

1 Partie A

- une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.
et on a alors $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
- On peut rédiger le calcul de l'inverse (par la transposée de la comatrice, ou par résolution de système) ou les calculer au brouillon et tester simplement le produit.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \text{ avec } \det(A_1) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 = 1 \text{ donc } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \text{ avec } \det(A_2) = -1 \text{ et } A_2^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \text{ avec } \det(A_3) = 2 \text{ donc } A_3 \text{ est inversible et } A_3^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

- $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $\det(A) = ad - bc$

donc A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

$$\text{On a alors } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Donc, si $ad - bc \in \{1, -1\}$ alors $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Réciproquement, si $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors, les quatre quotients sont des entiers. Où voir des entiers qui n'en sont pas ?

Astuce : Comme $\frac{a}{ad - bc} \cdots$ sont entiers alors leur produit ou différence l'est encore.

Donc

$$\begin{aligned} \frac{a}{ad - bc} \frac{d}{ad - bc} - \frac{b}{ad - bc} \frac{c}{ad - bc} &= \frac{ad - bc}{(ad - bc)^2} \\ &= \frac{1}{ad - bc} \end{aligned}$$

Or, les seuls entiers dont l'inverse soit encore entier sont 1 et -1.

Donc $ad - bc = \pm 1$

Conclusion : $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ inversible si et seulement si $\det(A) = \pm 1$

et on a alors $A^{-1} = \pm \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ suivant que $ad - bc = \pm 1$

- $A_4 = \begin{pmatrix} 5 & c \\ b & 1 \end{pmatrix}$ alors

$$\det(A_4) = 5 - bc \iff bc = 5$$

et 5 étant un nombre premier

$$\iff (b, c) = \pm(5, 1) \text{ ou } \pm(1, 5)$$

2 Partie B

Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $h(A) = p > 0$ son ordre.

p étant le plus petit, on a donc $A^p = I$ et pour tout $q < p : A^q \neq I$

1. On doit penser à l'inversibilité par $A \cdot B = I$, ici, en découpant la puissance.

Comme $p \geq 1$ a $p - 1 \geq 0$ et $A \cdot A^{p-1} = A^p = I$

donc (matrice carrée) A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ comme produit de matrices à coefficients entiers ($p > 1$) ou comme matrice unité ($p = 1$)

Et d'après la partie A, on a donc $\det(A) = \pm 1$

2. Comme $A^p = I$ alors $(A^{-1})^p = (A^p)^{-1} = I$

Donc, $A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et l'ordre de A^{-1} est au plus p .

Donc $h(A^{-1}) \leq h(A)$.

Astuce : on a aussi $A = (A^{-1})^{-1}$ avec $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ d'ordre $h(A^{-1})$ donc $h(A) \leq h(A^{-1})$

Conclusion : $h(A) = h(A^{-1})$ si $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$

3. Rappel : Une matrice 2×2 a une ou deux valeurs propres distinctes dans \mathbb{C} qui sont les racines de son polynôme caractéristique (racine double dans le cas de la valeur propre unique).

Si elle en a deux, elle est diagonalisable.

Si elle en a une seule, c'est ou bien kI , sinon, une matrice non diagonalisable.

« Valeur propre » peut être relié à diagonalisation, à polynôme caractéristique, ou de façon élémentaire à (définition) vecteur propre associé.

Si A a pour valeurs propre λ avec $U \neq 0$ colonne propre associée on a $AU = \lambda U$ et donc $A^p U = \lambda^p U$.

Et comme $A^p = I$ on a donc $\lambda^p U = U$ et comme $U \neq 0$ est donc une famille libre, $\lambda^p = 1$.

Finalement $|\lambda|^p = 1$ et $|\lambda| = 1$.

Conclusion : les valeurs propres de A sont de module 1

4. Pour un polynôme de degré 2, $X^2 + bX + c$, c est le produit des racines, et b qui est l'opposé de la somme des racines.

On a $\text{Tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2$. (deux racines simples ou une racine double)

Et on a aussi $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$

5. Or $\text{Tr}(A) = a + d \in \mathbb{Z}$, et $|\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| = 2$.

Donc $|\text{Tr}(A)| \leq 2$ et

Conclusion : $\text{Tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

6. $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ à coefficients entiers.

$$C^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}) \text{ avec } h(C) = 2 \text{ (} C^1 \neq I \text{)}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $D \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ et $h(D) = 3$

$$CD = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Idee : et quand on calcule les puissances de E , on ne tombe pas sur I , mais jusqu'où continuer pour prouver que ce n'est jamais le cas ?

On cherche donc la contradiction avec une des propriétés vues pour les éléments de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$:

$\text{Tr} = -2$: OK $\det = -1$: OK

$\text{Tr} = -2$ est alors la somme des valeurs propres.

Si $E \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ alors elle sont de module 1, et donc la seule valeur propre est -1 . (racine double du polynome caractéristique)

Or $E + I = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (deux colonnes non proportionnelles) donc -1 n'est pas valeur propre et donc

Conclusion : CD n'appartient pas à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$

On pouvait aussi calculer le polynome caractéristique :

$$\begin{aligned} \det(XI - A) &= \begin{vmatrix} X+3 & -1 \\ 2 & X-1 \end{vmatrix} \\ &= (X+3)(X-1) + 2 \\ &= X^2 + 2X - 1 \end{aligned}$$

de discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8$ et de racines $\frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$ qui ne sont pas de module 1

7. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} X-a & -c \\ -b & X-d \end{vmatrix} \\ &= X^2 - (a+d)X + ad - bc \\ &= X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A) \end{aligned}$$

8. Quand $A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, il y a 5 valeurs possibles pour $\text{Tr}(A)$ et 2 pour $\det(A)$.

Il y a donc au maximum $5 \cdot 2 = 10$ combinaisons possible Tr et \det . (certaines sont en fait incompatibles dans $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$ comme on en a vu l'exemple avec CD)

Si $\text{Tr}(A) = 2$ il faut alors que la somme des deux valeurs propres (de module 1) soient 1, donc 1 est la seule. Donc $\text{Tr} = 2$ et $\det = -1$ est à exclure.

De même si $\text{Tr} = -2$ alors -1 est valeur propre double et $\det = 1$, donc $\det = -1$ est à exclure.

Si $\text{Tr} = 0$ alors les deux racines sont opposées et $-\lambda\lambda = -\lambda^2 = \det = \pm 1 \dots$ pas de contradiction.

Si $\text{Tr} = 1$, les racines sont alors distinctes (sinon, $\text{Tr} = \pm 2$) $\lambda_1 = e^{i\theta_1}$ et $\lambda_2 = e^{i\theta_2}$ avec $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 1$ et donc (triangle équilatéral) $\theta_1 = \pm\pi/3$ et $\theta_2 = -\theta_1$ d'où $\det = e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} = 1$ et $\det = -1$ est à exclure

De même si $\text{Tr} = -1$ alors $\theta_1 = \pm 2\pi/3$ et $\theta_2 = -\theta_1$ et $\det = -1$ est à exclure.

9. Il reste donc :

Les cas où il y a deux racines distinctes, la matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable.

- $\text{Tr} = 1$ et $\det = 1$,

le polynôme caractéristique est $X^2 - X + 1$

discriminant $\Delta = -3$

racines $\lambda = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$ et $\frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-i\pi/3}$

Il existe donc une matrice P inversible telle que $A = P \begin{pmatrix} e^{i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/3} \end{pmatrix} P^{-1}$

Et on a donc $A^2 = P \begin{pmatrix} e^{2i\pi/3} & 0 \\ 0 & e^{-2i\pi/3} \end{pmatrix} P^{-1} \neq I$ et $A^3 = I$

Conclusion : Si $\text{Tr}(A) = 1$ et $\det(A) = 1$ alors $h(A) = 3$

- De même si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\det(A) = 1$ les valeurs propres sont j et \bar{j}

Conclusion : Si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\det(A) = 1$ alors $h(A) = 3$

– Si $\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 1$, les valeurs propres sont i et $-i$

donc A^2 est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (donc $\neq I$)

donc A^3 est semblable à $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ (donc $\neq I$)

et enfin $A^4 = I$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \text{Tr}(A) = 0 \text{ et } \det(A) = 1 \text{ alors } h(A) = 4}$

– Si $\text{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = -1$, les valeurs propres sont 1 et -1

donc $A^2 = I$

Conclusion : $\boxed{\text{Si } \text{Tr}(A) = 0 \text{ et } \det(A) = -1 \text{ alors } h(A) = 2}$

Si $\text{Tr}(A) = \pm 2$, il y a une seule valeur propre qui est 1 ou -1 .

Pour savoir si A est diagonalisable, il faut déterminer le sous espace propre associé.

– $\text{Tr}(A) = 2$ et $\det(A) = 1$ alors 1 est la seule valeur propre.

Si le sous espace propre associé à 1 est de dimension 2 alors A est diagonalisable, il existe P inversible telle que $A = PIP^{-1} = I$ et $h(A) = 1$

Si le sous espace propre est de dimension 1 , alors A est trigonalisable sous la forme :

$A = P \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ avec P inversible.

Si c est non nul, on a par récurrence, pour tout $n \geq 1$: $A^n = P \begin{pmatrix} 1 & nc \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$ qui n'est pas la matrice unité, en contradiction avec la caractérisation de \mathcal{C}_2 .

Conclusion : $\boxed{\text{si } \text{Tr}(A) = 2 \text{ et } \det(A) = 1 \text{ alors } A = I \text{ et } h(A) = 1}$

10. Ce sera donc pour p_2 le plus petit multiple commun à $1, 2, 3$ et 4 : $p_2 = 12$ que l'on aura $A^{p_2} = I$.

En effet, par exemple avec 3 et A une matrice d'ordre 3 , par division euclidienne, on a $p_2 = 3q + r$ avec $r \in [0, 3]$ et $q \in \mathbb{N}$ donc $A^{p_2} = (A^3)^q A^r = I^q A^r = I$ et comme $r < 3$ et que 3 est le plus petit (ordre) alors $r = 0$.

Conclusion : $\boxed{p_2 = 12}$

3 Partie C

1. φ est une forme (à valeur dans \mathbb{R}) symétrique ($\varphi(P, Q) = \varphi(Q, P)$ pour tous polynômes P et Q)

bilinéaire : Pour $P, Q, R \in \mathbb{R}_3[X]$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha P + \beta R, Q) &= \int_{-1}^1 (\alpha P(t) + \beta R(t)) Q(t) dt \\ &= \alpha \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt + \beta \int_{-1}^1 R(t) Q(t) dt \\ &= \alpha \varphi(P, Q) + \beta \varphi(R, Q) \end{aligned}$$

et positive : Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Si $\varphi(P) = 0$ alors $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$ et comme P^2 est continue et positive sur $[-1, 1]$ alors P est nulle sur $[-1, 1]$. Un polynôme non nul n'ayant qu'un nombre fini de racines, on a donc $P = 0$.

2. C'est la méthode d'orthogonalisation de Schmidt qui l'affirme avec $\|P\| = \sqrt{\varphi(P, P)}$ la norme associée à φ .

Une fonction impaire ayant une intégrale nulle sur un intervalle symétrique par rapport à 0 , quelques calculs sont simplifiés.

Cette question est pour celles et ceux qui aiment les calculs !

– pour $i = 0$: $\pi_0 = \frac{1}{\|X^0\|} X^0$

$$\varphi(1, 1) = \int_{-1}^1 1 dt = 2 \text{ donc Conclusion : } \boxed{\pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} X^0}$$

– Pour $i > 0$: soit Y_i le projeté orthogonal de X^i sur $\text{Vect}(\pi_0, \dots, \pi_{i-1})$ dont les coordonnées sont calculé par produit scalaire avec chacun des vecteurs de cette base orthogonale du sous espace..

$$Z_i = X^i - Y_i \text{ et } \pi_i = \frac{Z_i}{\|Z_i\|}$$

– Pour $i = 1$: $\varphi(\pi_0, X^1) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} t dt = 0$

$$\text{Donc } Y_1 = 0, Z_1 = X \text{ et } \varphi(Z_1, Z_1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \text{ donc Conclusion : } \boxed{\pi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} X}$$

– Pour $i = 2$

$$\varphi(\pi_0, X^2) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{3}$$

$$\varphi(\pi_1, X^2) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} t^3 dt = 0$$

Donc $Y_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \pi_0$ et $Z_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ et

$$\begin{aligned} \varphi(Z_2, Z_2) &= \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3} t^2 + \frac{1}{9} \right) dt \\ &= \left[\frac{t^5}{5} - \frac{2t^3}{9} + \frac{1}{9} t \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} \\ &= \frac{8}{45} = \frac{4}{9} \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{\pi_2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(X^2 - \frac{1}{3} \right)}$$

– Pour $i = 3$

$$\varphi(\pi_0, X^3) = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} t^3 dt = 0$$

$$\varphi(\pi_1, X^3) = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{3}{2}} t^4 dt = \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{1}{5} t^5 \right] = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{2}{5} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\varphi(\pi_2, X^3) = \int_{-1}^1 \frac{3}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} \left(t^2 - \frac{1}{3} \right) t dt = 0$$

Donc $Y_3 = \frac{\sqrt{6}}{5} \pi_1$ et $Z_2 = X^3 - \frac{\sqrt{6}}{5} \sqrt{\frac{3}{2}} X = X^3 - \frac{3}{5} X$ et

$$\begin{aligned} \varphi(Z_2, Z_2) &= \int_{-1}^1 \left(t^3 - \frac{3}{5} t \right)^2 dt \\ &= \int_{-1}^1 \left(t^6 - \frac{6}{5} t^4 + \frac{9}{25} t^2 \right) dt \\ &= \left[\frac{t^7}{7} - \frac{6t^5}{25} + \frac{3}{25} t^3 \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2}{5} + \frac{6}{25} \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

:

coefs iofernaux!

$$\text{Conclusion : } \boxed{\pi_3 = \frac{5}{4} \left(X^3 - \frac{3}{5} X \right)} \dots$$

3. a) Comme $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$, donc pour tous polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, avec $(\alpha_0, \dots, \alpha_4)$ les coordonnées de P dans cette base, on a :

$$P = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i$$

- b) Comme la base $(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ est orthonormée alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 \alpha_i^2 &= \|P\|^2 \\ &= \int_{-1}^1 P^2(t) dt \\ &= 1 \end{aligned}$$

- c) i. On sait que pour un produit scalaire (inégalité de Shwartz)

$$|u \cdot v| \leq \|u\| \|v\| \text{ et ici avec le produit scalaire de } \mathbb{R}^4.$$

- ii. Et comme $P(x) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i \pi_i(x)$ alors

$$|P(x)| = \left| \sum \alpha_i \pi_i(x) \right| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=0}^3 [\pi_i(x)]^2} = \sqrt{\sum_{i=0}^3 [\pi_i(x)]^2}$$

- d) $\pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}X^0$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_0(x)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_0(x)^2) = \frac{1}{2}$
 $\pi_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}X$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_1(x)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_1(x)^2) = \frac{3}{4}$ (fonction impaire)
 $\pi_2 = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(X^2 - \frac{1}{3})$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_2(x)) = \pi_2(1) = \sqrt{\frac{5}{2}}$ et $\sup_{x \in [-1,1]} (\pi_2(x)^2) = \frac{5}{2}$
 FAUX ! $\pi_3 = \frac{\sqrt{15}}{4}(X^3 - \frac{3}{5}X)$ donc $\pi_3'(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}(3x^2 - \frac{3}{5})$

x	-1	$-\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	1
$x^2 - \frac{1}{5}$	+	0	-	0
$\pi_3(x)$		↗	↘	↗

$$\pi_3(1) = \frac{2}{5} \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

$$\pi_3\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \left(-\frac{1}{5} \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \frac{2}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

$$\text{donc } \sup_{x \in [-1,1]} (\pi_3(x)) = \frac{\sqrt{15}}{10} \text{ et } \sup_{x \in [-1,1]} (\pi_2(x)^2) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

Finalement

$$|P(x)| \leq \sqrt{\sum_{i=0}^3 [\pi_i(x)]^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} + \frac{3}{20}} = \sqrt{\frac{39}{10}}$$