$, d'où leur existence et leur unicité.
- 4d)** Conséquence immédiate des résultats obtenus en **3b** et **4b**.

Deuxième partie

- 5)** R étant linéaire, $\partial_i \hat{F} = R \circ (\partial_i F)$ donc $\hat{W} = R \circ W$ d'après **2b**. Comme R conserve le produit scalaire et commute avec les dérivations, on en déduit $\hat{S} = S$ et $\hat{Q} = Q$, d'où $\hat{A} = A$ d'après **4d**, et enfin $\hat{K} = K$, $\hat{H} = H$.

6a) $\partial_1 F(u) = (1, 0, \partial_1 f(u))$, $\partial_2 F(u) = (0, 1, \partial_2 f(u))$ donc $W(u) = (-\partial_1 f(u), -\partial_2 f(u), 1) / \sqrt{(\partial_1 f(u))^2 + (\partial_2 f(u))^2 + 1}$ et $W(0) = (0, 0, 1)$. $S(0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$, $Q(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A(0) = -S(0)$ d'où $K(0) = rt - s^2$, $H(0) = -\frac{r+t}{2}$.

6b) Ici $s = t = 0$ donc $H(0) = -\frac{1}{2}r$. Pour définir la courbure d'une courbe dans le plan d'équation $x_2 = 0$, il est nécessaire d'orienter ce plan. On convient de l'orienter de sorte que la base (e_3, e_1) soit directe (ce qui revient à orienter la normale $\langle e_2 \rangle$ dans le sens de e_2). D'après la relation générale $c = \det(\vec{M}', \vec{M}'') / \|\vec{M}'\|^3$ donnant la courbure d'une courbe plane paramétrée, on a ici $c(0) = -r$ donc $H(0) = \frac{1}{2}c(0)$.

7a) $\partial_1 F(u) = (f'(u_1) \cos u_2, f'(u_1) \sin u_2, 1)$ et $\partial_2 F(u) = (-f(u_1) \sin u_2, f(u_1) \cos u_2, 0)$ sont liés si et seulement si $\partial_2 F(u) = 0$ vu la troisième composante, soit si et seulement si $f(u_1) = 0$, ce qui est exclu dans l'énoncé.

7b) Calcul sans difficulté.

7c) On veut $ff'' = 1 + f'^2$, ce qui est réalisé pour $f(t) = \text{ch } t$ par exemple. La surface obtenue est appelée *caténoïde*, voir <http://www.mathcurve.com/surfaces/catenoid/catenoid.shtml> pour une description de cette surface et de ses propriétés.

7d) En essayant $f(t) = \lambda \text{ch}(\mu t + \nu)$ on obtient les équations : $\lambda^2 \mu^2 = 1$, $\lambda \text{ch } \nu = \alpha$, $\lambda \mu \text{sh } \nu = \beta$ qui ont pour solution $\nu = \text{argsh } \beta$, $\lambda = \alpha / \sqrt{1 + \beta^2}$ et $\mu = 1/\lambda$.

Interprétation géométrique : $f(0) = \alpha$ est la distance du point $F(0)$ à l'axe de révolution et $f'(0) = \beta$ est la pente de la méridienne passant par $F(0)$. On vient donc de constater que *par tout point du plan $\langle e_1, e_2 \rangle$ autre que l'origine et pour toute droite sécante à $\langle e_3 \rangle$ passant par ce point, il existe une surface de révolution autour de $\langle e_3 \rangle$ à courbure moyenne nulle, passant par ce point et tangente à cette droite...*

7e)
$$K(u) = \frac{-f''(u_1)}{f(u_1)(1 + f'^2(u_1))^2} = \frac{-\mu^2}{\text{ch}^4(\mu u_1 + \nu)}.$$

8) En prenant f constante non nulle, la matrice A est constante et donc K et H le sont. Les surfaces correspondantes sont les cylindres de révolution autour de $\langle e_3 \rangle$. On peut aussi penser aux sphères d'axe $\langle e_3 \rangle$, soit $f(t) = \sqrt{R^2 - t^2}$, qui conviennent (avec un peu de calcul) : $A(u) = I/R$ où I est la matrice identité.

Troisième partie

9) Conséquence immédiate de 4c.

10a) Remarque : la classe de Φ n'est pas précisée. On suppose ici que Φ est de classe C^2 .

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}} = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi \right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} \text{ (produit de matrices jacobiennes).}$$

En notant $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on a donc $\partial_1 \tilde{F} = (a\partial_1 F + c\partial_2 F) \circ \Psi$ et $\partial_2 \tilde{F} = (b\partial_1 F + d\partial_2 F) \circ \Psi$,

d'où $\partial_1 \tilde{F} \wedge \partial_2 \tilde{F} = (ad - bc)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi) = \det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)((\partial_1 F \wedge \partial_2 F) \circ \Psi)$.

10b) D'après la relation précédente, $\tilde{W} = \text{sgn}\left(\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)\right)(W \circ \Psi)$, et le signe de $\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est constant sur \tilde{U} ($\det\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)$ est une fonction continue jamais nulle et $\tilde{U} = \Phi(U)$ est connexe par arcs).

10c) $\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial W}{\partial u} \circ \Psi\right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\left(\frac{\partial F}{\partial u} \times {}^t A\right) \circ \Psi\right) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial F}{\partial u} \circ \Psi\right) \times ({}^t A \circ \Psi) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} = \varepsilon\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}\right) \times \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}\right)^{-1} \times ({}^t A \circ \Psi) \times \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}.$

La matrice $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ est inversible puisque $\frac{\partial F}{\partial u}$ l'est. On en déduit : $\tilde{A}(\tilde{u}) = \varepsilon \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} \right) \times A(u) \times {}^t \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}} \right)^{-1}.$

10d) En prenant la demi-trace et le déterminant : $\tilde{H}(\tilde{u}) = \varepsilon H(u)$ et $\tilde{K}(\tilde{u}) = K(u)$.