

Première partie

◆ **1** L'équation (1) est une équation différentielle linéaire, du second ordre, homogène. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel complexe.

◆ **2** Les fonctions x_1 et x_2 étant de classe $\mathcal{C}^2$, leurs dérivées x'_1 et x'_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$. On en déduit que la fonction $W(x_1, x_2)$ est également de classe $\mathcal{C}^1$. Dérivons cette fonction, on obtient

$$W'(x_1, x_2) = x'_1 x'_2 + x_1 x''_2 - x''_1 x_2 - x'_1 x'_2 = 0$$

ce qui montre que $W(x_1, x_2)(t)$ est indépendante de t .

◆ **3.a** Remarquons que l'opérateur de translation $\mathcal{T}$ et l'opérateur de dérivation commutent et que, notamment, pour toute fonction deux fois dérivable : $\mathcal{T}(f)'' = \mathcal{T}(f'')$

Soit maintenant f une solution de l'équation (1). Notons $g = \mathcal{T}(f)$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g''(t) + (\lambda - q(t)) g(t) &= f''(t+T) + (\lambda - q(t)) f(t+T) \\ &= f''(t+T) + (\lambda - q(t+T)) f(t+T) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, si $f \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{T}(f) \in \mathcal{E}$.

◆ **3.b** τ est clairement un isomorphisme et il est inversible (fabriquer son inverse qui translate de $-T$!)

◆ **4.a** On invoque le théorème de Cauchy-Lipschitz

◆ **4.b** On remarque dans un premier temps que la famille (x_1, x_2) est libre. Montrons maintenant qu'elle est génératrice. Soit $y \in \mathcal{E}$ une solution de (1). Posons $z = y(0) x_1 + y'(0) x_2$.

Alors z est solution de (1) et on a $z(0) = y(0)$ et $z'(0) = y'(0)$. En d'autres termes, z et y sont solutions de la même équation différentielle linéaire d'ordre 2 et vérifient les mêmes conditions initiales. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $y = z$. On a donc montré que y est combinaison linéaire de x_1 et de x_2 .

La famille (x_1, x_2) est donc une base de $\mathcal{E}$.

◆ **5.a** Notons $M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ la matrice de l'endomorphisme τ dans la base (x_1, x_2) .

L'image par τ de la fonction x_1 est $\tau(x_1) = \alpha x_1 + \beta x_2$. Évaluant cette expression en $t = 0$, on trouve

$$\alpha = \tau(x_1)(0) = x_1(T).$$

Évaluons maintenant la dérivée en $t = 0$:

$$\tau(x_1)'(0) = \alpha x'_1(0) + \beta x'_2(0) = \beta.$$

Puisque l'opérateur τ et la dérivation commutent, on a également $\tau(x_1)'(0) = x'_1(T)$ et donc $\beta = x'_1(T)$.

De même avec x_2 , ce qui donne

$$M = \begin{pmatrix} x_1(T) & x_2(T) \\ x'_1(T) & x'_2(T) \end{pmatrix}.$$

◆ **5.b** Le déterminant de cette matrice est égal au wronskien de (x_1, x_2) évalué en T :

$$\det M = x_1(T) x'_2(T) - x_2(T) x'_1(T) = W(x_1, x_2)(T) = W(x_1, x_2)(0) = x_1(0) x'_2(0) - x_2(0) x'_1(0) = 1.$$

◆ **5.c** $\Delta = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(M) = \frac{1}{2} (x_1(T) + x'_2(T))$

◆ **6** Les valeurs propres de τ sont les racines du polynôme caractéristique de τ , qui est

$$P(\rho) = \det(M - \rho I_2) = \begin{vmatrix} x_1(T) - \rho & x_2(T) \\ x'_1(T) & x'_2(T) - \rho \end{vmatrix} = \rho^2 - 2\Delta \rho + 1$$

◆ **7.a** On suppose Δ réel et $|\Delta| \neq 1$. Le discriminant réduit du polynôme P vaut $\Delta^2 - 1$. Il est donc non nul et, par conséquent, P admet deux racines distinctes. Puisque τ admet deux valeurs propres distinctes et que $\mathcal{E}$ est de dimension 2, τ est diagonalisable et, par conséquent : $\mathcal{E}$ est la somme des (deux) sous-espaces propres de τ .

◆ **7.b** On suppose $|\Delta| < 1$. Le discriminant réduit $D = \Delta^2 - 1$ de P étant négatif, P admet deux racines conjuguées

$$\rho = \Delta + i\sqrt{1 - \Delta^2} \quad \text{et} \quad \bar{\rho} = \Delta - i\sqrt{1 - \Delta^2}.$$

Le produit des racines étant égal au déterminant de M , à savoir 1, on peut conclure $|\rho|^2 = |\bar{\rho}|^2 = 1$.

Notons (u, v) une base de $\mathcal{E}$ formée de vecteurs propres de τ et montrons que u et v sont stables.

En premier lieu, remarquons que la restriction de u à $[0; T]$ est bornée (comme toute fonction continue sur un segment).
Notons $A = \sup_{t \in [0; T]} |u(t)|$.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = E(t/T)$, de sorte que $t - nT \in [0; T]$. On peut alors écrire $u(t) = \tau^n(u)(t - nT) = \rho^n u(t - nT)$ donc $|u|$ est périodique, donc bornée, donc stable. Idem pour v . Toute combinaison linéaire de u et v est donc stable.

Montrons maintenant que u n'est pas fortement stable. En tant que fonction propre, u est non nulle et donc $A > 0$. On sait que ce maximum (sur $[0; T]$) est atteint ; notons t_0 un point vérifiant $|u(t_0)| = A > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u(t_0 + nT) = \rho^n u(t_0) \quad |u(t_0 + nT)| = |u(t_0)| = A.$$

Notamment, u ne tend pas vers 0 en l'infini, et donc u n'est pas fortement stable. Pour la même raison, v n'est pas fortement stable.

◆ **7.c** On suppose $|\Delta| > 1$. Le discriminant réduit du polynôme P est donc strictement positif et P possède deux racines réelles distinctes ρ et ρ' , de produit $\rho\rho' = 1$. L'une de ces racines est donc de module strictement inférieur à 1, et l'autre de module strictement supérieur à 1. On supposera par exemple $|\rho| < 1$ et $|\rho'| > 1$.

Notons u une fonction propre pour la valeur propre ρ . Notons encore $A = \sup_{t \in [0; T]} |u(t)|$. Soit $t \in \mathbb{R}^+$. Posons $n = E(t/T)$, de sorte que $t - nT \in [0; T]$. On peut alors écrire

$$u(t) = \tau^n(u)(t - nT) = \rho^n u(t - nT)$$

et, en passant au module :

$$|u(t)| = |\rho|^n |u(t - nT)| \leq |\rho|^n A.$$

On a donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$.

Notons v une fonction propre pour la valeur propre ρ' . Posons $N = \sup_{t \in [0; T]} |v(t)|$.

Cette borne supérieure est atteinte en au moins un point ; on peut donc choisir $t_1 \in [0; T]$ tel que $|v(t_1)| = N > 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v(t_1 + nT) = \rho'^n v(t_1)$ donc

$$|v(t_1 + nT)| = |\rho'|^n N.$$

Notamment, v n'est pas bornée, donc n'est pas stable (et encore moins fortement stable).

Par ailleurs, la famille (u, v) forme une base de $\mathcal{E}$. Toute solution de l'équation **(1)** s'écrit sous la forme $\alpha u + \beta v$; si $\beta \neq 0$, cette solution ne saurait être bornée et encore moins tendre vers 0 ; si au contraire $\beta = 0$, la solution est bien sûr fortement stable.

Une solution est fortement stable si et seulement si elle est multiple de u .

Toute solution stable est également multiple de u , et tous les multiples de u sont fortement stables, donc :

toute solution stable est également fortement stable.

◆ **8.a** Le discriminant réduit du polynôme P est nul, donc P admet une racine double $\rho = \Delta = \varepsilon$. Choisissons un vecteur propre u associé à ρ . Complétons maintenant la famille libre (u) en une base (u, v) de $\mathcal{E}$. La matrice représentative de l'endomorphisme τ dans la base (u, v) a pour expression générale

$$B = \text{mat}_{(u,v)}(\tau) = \begin{pmatrix} \varepsilon & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Cette matrice étant triangulaire supérieure, elle admet ε et b comme valeurs propres. Puisque $\text{sp}(B) = \text{sp}(\tau) = \{\varepsilon\}$, on en déduit que $b = \varepsilon$.

◆ **8.b** On suppose $a \neq 0$. L'endomorphisme τ n'est alors pas diagonalisable. On garde les notations de la question précédente : u est donc une fonction propre pour l'opérateur τ . Notamment, $\tau^2(u) = u$, ce qui prouve que la fonction u est $2T$ -périodique (et même T -périodique si $\varepsilon = +1$). Ainsi, u est une fonction bornée, donc stable. Étant périodique mais non nulle, elle ne saurait admettre de limite nulle en $+\infty$.

la fonction u est stable mais non fortement stable.

Avant de traiter le cas général, montrons que v n'est ni fortement stable, ni stable.

- On suppose pour commencer v fortement stable. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$v(t+T) = \tau(v)(t) = a u(t) + \varepsilon v(t) \quad (1)$$

donc $a u(t) = v(t+T) - \varepsilon v(t)$

En prenant dans cette équation la limite $t \rightarrow \infty$, et puisque $a \neq 0$, on obtient $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$: contradiction.

Conclusion : v n'est pas fortement stable.

- Utilisons deux fois de suite la formule (1) : on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(t+2T) &= a u(t+T) + \varepsilon v(t+T) = a u(t+T) + \varepsilon a u(t) + \varepsilon^2 v(t) \\ &= 2a\varepsilon u(t) + v(t). \end{aligned}$$

donc $v(t+2T) - v(t) = 2a\varepsilon u(t)$

Choisissons un réel t_0 tel que $u(t_0) \neq 0$: on obtient

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad v(t_0 + 2NT) = v(t_0) + 2N \underbrace{a u(t_0)}_{\neq 0}$$

ce qui montre que la fonction v n'est pas bornée : v n'est pas stable.

Soit maintenant f une solution non nulle de (1). Il existe des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $f = \alpha u + \beta v$. Si $\beta = 0$ (et donc $\alpha \neq 0$), la solution f n'est pas fortement stable. Supposons donc $\beta \neq 0$. La fonction αu étant bornée et la fonction βv ne l'étant pas, f n'est pas bornée, donc ni fortement stable, ni même stable.

L'unique solution fortement stable est la solution nulle.

Seconde partie

Puisque λ et q sont réelles, on cherche désormais des solutions réelles à l'équation différentielle (1).

♦ 9.a L'équation (1) s'écrit

$$x'' + \lambda x = 0 \quad (2)$$

Distinguons trois cas selon le signe de λ .

Cas $\lambda > 0$ Les solutions de l'équation (2) sont de la forme $x(t) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}t) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}t)$ donc

$$x_1(t) = \cos(\sqrt{\lambda}t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

Ainsi, $x_1(\pi) = x_2'(\pi) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi)$ et donc

$$\forall \lambda > 0 \quad \Delta_0(\lambda) = \cos(\sqrt{\lambda}\pi) \quad (3)$$

Cas $\lambda = 0$ On a $x_1(t) = 1$ et $x_2(t) = t$ donc $\Delta_0(0) = 1$.

Cas $\lambda < 0$ Les solutions de l'équation (2) sont de la forme

$$x(t) = \alpha \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t) + \beta \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t),$$

d'où

$$x_1(t) = \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}t) \quad \text{et} \quad x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}} \operatorname{sh}(\sqrt{-\lambda}t)$$

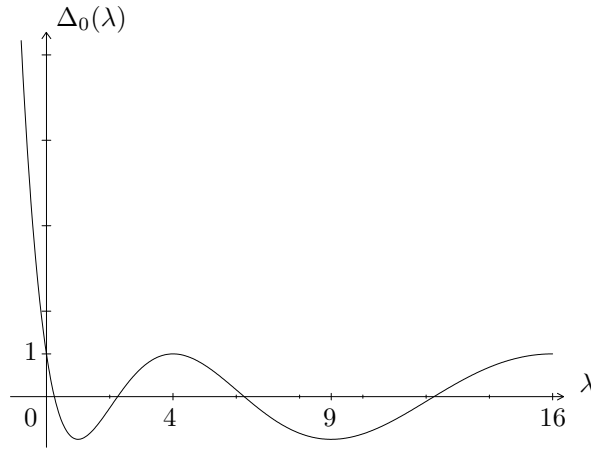
On en déduit $x_1(\pi) = x_2'(\pi) = \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\pi)$ et

$$\forall \lambda < 0 \quad \Delta_0(\lambda) = \operatorname{ch}(\sqrt{-\lambda}\pi).$$

Δ_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \Delta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} \lambda^n}{(2n)!}.$$

♦ 9.b



◆ **9.c** On suppose que $\lambda = n^2$ où n est un entier naturel. En utilisant les formules (3), on obtient successivement

$$\begin{aligned} x_1(\pi) &= \cos n\pi = (-1)^n & x_2(\pi) &= -n \sin n\pi = 0 \\ x_2(\pi) &= \frac{1}{n} \sin n\pi = 0 & x'_2(\pi) &= \cos n\pi = (-1)^n \end{aligned}$$

et donc, en utilisant la question 5.a :

$$M = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = (-1)^n I_2$$

◆ **10** L'équation (1) s'écrit maintenant

$$x'' + (\omega^2 - q)x = 0$$

Une simple récurrence permet de montrer la propriété demandée.

◆ **11** Choisissons un réel A positif. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t \in [-A; A]} |u_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n A^n}{\omega^n n!} \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [-A; A]} |v_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n A^n}{\omega^{n+1} n!}$$

Or la série $\sum \frac{Q^n A^n}{\omega^n n!}$ est convergente (de somme $\exp(QA/\omega)$), ce qui prouve que les séries de fonctions $\sum u_n(\cdot, \omega)$ et $\sum v_n(\cdot, \omega)$ convergent normalement, et donc uniformément, sur $[-A; A]$. On en déduit que $t \mapsto x_1(t, \omega)$ et $t \mapsto x_2(t, \omega)$ sont continues sur $[-A; A]$. Ceci étant vrai pour toute valeur du réel A , on en déduit que les fonctions $x_1(\cdot, \omega)$ et $x_2(\cdot, \omega)$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

◆ **12.a** En dérivant sous la signe somme et dans la borne,

$$u'_n(t, \omega) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} \right) q(s) u_{n-1}(s, \omega) ds$$

c'est-à-dire

$$u'_n(t, \omega) = \int_0^t \cos(\omega(t-s)) q(s) u_{n-1}(s, \omega) ds.$$

De même

$$v'_n(t, \omega) = \int_0^t \cos(\omega(t-s)) q(s) v_{n-1}(s, \omega) ds.$$

◆ **12.b** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Soit $t \in \mathbb{R}$. Effectuons une majoration triangulaire de l'intégrale définissant u'_n , en utilisant les majorations obtenues dans la question 10 :

$$|u'_n(t, \omega)| \leq \int_{[0; t]} Q |u_{n-1}(s, \omega)| ds \leq \frac{Q^n}{\omega^{n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{s^n}{n} \right]_0^t = \frac{Q^n |t|^n}{\omega^{n-1} n!}$$

De même

$$|v'_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n |t|^n}{\omega^n n!}$$

♦ **12.c** Fixons-nous un réel A positif. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sup_{t \in [-A; A]} |u'_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n A^n}{\omega^{n-1} n!} \quad \text{et} \quad \sup_{t \in [-A; A]} |v'_n(t, \omega)| \leq \frac{Q^n A^n}{\omega^n n!},$$

donc les séries de fonctions $\sum u'_n(\cdot, \omega)$ et $\sum v'_n(\cdot, \omega)$ convergent normalement, et donc uniformément, sur $[-A; A]$. Puisque les séries $\sum u_n(\cdot, \omega)$ et $\sum v_n(\cdot, \omega)$ convergent simplement en 0 (par exemple), on en déduit que les fonctions $t \mapsto x_1(t, \omega)$ et $t \mapsto x_2(t, \omega)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A; A]$ (et leur dérivée peut être calculée en dérivant terme à terme les séries qui les définissent). Ceci étant vrai pour toute valeur du réel A , on en déduit que

Les fonctions $x_1(\cdot, \omega)$ et $x_2(\cdot, \omega)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

♦ **13** Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculons l'intégrale du membre de droite de la formule de l'énoncé :

$$\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) x_1(s, \omega) ds = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_n(s, \omega) ds.$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale, grâce à la convergence uniforme de la série de fonctions de terme général $s \mapsto \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_n(s, \omega)$ (puisque $s \mapsto \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s)$ est continue donc bornée sur $[0; t]$) :

$$\int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) x_1(s, \omega) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) u_n(s, \omega) ds = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1}(t, \omega) = x_1(t, \omega) - u_0(t, \omega)$$

On fait de même pour x_2 et on obtient :

$$x_1(t, \omega) = \cos \omega t + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) x_1(s, \omega) ds \quad (4)$$

$$x_2(t, \omega) = \frac{\sin \omega t}{\omega} + \int_0^t \frac{\sin(\omega(t-s))}{\omega} q(s) x_2(s, \omega) ds \quad (5)$$

Il n'est malheureusement pas possible d'itérer la méthode exposée dans les questions 10 et 12.b pour montrer que les séries de terme général $u''_n(\cdot, \omega)$ et $v''_n(\cdot, \omega)$ convergent ; en effet, la formule établie dans le théorème 2 fait cette fois-ci apparaître un terme de bord. Sans connaissance supplémentaire sur la fonction q (et notamment sur sa régularité), il n'est pas possible de conclure.

♦ **14.a** Dérivons deux fois les expressions (5)

$$x'_1(t, \omega) = -\omega \sin \omega t + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) q(s) x_1(s, \omega) ds + 0$$

$$x'_2(t, \omega) = \cos \omega t + \int_0^t \cos(\omega(t-s)) q(s) x_2(s, \omega) ds + 0,$$

$$x''_1(t, \omega) = -\omega^2 \cos \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) q(s) x_1(s, \omega) ds + \cos(0) q(t) x_1(t, \omega) = -\omega^2 x_1(t, \omega) + q(t) x_1(t, \omega)$$

et

$$x''_2(t, \omega) = -\omega \sin \omega t - \omega \int_0^t \sin(\omega(t-s)) q(s) x_2(s, \omega) ds + \cos(0) q(t) x_2(t, \omega) = -\omega^2 x_2(t, \omega) + q(t) x_2(t, \omega)$$

ce qui prouve que $x_1(\cdot, \omega)$ et $x_2(\cdot, \omega)$ sont solutions de (1) pour $\lambda = \omega^2$.

♦ **14.b** On vérifie immédiatement que

$$\begin{cases} x_1(0, \omega) = 1 \\ x'_1(0, \omega) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2(0, \omega) = 0 \\ x'_2(0, \omega) = 1 \end{cases}$$

Le résultat de la question 5.c montre alors que

$$\Delta_q(\lambda) = \frac{1}{2} [x_1(\pi, \omega) + x'_2(\pi, \omega)].$$

♦ **15** On a

$$\begin{aligned}
\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\pi, \omega) + \sum_{n=0}^{\infty} v'_n(\pi, \omega) \right) - \cos \omega \pi \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\pi, \omega) + \sum_{n=1}^{\infty} v'_n(\pi, \omega) \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

donc, en remarquant que ces séries convergent normalement et donc absolument, et en utilisant une inégalité triangulaire conjointement avec les inégalités des questions 10 et 12.b :

$$\begin{aligned}
|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n \pi^n}{\omega^n n!} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q^n \pi^n}{\omega^n n!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q^n \pi^n}{\omega^n n!} - 1 = \exp\left(\frac{\pi Q}{\omega}\right) - 1
\end{aligned}$$

ce qui montre, comme $\omega = \sqrt{\lambda}$, que

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \exp\left(\frac{\pi Q}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1.$$

◆ **16.a** On a, par définition de u_1 :

$$u_1(\pi, \omega) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\omega(\pi - s))}{\omega} q(s) \cos \omega s \, ds$$

et par dérivation de v_1 (le terme de bord étant nul comme nous l'avons vu à la question 12.b) :

$$v'_1(\pi, \omega) = \int_0^{\pi} \cos(\omega(\pi - s)) q(s) \frac{\sin(\omega s)}{\omega} \, ds$$

donc

$$\begin{aligned}
u_1(\pi, \omega) + v'_1(\pi, \omega) &= \frac{1}{\omega} \int_0^{\pi} q(s) \underbrace{\left[\sin(\omega(\pi - s)) \cos(\omega s) + \cos(\omega(\pi - s)) \sin(\omega s) \right]}_{\sin[\omega(\pi - s) + \omega s]} \, ds \\
&= \frac{\sin \omega \pi}{\omega} \int_0^{\pi} q(s) \, ds
\end{aligned}$$

donc

$$u_1(\pi, \omega) + v'_1(\pi, \omega) = 0.$$

◆ **16.b** Reprenons l'équation 6 : compte tenu de la relation précédente, on obtient

$$\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=2}^{\infty} u_n(\pi, \omega) + \sum_{n=2}^{\infty} v'_n(\pi, \omega) \right)$$

et donc, par inégalité triangulaire :

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{Q^n \pi^n}{\sqrt{\lambda}^n n!} \leq \exp\left(\frac{Q \pi}{\sqrt{\lambda}}\right) - 1 - \frac{Q \pi}{\sqrt{\lambda}}$$

Or on sait que $\exp(x) - 1 - x = O\left(\frac{1}{x^2}\right)$ au voisinage de 0 ; on en déduit que

$$\Delta_q(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

◆ **17** Soit $\alpha > 0$. On peut supposer, sans restreindre le problème, que $0 < \alpha < 1/2$. Posons $\varepsilon = 1 - \cos \pi \alpha$; alors $\varepsilon \in]0 ; 1[$. On a de plus $\cos([- \pi \alpha ; \pi \alpha]) \subset [1 - \varepsilon ; 1]$

Par périodicité de la fonction cos, on peut montrer le résultat intermédiaire suivant :

Lemme : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I \quad \cos x > 1 - \varepsilon$$

Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ pair tel que $I \subset [\pi(n - \alpha); \pi(n + \alpha)]$.

De même, si I vérifie

$$\forall x \in I \quad \cos x < -1 + \varepsilon$$

alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ impair tel que $I \subset [\pi(n - \alpha); \pi(n + \alpha)]$.

On sait, d'après la question 15, que

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} |\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| = 0.$$

On en déduit qu'il existe un réel $\lambda_0 \geq 0$ tel que, pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, on a

$$|\Delta_q(\lambda) - \Delta_0(\lambda)| < \varepsilon.$$

Soit J un intervalle d'instabilité inclus dans $[\lambda_0; +\infty[$. Alors, pour tout $\lambda \in J$, on a $|\Delta_q(\lambda)| > 1$ et donc, puisque Δ_0 est continue :

$$\forall \lambda \in J \quad \Delta_0(\lambda) > 1 - \varepsilon$$

ou

$$\forall \lambda \in J \quad \Delta_0(\lambda) < -1 + \varepsilon$$

(ces deux possibilités s'excluant mutuellement puisque $\varepsilon \in [0; 1]$.) Le résultat intermédiaire montré ci-dessus permet de conclure qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall \lambda \in J \quad \pi\sqrt{\lambda} \in [\pi(n - \alpha); \pi(n + \alpha)]$$

c'est-à-dire

$$\forall \lambda \in J \quad \lambda \in [(n - \alpha)^2; (n + \alpha)^2].$$

Les intervalles d'instabilité sont donc toujours "centrés" sur les carrés des entiers ; ils sont donc de plus en plus éloignés. (Notre étude ne permet pas de conclure quant à leur largeur en revanche. Se reporter par exemple au bouquin d'Arnold sur les EDO, Éditions Mir, Moscou, pour une étude plus détaillée.)