

Corrigé ENS BCPST 2008 (UPA)

Première partie.

1°) On note S_n (resp. M_n) le nombre de cellules sauvages (resp. mutantes) à $t=n$.
 $S_0 = 1, M_0 = 0$. A $t=n+1$ on retrouve les S_n cellules sauvages, qui ont produit sS_n cellules, $\alpha s S_n$ mutantes et $(1-\alpha)sS_n$ sauvages, et les M_n cellules mutantes qui ont produit mM_n cellules, toutes mutantes. On a donc à $t=n+1$ $S_{n+1} = S_n + (1-\alpha)sS_n = (1+\beta s)S_n$ cellules sauvages et $M_{n+1} = M_n + mM_n + \alpha s S_n = (1+m)M_n + \alpha s S_n$ cellules mutantes. α est le taux de mutation.

$$2^\circ) S_n = (1 + \beta s)^n.$$

$$3^\circ) \text{a) } v_n = av_{n-1} + u_{n-1} = a(av_{n-2} + u_{n-2}) + u_{n-1} = a^2v_{n-2} + au_{n-2} + u_{n-1}$$

$$v_n = a^2v_{n-2} + au_{n-2} + u_{n-1} = a^2(av_{n-3} + u_{n-3}) + au_{n-2} + u_{n-1} = a^3v_{n-3} + a^2u_{n-3} + au_{n-2} + u_{n-1}$$

$$v_n = a^n v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} u_k$$

$$\text{b) } M_n = 0 + \sum_{k=0}^{n-1} (1+m)^{n-1-k} \alpha s (1+\beta s)^k = \alpha s (1+m)^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1+\beta s}{1+m} \right)^k$$

Si $m = \beta s$, $M_n = n \alpha s (1+m)^{n-1}$, sinon

$$M_n = \alpha s (1+m)^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1+\beta s}{1+m} \right)^n}{1 - \left(\frac{1+\beta s}{1+m} \right)} = \alpha s (1+m)^{n-1} \frac{(1+m)^n - (1+\beta s)^n}{(1+m)^n - (1+\beta s)^n} = \alpha s \frac{(1+m)^n - (1+\beta s)^n}{m - \beta s}$$

4°) a) Si $m = \beta s$, $S_n = (1+m)^n$, $M_n = n \alpha s (1+m)^{n-1}$, $S_n = o(M_n)$, $M_n + S_n \sim M_n$

Si $m > \beta s$, $(1+\beta s)^n = o((1+m)^n)$ donc

$$M_n \sim \frac{\alpha s}{m - \beta s} (1+m)^n, \quad S_n = o(M_n), \quad M_n + S_n \sim M_n$$

Si $m < \beta s$, $(1+m)^n = o((1+\beta s)^n)$ donc

$$M_n \sim \frac{\alpha s}{\beta s - m} (1+\beta s)^n, \quad M_n + S_n \sim \left(1 + \frac{\alpha s}{\beta s - m} \right) (1+\beta s)^n = \frac{s-m}{\beta s - m} (1+\beta s)^n$$

b) La proportion de cellules mutantes $\frac{M_n}{M_n + S_n}$ est donc équivalente à 1 si $m \geq \beta s$, et

$$\frac{\frac{\alpha s}{\beta s - m} (1 + \beta s)^n}{\frac{s - m}{\beta s - m} (1 + \beta s)^n} = \frac{\alpha s}{s - m} \text{ sinon.}$$

Deuxième partie.

1°) La série est absolument convergente, car $|p_n x^n| \leq p_n$ et $\sum p_n$ est convergente.

$$f(0) = p_0, f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1.$$

2°) a) i) On a $|r| < R(a)$ donc il existe $s \in E(a)$ tel que $|r| < s$, la suite $(a_n s^n)_{n \geq 0}$ est bornée, et comme $|a_n r^n| \leq |a_n s^n|$ la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est aussi bornée, i.e. $r \in E(a)$.

a) ii) Reconsidérons le réel s introduit ci-dessus, on peut écrire $|a_n r^n| = |a_n s^n| \left| \frac{r}{s} \right|^n \leq M \left| \frac{r}{s} \right|^n$, où

$$M = \sup \left(|a_n s^n| \right)_{n \geq 0}. \text{ Or } \left| \frac{r}{s} \right| < 1 \text{ donc } M \left| \frac{r}{s} \right|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ et } a_n r^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

a) iii) On a aussi convergence de la série $\sum M \left| \frac{r}{s} \right|^n$, d'où l'absolue convergence de $\sum a_n r^n$.

b) Si la série $\sum a_n r^n$ converge, la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ tend vers 0, donc la suite $(a_n |r|^n)_{n \geq 0}$ est bornée, donc $|r| \in E(a)$, donc $|r| \leq R(a)$. Par conséquent, si $|r| > R(a)$, la série $\sum a_n r^n$ est divergente.

Au a) on a vu que $] -R(a), R(a)[\subset E(a)$. D'autre part si $r \in E(a)$ la suite $(a_n r^n)_{n \geq 0}$ est bornée, donc la suite $(a_n |r|^n)_{n \geq 0}$ l'est également et $|r| \in E(a)$. On a donc $|r| \leq R(a)$ et $r \in [-R(a), R(a)]$, d'où $E(a) \subset [-R(a), R(a)]$.

3°)a) La suite $(c^n x^n)_{n \geq 0} = ((cx)^n)_{n \geq 0}$ est bornée si et seulement si $|cx| \leq 1$. Donc

$$E(a) = \left[-\frac{1}{c}, \frac{1}{c} \right] \text{ et } R(a) = \frac{1}{c}.$$

b) La suite $(n^\alpha x^n)_{n \geq 0}$ a pour limite 0 si $|x| < 1$ et est bornée dans ce cas, la suite $(n^\alpha x^n)_{n \geq 0}$ a pour limite $+\infty$ si $|x| > 1$, et donc la suite $(n^\alpha x^n)_{n \geq 0}$ n'est pas bornée dans ce cas. Le rayon de convergence vaut donc 1.

4°)a) Soit $r \in]-U, U[$. Les suites $(b_n r^n)_{n \geq 0}$ et $\left(\sum_{k=0}^n |a_k r^k| \right)_{n \geq 0}$ sont bornées. Soit

$$L = \sup (b_n r^n)_{n \geq 0} \text{ et } M = \sup \left(\sum_{k=0}^n |a_k r^k| \right)_{n \geq 0}. |c_n r^n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k r^k| b_{n-k} r^{n-k} \leq \sum_{k=0}^n |a_k r^k| L \leq LM. \text{ Par}$$

conséquent $r \in E(c)$, donc $R(c) \geq U$ et la série $\sum c_n r^n$ est absolument convergente si $r \in]-U, U[$.

b) La fonction génératrice de $X+Y$ est donnée par

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X+Y=n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k) \right) x^n.$$

En vertu du résultat admis on a, si $|x| < 1$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n P(X=k)P(Y=n-k) \right) x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y=n)x^n \right) = f(x)g(x).$$

5°)a) Par une récurrence immédiate, g^k .

b) Notons qu'il faut ici poser $X_1 + \dots + X_N = 0$ si $N = 0$.

Cette fonction génératrice s'écrit

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_N = n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n, N = k) \right) x^n$$

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n)P(N = k)x^n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n)P(N = k)x^n \right)$$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n)x^n \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(N = k)g(x)^k = f(g(x)).$$

L'interversion des sommations est légitime (mais impossible à justifier pour les candidats vu leur programme.....) : en effet $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |P(X_1 + \dots + X_k = n)P(N = k)x^n| \right) x^n$ est fini, car là on peut intervertir les \sum , et l'on obtient $f(g(|x|))$.

Troisième partie.

Préliminaires. Les suppositions de l'énoncé sont fondées. En effet la fonction $z \rightarrow \alpha \ln(1-z) \frac{1-z}{z}$ est développable en série entière (et donc holomorphe) sur le disque unité du plan complexe, de développement

$$\alpha \ln(1-z) \frac{1-z}{z} = \alpha(z-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{n} = \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} - \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n+1} = -\alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}.$$

Donc la fonction $z \rightarrow \exp\left(\alpha \ln(1-z) \frac{1-z}{z}\right)$ est holomorphe sur le disque unité du plan complexe, et donc développable sur ce même disque en série entière, de développement

$$\exp(-\alpha) \exp\left(\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}\right) = \exp(-\alpha) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}\right)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n, \quad \text{dont l'expression}$$

montre que tous les coefficients sont positifs.

On sait alors que $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{+\infty} p_n$, or $\exp\left(\alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\alpha \cdot \frac{0}{1}\right) = 1$, on

a donc $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$. La convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ est donc normale sur le segment $[-1,1]$,

et la fonction f est bien continue sur ce segment.

1°) $f(x) = \exp\left(\alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x}\right)$. Donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \exp\left(\alpha \cdot \frac{0}{1}\right) = 1$ et par conséquent

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1. \quad \text{Par ailleurs } \alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x} \underset{0}{\sim} \alpha \frac{-x}{x} \cdot 1 = -\alpha, \text{ donc } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp(-\alpha).$$

2°)a) $f'(x) = \exp\left(\alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x}\right) \alpha \left(\frac{-1}{1-x} \frac{1-x}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right) = \alpha f(x) \left(\frac{-1}{x} - \frac{\ln(1-x)}{x^2}\right)$. D'où

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \right) = \alpha \left(\frac{-1}{x} + \frac{1}{x} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n} \right) = \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right).$$

3°)a) On peut donc écrire $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n \right) \alpha \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+2} \right) = \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{p_k}{n-k+2} \right) x^n$ et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n p_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) p_{n+1} x^n, \text{ d'où par unicité du développement en série entière}$$

$$\alpha \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{n-k+2} = (n+1) p_{n+1} \text{ ou encore } \alpha \sum_{k=0}^{n-1} \frac{p_k}{n-k+1} = n p_n.$$

b) On a $p_0 = f(0) = \exp(-\alpha)$, et en se servant de la relation du a) on obtient successivement

$$p_1 = \frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha), p_2 = \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{\exp(-\alpha)}{2}, p_3 = \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^3}{16} \right) \frac{\exp(-\alpha)}{3}.$$

$$4°)a) (1-x) \ln(1-x) = (x-1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}.$$

$$b) S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Donc la série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$.

La fonction génératrice est donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n(n-1)} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = 1 + \frac{(1-x)}{x} \ln(1-x) \text{ si } x \neq 0 \text{ et } 0 \text{ si } x = 0.$$

L'espérance n'est pas définie puisque $\sum n a_n = \sum \frac{1}{n+1}$ est divergente (résultat hors programme.....)

5°)a) En appliquant le dernier résultat de la deuxième partie on obtient comme fonction

$$\text{génératrice } h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \exp(-\theta) \frac{\theta^n}{n!} g(x)^n = \exp(-\theta + \theta g(x)).$$

b) On veut donc $\exp(-\theta + \theta g(x)) = \exp\left(\alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x} \right)$, soit

$$-\theta + \theta g(x) = \alpha \ln(1-x) \frac{1-x}{x} = -\alpha + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \text{ ou } g(x) = 1 - \frac{\alpha}{\theta} + \frac{\alpha}{\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

Pour avoir une loi de probabilité il faut $1 - \frac{\alpha}{\theta} > 0, \frac{\alpha}{\theta} > 0$ et $1 - \frac{\alpha}{\theta} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{\theta} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. La

deuxième condition est réalisée car $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$, il ne faut donc que $0 < \alpha < \theta$.

Quatrième partie.

1°)a) Comme il y a une cellule sauvage au départ, lorsque l'on arrive à n cellules, on a au plus $n-1$ cellules mutantes, et donc $p_m(n, k, \alpha) = 0$ si $k \geq n$.

b) La première cellule mutante apparaît à $t=n$ si à $t=1$ la cellule sauvage s'est divisée en deux cellules sauvages, et si à $t=2$ celle des deux cellules (toutes les deux sauvages) qui s'est divisée a donné deux cellules sauvages etc....et si $t=n-1$ celle des $n-1$ cellules sauvages qui s'est divisée a donné deux cellules sauvages et si à $t=n$ celle des n cellules sauvages qui s'est divisée a donné une cellule sauvage et une cellule mutante. La probabilité qu'il en soit ainsi est de $(1-\alpha)^{n-1} \alpha$, on a donc une loi géométrique et l'espérance de $\frac{1}{\alpha}$. Notons qu'il est quasi

certain qu'il apparaisse un jour ou l'autre une cellule mutante car

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-\alpha)^{n-1} \alpha = \frac{\alpha}{1-(1-\alpha)} = 1.$$

2°)a) On a une suite croissante d'entiers, qui a donc une limite finie ou bien qui tend vers $+\infty$.

b) On part d'une situation où il y a $n_0 - k$ cellules sauvages et k cellules mutantes. On veut qu'à l'instant suivant la cellule qui se divise soit une cellule sauvage et qu'elle donne deux cellules sauvages (la probabilité qu'il en soit ainsi est de $\frac{n_0 - k}{n_0} (1-\alpha)$), puis qu'à l'étape suivante la cellule qui se divise soit de nouveau une cellule sauvage et qu'elle donne deux cellules sauvages (la probabilité qu'il en soit ainsi est maintenant de $\frac{n_0 - k + 1}{n_0 + 1} (1-\alpha)$, vu qu'il y avait après la première division $n_0 + 1$ cellules dont $n_0 - k + 1$ sauvages), etc....

On a donc au final une probabilité de $\prod_{j=0}^p \left(\frac{n_0 - k + j}{n_0 + j} (1 - \alpha) \right) = \prod_{i=n_0}^{i=n_0+p} \left(\frac{i - k}{i} (1 - \alpha) \right)$,

qui est aussi égal à $(1 - \alpha)^{p+1} \frac{(n_0 - k)(n_0 - k + 1) \dots (n_0 - 1)}{(n_0 + p - k + 1)(n_0 + p - k + 2) \dots (n_0 + p)}$ si $p > k$.

c) $\prod_{k=0}^n a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \Leftrightarrow \ln \left(\prod_{k=0}^n a_k \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Leftrightarrow \sum_{k=0}^n \ln(a_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty \Leftrightarrow \sum \ln(a_n)$ diverge

vu que cette série est à termes négatifs.

NB. On peut se passer de ce résultat pour traiter la question suivante, dans le cas contraire on est amené à utiliser des résultats hors programme (séries de Riemann, usage d'équivalents pour étudier la convergence de séries.....)

d)i) On a l'encadrement suivant

$$0 \leq P_\alpha(M_n = k, \forall n \geq n_0 + 1 / M_{n_0} = k) \leq P_\alpha(M_n = k, \forall n \in \{n_0 + 1, \dots, n_0 + p + 1\} / M_{n_0} = k)$$

Or $P_\alpha(M_n = k, \forall n \in \{n_0 + 1, \dots, n_0 + p + 1\} / M_{n_0} = k) \sim_{p \rightarrow +\infty} (1 - \alpha)^{p+1} \frac{C^{te}}{p^k}$ (cf. b)), donc en faisant

tendre p vers l'infini on obtient $P_\alpha(M_n = k, \forall n \geq n_0 + 1 / M_{n_0} = k) = 0$.

d)ii) Si $M_\infty = k$, vu que la suite $(M_n)_{n \geq 0}$ est croissante à valeurs entières, elle est stationnaire à partir d'un certain rang. On peut donc écrire

$$P_\alpha(M_\infty = k) = P_\alpha(\exists n_0 / M_n = k, \forall n \geq n_0) = P \left(\bigcup_{n_0 \geq 1} (M_n = k, \forall n \geq n_0) \right) \leq \sum_{n_0 \geq 1} P(M_n = k, \forall n \geq n_0)$$

, or chacun des termes de cette série est nulle d'après d)i), donc $P_\alpha(M_\infty = k) = 0$.

$$e) P_\alpha(M_\infty = 0 \text{ ou } M_\infty = +\infty) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P_\alpha(M_\infty = k) = 1.$$

Si $\alpha > 0$ on a vu au 1°)b) que $P_\alpha(M_\infty = 0) = 0$, donc $P_\alpha(M_\infty = +\infty) = 1$.

Si $\alpha = 0$ on a quasiment certainement $S_n = n$ et $M_n = 0$, donc $P_\alpha(M_\infty = 0) = 1$ et

$$P_\alpha(M_\infty = +\infty) = 0.$$

Cinquième partie.

1°) Pour avoir $k+1$ cellules sauvages entre les instants n et $n+1$, il faut :

-soit qu'avant $t=n$ il y ait eu déjà $k+1$ cellules sauvages (sur n en tout), et

que la cellule qui se divise à $t=n$ soit une cellule sauvage et qu'elle donne une cellule

sauvage et une cellule mutante

ou que la cellule qui se divise à $t=n$ soit une cellule mutante
-soit qu'avant $t=n$ il y ait eu seulement k cellules sauvages (sur n en tout), et que la cellule qui se divise à $t=n$ soit une cellule sauvage et qu'elle donne deux cellules sauvages.

Ce qui permet d'écrire

$$p_s(n+1, k+1, \alpha) = p_s(n, k+1, \alpha) \left(\frac{k+1}{n} \alpha + 1 - \frac{k+1}{n} \right) + p_s(n, k, \alpha) \frac{k}{n} (1-\alpha) \text{ ou encore}$$

$$p_s(n+1, k+1, \alpha) = p_s(n, k+1, \alpha) \left(1 - \frac{k+1}{n} \beta \right) + p_s(n, k, \alpha) \frac{k}{n} \beta \text{ ou}$$

$$p_s(n+1, k, \alpha) = p_s(n, k, \alpha) \left(1 - \frac{k}{n} \beta \right) + p_s(n, k-1, \alpha) \frac{k-1}{n} \beta.$$

2°) Ici par convention une somme du type $\sum_{i=1}^0$ vaut 0 et un produit du type $\prod_{i=1}^0$ vaut 1. De plus $n \neq 0$.

On va faire une démonstration par récurrence sur n .

Si $n=1$. $p_s(1, 1, \alpha) = 1$, $p_s(1, k, \alpha) = 0$ sinon.

$$\frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} = 0 \text{ si } k=0, = 1 \text{ si } k=1 \text{ et}$$

$= (1 + (-1))^{k-1} = 0$ sinon. Le cas $n=1$ est donc réglé.

Supposons la formule montrée au rang n .

$$p_s(n+1, k, \alpha) = \left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta) \right) \left(1 - \frac{k}{n} \beta \right) +$$

$$\left(\frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{i-1} \binom{k-2}{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta) \right) \left(\frac{k-1}{n} \beta \right) =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{i=1}^k \left((-1)^{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta) \left((n-\beta k) \binom{k-1}{i-1} + \beta(k-1) \binom{k-2}{i-1} \right) \right), \text{ en effet } \binom{k-2}{k-1} = 0$$

Or

$$(n-\beta k) \binom{k-1}{i-1} + \beta(k-1) \binom{k-2}{i-1} = \frac{(n-\beta k)(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} + \beta \frac{(k-1)(k-2)!}{(i-1)!(k-i-1)!} =$$

$$\frac{(n-\beta k + \beta(k-i))(k-1)!}{(i-1)!(k-i)!} = \frac{(k-1)!(n-\beta i)}{(i-1)!(k-i)!} = \binom{k-1}{i-1} (n-i\beta)$$

Donc

$$p_s(n+1, k, \alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^k \left((-1)^{i-1} \prod_{j=1}^{n-1} (j - i\beta) \binom{k-1}{i-1} (n - i\beta) \right) = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^k \left((-1)^{i-1} \prod_{j=1}^n (j - i\beta) \binom{k-1}{i-1} \right),$$

soit le résultat escompté, ouf !

NB. Formule tombée du ciel. On peut ‘découvrir’ le résultat en introduisant les fonctions

$$\delta_k(x) = \sum_1^{+\infty} p_s(n, k, \alpha) \frac{x^n}{n}.$$

Les relations de la question 1°) permettent de montrer que ces

fonctions sont solutions d’un système d’équations différentielles assez simple à résoudre, on obtient $\delta_k(x) = \frac{(1 - (1-x)^\beta)^k}{k\beta}$. Puis en dérivant et en développant en série entière on aboutit

aux formules de l’énoncé....

3°) La formule proposée est à montrer en fait pour $0 \leq k \leq n-1$.

On a par un raisonnement analogue à celui de la question 1°)

$$p_m(n+1, k, \alpha) = p_m(n, k, \alpha) \left(1 - \frac{k}{n} \right) (1 - \alpha) + p_m(n, k-1, \alpha) \left(\frac{k-1}{n} + \alpha \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \right) \text{ ou}$$

$$p_m(n+1, k, \alpha) = p_m(n, k, \alpha) \left(1 - \frac{k}{n} \right) (1 - \alpha) + p_m(n, k-1, \alpha) \left((1 - \alpha) \frac{k-1}{n} + \alpha \right).$$

$$\text{Dans notre cas } p_m(n+1, k, 1/2) = p_m(n, k, 1/2) \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2n} \right) + p_m(n, k-1, 1/2) \left(\frac{k-1}{2n} + \frac{1}{2} \right).$$

Raisonnons là aussi par récurrence sur n.

$$\text{Si } n=1. p_m(1, 0, 1/2) = 1. \binom{n+k-1}{k} \frac{1}{2^{n+k-1}} = \binom{0}{0} \frac{1}{2^0} = 1. \text{ Le cas } n=1 \text{ est donc réglé.}$$

Supposons la formule montrée au rang n.

$$p_m(n+1, k, 1/2) = p_m(n, k, 1/2) \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2n} \right) + p_m(n, k-1, 1/2) \left(\frac{k-1}{2n} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\binom{n+k-1}{k} \frac{1}{2^{n+k-1}} \left(\frac{1}{2} - \frac{k}{2n} \right) + \binom{n+k-2}{k-1} \frac{1}{2^{n+k-2}} \left(\frac{k-1}{2n} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$\frac{1}{2^{n+k}} \left(\binom{n+k-1}{k} \frac{n-k}{n} + \binom{n+k-2}{k-1} \frac{2(n+k-1)}{n} \right) =$$

$$\frac{1}{2^{n+k}} \left(\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \frac{n-k}{n} + \frac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!} \frac{2(n+k-1)}{n} \right) =$$

$$\frac{1}{2^{n+k}} \frac{(n+k-1)!(n-k+2k)}{k!n!} = \frac{1}{2^{n+k}} \frac{(n+k)!}{k!n!} = \frac{1}{2^{n+k}} \binom{n+k}{k}, \text{ soit le résultat escompté, ouf !}$$

Remarquons que dans le cas de $p_m(n+1, n, 1/2)$, on a utilisé une formule fautive pour $p_m(n, n, 1/2)$, mais cette probabilité étant multipliée par 0, tout rentre dans l'ordre.

4°)a) On a $|p_s(n, k, \alpha)x^{n-1}| \leq |x|^{n-1}$ et $\sum |x|^{n-1}$ converge si $|x| < 1$, donc l'on a affaire à une série absolument convergente.

b) Notons que l'égalité ne peut être valable que si $x \in]-1, 1[$, vu que le second membre a une limite infinie en 1. On a

$$\begin{aligned} \gamma_k(x, \alpha) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta)}{(n-1)!} \right) x^{n-1} = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} (j-i\beta)}{(n-1)!} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{\prod_{j=1}^n (j-i\beta)}{n!} \right) = \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \frac{\prod_{j=0}^{n-1} ((-i\beta+1)+j)}{n!} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \binom{k-1}{i-1} (1-x)^{i\beta-1} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k-1}{i} (1-x)^{i\beta+\beta-1} = (1-x)^{\beta-1} (1-(1-x)^\beta)^{k-1}. \end{aligned}$$

Notons qu'ici, contrairement à la question 5)b) de la partie 2, la justification de l'interversion des sommations est au programme des BCPST...

5°) L'égalité est vraie pour $x \in]-1, 1[$

$p_m(n, k, \alpha) = p_s(n, n-k, \alpha)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} p_m(n+k, n, \alpha)x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} p_s(n+k, k, \alpha)x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} p_s(n, k, \alpha)x^{n-k} = x^{1-k} \sum_{n=k}^{+\infty} p_s(n, k, \alpha)x^{n-1} = \\ &= x^{1-k} \sum_{n=1}^{+\infty} p_s(n, k, \alpha)x^{n-1} = x^{1-k} \gamma_k(x, \alpha). \end{aligned}$$

On a utilisé ici que $p_s(n, k, \alpha) = 0$ si $n < k$.

$$6^\circ) \text{a) } \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 - \exp((1-\varepsilon) \ln(1-x))}{x} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \ln \left(\frac{1 - (1-x) \exp(-\varepsilon \ln(1-x))}{x} \right) =$$

$$\frac{1}{\varepsilon} \ln \left(1 + \frac{1-x - (1-x) \exp(-\varepsilon \ln(1-x))}{x} \right) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{1-x - (1-x) \exp(-\varepsilon \ln(1-x))}{\varepsilon x} = (1-x) \frac{1 - \exp(-\varepsilon \ln(1-x))}{\varepsilon x}$$

$$\sim \frac{(1-x) \varepsilon \ln(1-x)}{\varepsilon x} = \frac{(1-x) \ln(1-x)}{x}.$$

$$\text{b) } x^{1-k} \gamma_k(x, \alpha/k) = x^{1-k} (1-x)^{-\alpha/k} (1 - (1-x)^{1-\alpha/k})^{k-1}$$

$$\ln(x^{1-k} \gamma_k(x, \alpha/k)) = -\frac{\alpha}{k} \ln(1-x) + \alpha \frac{k-1}{k} \frac{1}{\frac{\alpha}{k}} \ln \left(\frac{1 - \exp \left(\left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \ln(1-x) \right)}{x} \right) \text{ qui a donc pour}$$

$$\text{limite quand } k \text{ tend vers l'infini } 0 \cdot \ln(1-x) + \alpha \cdot 1 \cdot \frac{1-x}{x} \ln(1-x) = \alpha \frac{1-x}{x} \ln(1-x).$$

$$\text{Donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} (x^{1-k} \gamma_k(x, \alpha/k)) = \exp \left(\alpha \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \right) = (1-x)^{\alpha \frac{1-x}{x}}.$$

7°) Le coefficient de x^n dans $x^{1-k} \gamma_k(x, \alpha)$ est $P_\alpha(M_{n+k} = n)$. Donc le coefficient de x^k dans $x^{1-m} \gamma_m(x, \alpha)$ est $P_\alpha(M_{k+m} = k)$ et $P_\alpha(M_n = k)$ est le coefficient de x^k dans $x^{1-(n-k)} \gamma_{n-k}(x, \alpha)$. Finalement $P_{\alpha/n}(M_n = k)$ est le coefficient de x^k dans $x^{1-(n-k)} \gamma_{n-k}(x, \alpha/n)$.

On peut penser (et ceci se vérifie bien) que l'on a encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^{1-(n-k)} \gamma_{n-k}(x, \alpha/n) = (1-x)^{\alpha \frac{1-x}{x}}$.

Et avec audace on peut proposer comme limite de $P_{\alpha/n}(M_n = k)$ le coefficient de x^k dans le développement de $(1-x)^{\alpha \frac{1-x}{x}}$ on retrouverait la distribution de Luria-Delbrück.

Cette audace est tout à fait justifiée, grâce au résultat général suivant.

Soit $0 \leq p_{i,n} \leq 1$, $0 \leq p_i \leq 1$, $f_n(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_{i,n} x^i$, $f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} p_i x^i$ si $|x| < 1$. Si l'on a

$\forall x \in]0,1[$ $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$ alors $\forall i$ $p_{i,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_i$.

En effet on peut écrire si $0 < a < 1$,

$$|p_{0,n} - p_0| \leq |f_n(a) - f_n(0)| + |f_n(a) - f(a)| + |f(a) - f(0)| \leq 2 \sum_{i=1}^{+\infty} a^i + |f_n(a) - f(a)| \text{ soit}$$

$$|p_{0,n} - p_0| \leq \frac{2a}{1-a} + |f_n(a) - f(a)|.$$

Soit alors $\varepsilon > 0$ et $0 < a < 1$ tel que $\frac{2a}{1-a} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ (vu que $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{2a}{1-a} = 0$, on peut trouver un tel réel a). Il existe un rang N tel que $n \geq N \Rightarrow |f_n(a) - f(a)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors $n \geq N \Rightarrow |p_{0,n} - p_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, donc $p_{0,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_0$.

De plus $\forall x \in]0,1[\quad \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(0)}{x}$, soit

$\forall x \in]0,1[\quad \sum_{i=0}^{+\infty} p_{i+1,n} x^i \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} p_{i+1} x^i$. On peut en conclure comme ci-dessus que

$p_{1,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p_1$. Et ainsi de suite.

francis.denise@ac-orleans-tours.fr

Lycée Descartes à Tours