

# Corrigé CCP PSI Mathématiques 2 2003

## PARTIE I

1. Pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $\cos(\arccos x) = x$

Pour tout réel  $\theta$ ,  $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$  et  $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$ .

On a alors, pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$  :  $t_0(x) = \cos 0 = 1$ ,  $t_1(x) = \cos(\arccos x) = x$  et

$t_2(x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1$ ,  $t_3(x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x$ .

2. En résolvant les équations  $t_i(x) = 0$  pour tout entier  $i$  compris entre 0 et 4, on obtient :

$t_0$  n'a pas de racine réelle tandis que  $t_1$  a une unique racine 0.

$t_2$  a deux racines réelles  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .  $t_3$  a trois racines réelles  $0, \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

D'autre part, la fonction  $t_1$  est croissante sur  $[-1, 1]$  et pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $t_2'(x) = 4x$  et  $t_3'(x) = 3(4x^2 - 1)$  ce qui donne les tableaux de variations suivants :

$x$	-1	0	1
$t_2(x)$	1	↘	↗
		-1	1

$x$	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$t_3(x)$	-1	↗	↘	↗
		1	-1	1

On constate que pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 3

$$\sup_{[-1,1]} t_i = 1 \text{ et } \inf_{[-1,1]} t_i = -1$$

3. On a  $t_n(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \arccos x = \frac{(2k+1)\pi}{2n}$ .

Mais  $\arccos x \in [0, \pi]$  et  $0 \leq \frac{(2k+1)\pi}{2n} \leq \pi \iff 0 \leq 2k+1 \leq 2n \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq n - \frac{1}{2}$  ce qui équivaut, puisque  $k$  est un entier à  $k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket$ .

Les racines de  $t_n$  sont donc les  $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$  où  $k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket$ .

Or, pour tout  $k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket$ ,  $x_{n-1-k} = \cos\left(\frac{(2n-2k-1)\pi}{2n}\right) = \cos\left(\pi - \frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) = -x_k$ .

Les racines de  $t_n$  sont bien deux à deux opposées.

4. 4.1. On a  $\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^k = e^{i\frac{p\pi}{2n}} \frac{1 - \left(e^{i\frac{p\pi}{n}}\right)^n}{1 - e^{i\frac{p\pi}{n}}}$  car on a une somme des  $n$  premiers termes d'une suite géométrique de raison  $e^{i\frac{p\pi}{n}} \neq 1$  et de premier terme égal à 1.

Ceci donne après simplifications :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{ip\theta_k} = \frac{i(1 - (-1)^p)}{2 \sin\left(\frac{p\pi}{2n}\right)}$$

4.2. En prenant les parties réelles des 2 membres de l'égalité précédente, on a :  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos p\theta_k = 0$ .

Or, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0..n-1 \rrbracket$ ,  $\theta_k$  appartient à  $[0, \pi]$  et  $x_k = \cos \theta_k$  donc  $x_k = \arccos \theta_k$ .

Finalement,  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos p\theta_k = \sum_{k=0}^{n-1} \cos(p \arccos x_k)$  et  $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} t_p(x_k) = 0}$ .

5. Notons comme l'énoncé l'indique pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $\theta = \arccos x$ . Alors, pour  $n \geq 1$ , en utilisant la relation  $\cos p + \cos q = 2 \cos \left( \frac{p+q}{2} \right) \cos \left( \frac{p-q}{2} \right)$  :

$$t_{n+1}(x) + t_{n-1}(x) = \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \cos \theta = 2xt_n(x)$$

6. Montrons par récurrence sur  $n$ :

$$\boxed{(H_n) : " t_n \text{ est la restriction à } [-1, 1] \text{ d'un polynôme } T_n \text{ de degré } n "$$

$(H_0)$  et  $(H_1)$  sont vraies en prenant  $T_0 = 1$  et  $T_1 = X$ .

Supposons pour  $(H_n)$  et  $(H_{n+1})$  soient vraies.

Alors, en notant  $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$ , d'après la relation établie au 5., on a pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $t_{n+2}(x) = T_{n+2}(x)$ . De plus  $XT_{n+1}$  est de degré  $n+2$  tandis que  $T_n$  est de degré  $n$ . Ces degrés sont différents, donc  $T_{n+2}$  est de degré  $n+2$  ce qui montre que  $(H_{n+2})$  est vraie.

Si on note  $c_n$  le coefficient dominant de  $T_n$ , la relation valable pour  $n \geq 1$ ,  $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$  donne pour tout  $n \geq 1$ ,  $c_{n+1} = 2c_n$ . Comme  $c_1 = 1$ , on obtient pour tout  $n \geq 1$ ,  $\boxed{c_n = 2^{n-1}}$ .

7. L'ensemble  $\{\theta_k, k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket\}$  est constitué de  $n$  réels 2 à 2 distincts de  $[0, \pi]$ . Or  $x \mapsto \cos x$  est strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ .

Donc  $\{x_k, k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket\}$  est un ensemble de  $n$  réels distincts. Chaque  $x_k$  est racine de  $T_n$  est de degré  $n$ . On a donc toutes les racines de  $T_n$  et  $\boxed{T_n \text{ n'a pas de racine complexe non réelle}}$ .

## PARTIE II

1. La fonction  $\varphi : x \mapsto \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}$  est continue et positive sur  $] -1, 1[$ .

Comme  $f$  est continue sur le segment  $[-1, 1]$ , elle est bornée par un réel noté  $M$ .

On a  $\forall x \in [0, 1[$ ,  $|\varphi(x)| \leq \frac{M}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-x}}$ .

De plus  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  est intégrable sur  $[0, 1[$  donc  $\varphi$  est intégrable sur  $[0, 1[$ . On démontre de

même qu'elle l'est sur  $] -1, 0]$  et donc  $\boxed{x \mapsto \frac{|f(x)|}{\sqrt{1-x^2}}$  est intégrable sur  $] -1, 1[$ .

**2. 2.1.**  $I_0 = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 1^- \\ b \rightarrow -1^+}} [\arcsin x]_b^a$ . Donc  $I_0 = \pi$

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\substack{a \rightarrow 1^- \\ b \rightarrow -1^+}} \left[ -\frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \right]_b^a$$
. D'où  $I_1 = 0$

**2.2.**  $x \mapsto \cos x$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  strictement monotone de  $]0, \pi[$  dans  $] -1, 1[$ .  
En effectuant le changement de variable  $x = \cos \theta$ , on obtient :

$$I_n = \int_{\pi}^0 \frac{\cos^n \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta}} (-\sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos^n \theta d\theta$$

Une intégration par parties donne pour  $n \geq 2$  :

$$I_n = [\cos^{n-1} \theta \sin \theta]_0^{\pi} + (n-1) \int_0^{\pi} \sin^2 \theta \cos^{n-2} \theta d\theta$$

En remplaçant  $\sin^2 \theta$  par  $1 - \cos^2 \theta$  dans la dernière intégrale, on obtient pour  $n \geq 2$ ,

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n \text{ ce qui donne } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

**2.3.** En appliquant la relation précédente avec  $n = 2$  et  $n = 4$ ,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{2} \quad I_4 = \frac{3}{4} I_2 = \frac{3\pi}{8}$$

De plus comme  $I_1 = 0$ , on a  $\forall p \in \mathbb{N}, I_{2p+1} = 0$ .

**3.** On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des fonctions continues sur  $[-1, 1]$ .

**3.1.** Pour  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{C}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

$\langle f, g \rangle$  est bien définie d'après **II.1.** appliqué à  $fg$  qui appartient à  $\mathcal{C}$ .

$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est bilinéaire et symétrique.

Soit  $f \in \mathcal{C}$ . On a  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \geq 0$  (intégrale d'une fonction positive)

Si  $\int_{-1}^1 \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ , comme  $x \mapsto \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$  est continue et positive sur  $] -1, 1[$ , on a

$$\forall x \in ] -1, 1[, \frac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \text{ d'où } \forall x \in ] -1, 1[, f(x) = 0.$$

De plus, comme  $f$  est continue en 1,  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$  et de même, on démontre que  $f(-1) = 0$ . Finalement  $\forall x \in [-1, 1], f(x) = 0$ .

On a montré que  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{C}$

**3.2.** Soit  $p$  et  $q$  deux entiers distincts de  $\llbracket 0..n \rrbracket$ .

En utilisant de nouveau le changement de variable  $\theta = \arccos x$ , on a :

$$\langle t_p, t_q \rangle = \int_0^{\pi} t_p(\cos \theta) t_q(\cos \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos p\theta \cos q\theta d\theta$$

ce qui donne

$$\langle t_p, t_q \rangle = \frac{1}{2} \left( \int_0^\pi \cos\left(\frac{p+q}{2}\theta\right) d\theta + \int_0^\pi \cos\left(\frac{p-q}{2}\theta\right) d\theta \right) = 0$$

La famille  $(t_p)_{0 \leq p \leq n}$  est donc orthogonale. De plus ces éléments sont non nuls. On a donc une famille libre de  $n+1$  vecteurs de  $\mathcal{R}_n$  qui est de dimension  $n+1$ . On peut donc conclure que  $(t_p)_{0 \leq p \leq n}$  est une base de  $\mathcal{R}_n$ .

Le même changement de variable donne  $\|t_p\| = \sqrt{\int_0^\pi \cos^2 p\theta d\theta} = \sqrt{\int_0^\pi \frac{\cos 2p\theta + 1}{2} d\theta}$  ce

qui donne  $\|t_0\| = \sqrt{\pi}$  et pour  $p \neq 0$ ,  $\|t_p\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

**3.3.** Soit  $n \geq 1$  et  $k \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket$ .  $x \mapsto x^k$  appartient à  $\mathcal{R}_{n-1}$ .

Il existe donc  $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$  tels que pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $x^k = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j t_j(x)$ .

Alors  $\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j \langle t_j, t_n \rangle$  et comme  $t_n$  est orthogonal à tous les vecteurs

de la famille  $(t_j)_{0 \leq j \leq n-1}$ , on a  $\int_{-1}^1 \frac{x^k t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$

**4.** On note (1)  $\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = a_0 P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

**4.1.** Si (1) est satisfaite pour tout  $P$  de  $\mathcal{R}_5$ , en prenant successivement  $P(x) = 1$ ,  $P(x) = x$  et

$$P(x) = x^2, \text{ on obtient le système } \begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 = \pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}a_2 = 0 \\ \frac{3}{4}a_0 + \frac{3}{4}a_2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La seconde équation donne  $a_0 = a_2$ . En reportant dans la troisième, on trouve  $a_0 = a_2 = \frac{\pi}{3}$

puis avec la première, on aboutit à  $a_0 = a_1 = a_2 = \frac{\pi}{3}$ .

**4.2.** Avec ces valeurs:  $a_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{9}{16} \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{8} = I_4 = \int_{-1}^1 \frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}} dx$

et  $a_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = 0 = I_5 = \int_{-1}^1 \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$ .

L'égalité (1) est donc vraie pour tout  $P$  de la forme  $P(x) = x^k$  où  $k \in \llbracket 0..5 \rrbracket$ . (Le cas  $k = 3$  se montre comme les deux autres). Si  $P$  appartient à  $\mathcal{R}_5$ , il existe  $(p_0, \dots, p_5) \in \mathbb{R}^6$

tel que pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $P(x) = \sum_{k=0}^5 p_k x^k$ . Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \sum_{k=0}^5 p_k \int_{-1}^1 \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^5 p_k \left( a_0 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k + a_1 0^k + a_2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k \right) \\
&= a_0 \sum_{k=0}^5 p_k \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k + a_1 \sum_{k=0}^5 a_k 0^k + a_2 \sum_{k=0}^5 p_k \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^k \\
&= a_0 P \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + a_1 P(0) + a_2 P \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \right)
\end{aligned}$$

**5. 5.1.** Notons  $g$  la fonction définie sur  $]0, 1[$  par  $g(x) = \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ .

$g$  est continue positive sur  $]0, 1[$ .

On a  $g(x) \sim x^{\frac{7}{2}}$  donc  $g$  est prolongeable par continuité en 0 et  $g$  est intégrable sur  $\left] 0, \frac{1}{2} \right]$ .

D'autre part,  $g(x) \sim \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  et  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  est intégrable sur  $\left[ \frac{1}{2}, 1 \right[$  donc  $g$  aussi.

Finalement  $g$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

**5.2.**  $x \mapsto 2x - 1$  est une bijection strictement croissante de  $]0, 1[$  dans  $] -1, 1[$ . On peut donc effectuer le changement de variable  $t = 2x - 1$  dans  $J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ . On obtient :

$J = \frac{1}{16} \int_{-1}^1 \frac{(t+1)^4}{\sqrt{1-t^2}} dt$ . On peut appliquer la formule (1) avec  $P(t) = (1+t)^4$ .

Ainsi  $J = \frac{1}{16} \times \frac{\pi}{3} \left( \frac{(2-\sqrt{3})^4}{16} + 1 + \frac{(2+\sqrt{3})^4}{16} \right)$  et  $J = \frac{35\pi}{128}$

## PARTIE III

On note (2)  $\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)$ .

**1.** Si l'égalité (2) est satisfaite pour toutes les fonctions  $x \mapsto x^i$  où  $i$  est un entier de  $\llbracket 0..n-1 \rrbracket$ , on a :

$$\forall i \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket, \quad \sum_{k=0}^{n-1} x_k^i a_k = \int_{-1}^1 \frac{x^i}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Ainsi le  $n$ -uplet  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  est solution d'un système de  $n$  équations dont la matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  a pour terme général  $b_{ij} = x_{j-1}^{i-1}$ . Le déterminant de ce système est donc un

déterminant de van der Mond qui est non nul car  $x_0, \dots, x_{n-1}$  sont deux à deux distincts.

**2. 2.1.** Soit les formes linéaires  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  définies sur  $\mathcal{R}_{n-1}$  par :

$$\varphi_1(P) = \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \varphi_2(P) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)$$

Par hypothèse, pour tout  $k$  de  $\llbracket 0..n-1 \rrbracket$ ,  $\varphi_1(t_k) = \varphi_2(t_k)$ .

Or  $(t_k)_{0 \leq k \leq n-1}$  est une base de  $\mathcal{R}_{n-1}$ .

Donc pour tout  $P$  de  $\mathcal{R}_{n-1}$ ,  $\varphi_1(P) = \varphi_2(P)$  c'est à dire  $\boxed{\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k)}$ .

(On aurait aussi pu raisonner comme à la question **II.4.2** en décomposant  $P$  dans la base  $(t_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ )

**2.2** Les questions **III.1** et **III.2.1** assurent que si le  $n$ -uplet  $(a_0, \dots, a_{n-1})$  existe, il est unique.

De plus, par hypothèse :  $\forall i \in \llbracket 0..n-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k t_i(x_k) = \int_{-1}^1 \frac{t_i(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \langle t_0, t_i \rangle$ .

Avec les valeurs trouvées au **II.3.2** et **II.3.3**, l'hypothèse faite équivaut à  $(a_0, \dots, a_n)$  solution de :

$$(S) \begin{cases} a_0 + a_1 + \dots + a_n = \pi \\ \forall i \in \llbracket 1..n-1 \rrbracket, \sum_{k=0}^{n-1} a_k t_i(x_k) = 0 \end{cases}$$

Comme pour tout  $i$  de  $\llbracket 1..n-1 \rrbracket$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} t_i(x_k) = 0$ , on peut dire que le  $n$ -uplet  $(\frac{\pi}{n}, \dots, \frac{\pi}{n})$  est solution de  $(S)$ .

Ainsi  $\boxed{\text{si on prend tous les } a_k \text{ égaux à } \frac{\pi}{n}, (2) \text{ est vérifiée pour tout } P \text{ de } \mathcal{R}_{n-1}}$ .

**2.3.** Soit  $P$  dans  $\mathcal{R}_{2n-1}$ . D'après le théorème de la division euclidienne, il existe deux éléments  $Q$  et  $R$  de  $\mathcal{R}$  tels que pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$ ,  $P(x) = Q(x)t_n(x) + R(x)$ .

De plus  $R$  appartient à  $\mathcal{R}_{n-1}$ . On en déduit que  $Q$  appartient aussi à  $\mathcal{R}_{n-1}$ .

Comme pour tout  $k$  de  $\llbracket 0..n-1 \rrbracket$ ,  $t_n(x_k) = 0$ , on a aussi  $P(x_k) = R(x_k)$ .

En écrivant  $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$ , le résultat de **II.3.3** implique que  $\int_{-1}^1 \frac{Q(x)t_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0$ .

Comme (2) est vérifiée pour  $R$  car  $R$  appartient à  $\mathcal{R}_{n-1}$ , on a :

$$\int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{R(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sum_{k=0}^{n-1} a_k R(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(x_k) = S_n(P)$$

**3. 3.1.** Soit  $P \in \mathcal{R}$  de degré  $d$ .

Si  $d \leq 2n-1$ , alors  $P$  appartient à  $\mathcal{R}_{2n-1}$  et  $P$  vérifie (2). Donc  $D_n(P) = 0$ .

Notons  $n_0$  le plus petit entier supérieur ou égal à  $\frac{d+1}{2}$ . Si  $n \geq n_0$ ,  $D_n(P) = 0$  et :

$$\begin{aligned}
|D_n(f)| &= |D_n(f) - D_n(P)| = \left| \int_{-1}^1 \frac{f(x) - P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx - \sum_{k=0}^{n-1} a_k (f(x_k) - P(x_k)) \right| \\
&\leq \int_{-1}^1 \frac{|f(x) - P(x)|}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=0}^n |a_k| |f(x_k) - P(x_k)| \\
&\leq \|f - P\|_\infty \left( \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx + \sum_{k=0}^n |a_k| \right) = 2\pi \|f - P\|_\infty
\end{aligned}$$

car tous les  $a_k$  sont positifs et égaux à  $\frac{\pi}{n}$ .

**3.2.** Soit  $\varepsilon > 0$ .

D'après le théorème de Stone Weierstrass, il existe  $P$  dans  $\mathcal{R}$  tel que  $\|f - P\| \leq \frac{\varepsilon}{2\pi}$ .

D'après **III.3.2**, il existe  $n_0$  tel que pour  $n \geq n_0$ ,  $|D_n(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$ .

Donc  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / n \geq n_0 \implies \|D_n(f)\| \leq \varepsilon$ .

On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n(f) = 0$  c'est à dire  $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx}$ .

**4. 4.1.** Notons  $u_k = \frac{1}{k!}$ . On a pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{1}{k+1}$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = 0$ .

D'après la règle de d'Alembert, la série de terme général  $\frac{1}{k!}$  converge.

Notons  $R_m = \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ . Alors

$$\begin{aligned}
R_m &= \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} + \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)k!} \\
&\leq \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{m+2} \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{m+2} R_m
\end{aligned}$$

On a donc  $\left(1 - \frac{1}{m+2}\right) R_m \leq \frac{1}{(m+1)!}$  d'où  $R_m \leq \frac{m+2}{(m+1)(m+1)!}$ .

Or  $\frac{1}{m.m!} - \frac{m+2}{(m+1)(m+1)!} = \frac{(m+1)^2 - m(m+2)}{m(m+1)(m+1)!} = \frac{1}{m(m+1)(m+1)!} \geq 0$ .

On a donc  $\boxed{R_m \leq \frac{1}{m.m!}}$ .

**4.2.** On sait que pour tout réel  $x$ ,  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$ .

Soit  $P(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$ . Pour tout  $x$  de  $[-1, 1]$  :

$$|e^x - P(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq R_m \leq \frac{1}{m.m!}$$

On a bien  $\|f - P\|_\infty \leq \frac{1}{m.m!}$  en prenant  $P(x) = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!}$ .

4.3. Prenons  $m = 7$  et  $P(x) = \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}$

D'après la question **III.3.1**,

$$\left| \int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx - S_4(f) \right| = |D_4(f)| \leq 2\pi \|f - P\|_\infty \leq \frac{2\pi}{7.7!} \leq \frac{1}{7!} \leq 10^{-3}$$

Donc  $S_4(f)$  est une valeur approchée de  $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  à  $10^{-3}$  près.

4.4.  $S_4(f) = \frac{\pi}{4} \sum_{k=0}^3 e^{x_k}$  avec  $x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right)$ .

Une valeur approchée de  $\int_{-1}^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx$  à  $10^{-3}$  près est  $\boxed{3,977}$ .