CAPES interne de Mathématiques
session 2000
première composition

Enoncé

http://perso.wanadoo.fr/megamaths

[0] [capesint00comp1e]

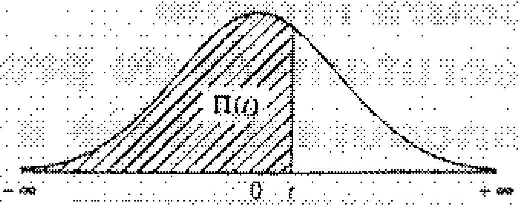
Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Extraits de la table de la fonction intégrale de la loi normale centrée, réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Pi(t) = \mathrm{P}(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour t positif. Lorsque t est négatif il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table.

Exemple : pour $t = 1,37$ $\quad \Pi(t = 1,37) = 0,914\,7$

pour $t = -1,37$ $\quad \Pi(t = -1,37) = 0,085\,3$

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements et des représentations graphiques interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Si le candidat détecte dans l'énoncé ce qu'il pense être une erreur, il continue son travail en indiquant les initiatives qu'il est amené à prendre de ce fait.

Les trois exercices proposés sont indépendants. Ils peuvent être traités dans un ordre quelconque.

EXERCICE I

LONGUEUR DE L'ALGORITHME D'EUCLIDE

Le calcul du p.g.c.d. ($a \wedge b$) de deux nombres a et b ($a > b > 0$) par l'algorithme d'Euclide se fait par divisions successives.

Exemple : $a = 44 \qquad b = 18$

$44 = 2 \times 18 + 8$

$18 = 2 \times 8 + 2$

$8 = 4 \times 2 + 0$

$44 \wedge 18 = 2$

Si on désigne par $l(a, b)$ la longueur de l'algorithme, c'est-à-dire le nombre de divisions nécessaires pour aboutir au résultat, nous avons ici :

$$l(44, 18) = 3.$$

L'objet de l'exercice est de majorer $l(a, b)$. Pour cela on note :

$$r(1), r(2), r(3), \ldots, r(n)$$

les restes des n divisions successives (on a donc $l(a, b) = n$ et $r(n) = 0$). On note par convention $a = r(-1)$ et $b = r(0)$.

1. Montrer que pour $1 \leq k \leq n - 1$, on a $r(k-2) \geq r(k-1) + r(k)$.

2. Soit $(\mathrm{F}(n))$ la suite de Fibonacci définie par :

$$\mathrm{F}(0) = \mathrm{F}(1) = 1$$

$$\mathrm{F}(n) = \mathrm{F}(n-2) + \mathrm{F}(n-1) \quad \text{pour } n \geq 2.$$

Montrer qu'en posant $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, on a $\alpha^{n-1} \leq \mathrm{F}(n)$.

3. Montrer que

$$r(n - k - 1) \geq \mathrm{F}(k)$$

et en déduire que n vérifie une majoration de la forme :

$$n \leq \mathrm{A} \ln(a) + \mathrm{B}.$$

Vérifier cette majoration sur un exemple (on pourra prendre $\mathrm{B} = 1$ et $\mathrm{A} < 2{,}1$).

Tournez la page S.V.P.

EXERCICE 2

DE L'OBSERVATION STATISTIQUE À L'ESTIMATION

(L'usage d'une calculatrice scientifique n'est pas obligatoire mais peut être très utile)

I. Description d'une série statistique.

On veut contrôler la qualité des livraisons d'une coopérative agricole de production de pommes de terre. En principe, elle produit des sacs de 5 kg, avec une tolérance de 0,2 kg en moins.

On pèse 50 sacs pris au hasard. Cela donne la série statistique suivante de $n = 50$ valeurs du caractère X qui à tout sac produit associe son poids.

5,6 – 4,9 – 5,5 – 5,0 – 4,4 – 5,3 – 5,0 – 5,1 – 5,8 – 5,3 - 5,3 – 5,3 – 5,0 – 5,5 – 5,0 – 5,1 – 4,3 – 4,5 – 5,2 – 4,4 – 5,3 – 4,9 - 5,4 – 4,5 – 4,6 – 4,4 – 5,6 – 5,6 – 5,7 – 4,4 – 5,1 – 5,1 – 4,9 – 5,4 – 5,2 – 5,1 – 4,8 – 5,0 – 3,8 – 5,4 – 4,3 – 5,2 – 5,3 – 5,1 – 5,4 – 4,0 – 4,9 – 5,5 – 4,5 – 5,5.

1. Quelle est l'étendue de cette série ? Déterminer sa médiane η, ses quartiles Q_1 et Q_3 et l'écart inter-quartile $Q_3 - Q_1$.
2. Classer cette série en classes d'égale étendue de 0,2 kg. On donnera le tableau des effectifs, des fréquences et des fréquences cumulées. Indiquer quelles sont les classes modale et médiane. Donner une représentation graphique de cette série (effectifs et fréquences cumulées).
3. Après avoir rappelé leurs définitions, calculer au dixième de kilogramme près, la moyenne $\bar{x}$ de la série donnée, ainsi que son écart-type σ_X. Quelle valeur obtient-on pour la moyenne pondérée de la série classée ?
4. De manière générale, on considère une série de n observations x_i d'un caractère X, $\bar{x}$ et σ_X désignant respectivement la moyenne et l'écart-type de cette série statistique.
   a. Un réel $t \geqslant 1$ étant donné, montrer que la somme $\sum_i (x_i - \bar{x})^2$, prise sur l'ensemble des indices i tels que $|x_i - \bar{x}| \geqslant t \cdot \sigma_X$, est majorée par $n \cdot \sigma_X^2$.
   b. En déduire que la fréquence des valeurs x_i situées dans l'intervalle $]\bar{x} - t \cdot \sigma_X, \bar{x} + t \cdot \sigma_X[$ ne peut être inférieure à $1 - \dfrac{1}{t^2}$.
   c. Donner un minorant de la fréquence des valeurs x_i situées dans l'intervalle $]\bar{x} - 2\,\sigma_X, \bar{x} + 2\,\sigma_X[$ (respectivement l'intervalle $]\bar{x} - 3\,\sigma_X, \bar{x} + 3\,\sigma_X[$).
5. Pour toute série statistique issue de l'observation d'un caractère quantitatif, déterminer un intervalle centré sur $\bar{x}$ qui contient au moins la moitié de ses éléments.
   Qu'en est-il pour l'exemple donné des sacs de pommes de terre ? Comparer avec l'intervalle inter-quartile obtenu dans la première question.

II. Estimation de la valeur moyenne des poids des sacs produits par la coopérative.

On désigne par X_0 la variable aléatoire qui prend pour valeur le poids d'un sac de pommes de terre pris au hasard dans la production de la coopérative. Pour tout prélèvement de n sacs, la série statistique de leurs poids constitue l'observation d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de X_0. Les X_i sont donc des variables aléatoires de même loi que X_0 et indépendantes.

On admettra que l'on peut représenter la loi de X_0 par une loi normale $N(m, \sigma^2)$, où la moyenne m et l'écart-type σ sont inconnus. On désigne par $\overline{X}_n$ la moyenne arithmétique des variables X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

1. Calculer l'espérance mathématique de $\overline{X}_n$.
2. Calculer la variance de $\overline{X}_n$.
   Montrer que celle-ci tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Expliquer pourquoi la moyenne $\bar{x}_n$ des observations x_i peut être donnée pour estimer la valeur de m, cette estimation étant d'autant meilleure

que n est grand.

3. À partir de l'observation d'un échantillon de taille n de X_0, on souhaite donner pour m un encadrement de confiance de niveau 0,95, c'est-à-dire un intervalle aléatoire de la forme $]\overline{X}_n - \varepsilon, \overline{X}_n + \varepsilon[$, tel que :

$$P(\overline{X}_n - \varepsilon < m < \overline{X}_n + \varepsilon) = 0{,}95.$$

Déterminer ε en fonction de n et σ. On pourra admettre que $\overline{X}_n$ suit une loi normale dont on donnera les paramètres.

4. Quelle estimation ponctuelle $\hat{\sigma}$ proposez-vous pour la valeur de σ ? Effectuer cette estimation pour la série des 50 valeurs données en I.

5. Quel encadrement de confiance proposez-vous pour m à partir de l'échantillon observé ? Pensez-vous que la coopérative a satisfait à ses engagements ?

[On pourra admettre que la taille $n = 50$ de l'échantillon considéré permet l'approximation normale $N\left(m, \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\right)$ pour la loi de la variable $\overline{X}_{50}$] .

EXERCICE 3

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

On se propose d'étudier les fonctions f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ qui satisfont à la relation :

$$[1] \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } \mathbf{R},\ f(x)f(y) \neq -1 \quad \text{et} \quad f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}.$$

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant à [1].

Préambule : approximation d'un réel par méthode de dichotomie.

1. Justifier que $\sqrt{6}$ est un réel irrationnel compris entre 2 et 3.

2.*a*. En utilisant une méthode de dichotomie, partant de l'intervalle [2, 3], montrer qu'il existe une suite de rationnels (ou de décimaux) dont la limite est $\sqrt{6}$.

2.*b*. En généralisant la méthode employée, montrer que, si Δ est l'ensemble de nombres défini par :

$$\Delta = \left\{ \frac{p}{2^n} \,\middle|\, (p, n) \in \mathbf{N}^2 \right\}$$

alors pour tout x réel positif ou nul, il existe une suite d'éléments de Δ qui converge vers x.

3. Expliciter un algorithme permettant de déterminer une valeur décimale approchée de $\sqrt{6}$ avec trois décimales exactes (on exprimera cet algorithme en langage courant). Donner la valeur obtenue en utilisant cet algorithme sur une calculatrice programmable.

I. Préliminaire : fonctions additives de R dans R.

On note H l'ensemble des fonctions φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ satisfaisant à la relation :

$$[2] \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tous } x \text{ et } y \text{ de } \mathbf{R}.$$

1. Soit φ un élément de H.

   a. Montrer que $\varphi(0) = 0$ et que φ est impaire.

   b. Établir que pour tout n entier naturel non nul et toute partie finie $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathbf{R}$, on a :

   $$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i).$$

   c. Montrer que pour tous p de $\mathbf{N}$ et q de $\mathbf{N}^*$:

   $$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1)$$

   puis que pour tout r de $\mathbf{Q}$, $\varphi(r) = r\,\varphi(1)$.

2. Montrer que si un élément φ de H est continue en un point a quelconque de $\mathbf{R}$, alors elle est continue sur $\mathbf{R}$ tout entier et qu'on a alors :

$$\varphi(x) = x\,\varphi(1) \ \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}.$$

3. Montrer que, de même, si φ est un élément de H et si de plus φ est monotone (soit croissante, soit décroissante) sur **R**, alors, on a également :

$$\varphi(x) = x\,\varphi(1) \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}.$$

4. On admet qu'il existe une fonction ψ dans H telle que $\psi(1) = 1$ et $\psi(\pi) = 0$.

   Vérifier <u>directement</u> que ψ n'est pas monotone, et n'est continue en aucun point de **R** et faire le lien avec les questions 2 et 3.

II. Exemples de fonctions appartenant à E.

1. Montrer qu'il existe des fonctions constantes appartenant à E, et les préciser.

2. On note th la fonction « tangente hyperbolique » définie par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

   a. Faire une brève étude de cette fonction et en donner une représentation graphique.

   b. Démontrer que pour tout nombre réel k appartenant à l'intervalle $]-1, 1[$, il existe un unique nombre réel α tel que $\operatorname{th} \alpha = k$. Montrer que α est donné par la formule :

$$\alpha = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+k}{1-k}\right).$$

3. Démontrer que la fonction th est un élément de E, puis que pour tout élément φ de H, $\operatorname{th} \circ \varphi$ est encore un élément de E.

III. Une étude réciproque dans le cas des fonctions continues ou monotones.

Soit f un élément de E.

1.*a.* Montrer que pour tout x de **R**, on a $|f(x)| \leq 1$.

1.*b.* Montrer que, si $f(0) \neq 0$, la fonction f est nécessairement une fonction constante (on précisera les valeurs possibles).

2. On suppose désormais que $f(0) = 0$.

   a. Montrer qu'alors f est une fonction impaire et que l'on a $|f(x)| < 1$ pour tout x de **R**.

   b. On considère la fonction g de **R** dans **R** définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+f(x)}{1-f(x)}\right).$$

   Dire pourquoi g est bien définie sur **R** et démontrer que g est un élément de H.

3. On suppose dans cette question que f est un élément de E tel que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0. On définit la fonction g comme en 2.*b.*

   a. Montrer que g est continue en 0.

   b. On pose $k = g(1)$. Démontrer que pour tout nombre réel x,

$$f(x) = \operatorname{th}(kx).$$

4. Justifier l'équivalence des assertions suivantes lorsque f est dans E :

   (*i*) f est continue en 0 ;

   (*ii*) f est dérivable sur **R** ;

(*iii*) f est de classe C^∞, c'est-à-dire indéfiniment dérivable sur **R**.

IV. Une nouvelle caractérisation grâce à une famille d'équations différentielles.

On considère maintenant la famille des équations différentielles :

$$[D_m] \quad y' = m(1 - y^2)$$

où m est un paramètre réel et y une fonction de **R** dans **R**, dérivable sur **R**.

On dira alors dans ce cas que y est une solution de $[D_m]$ dans **R**.

1.*a*. Montrer que s'il existe m dans **R** tel que y soit solution de $[D_m]$ sur **R**, alors y est de classe C^∞ (indéfiniment dérivable sur **R**).

1.*b*. Montrer qu'il existe deux fonctions constantes solutions sur **R** de $[D_m]$ pour tout m de **R**.

2. Montrer que toute fonction appartenant à E, dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$ est dérivable sur **R** et vérifie l'équation différentielle $[D_m]$ avec $m = f'(0)$.

3.*a*. Soit y une solution sur **R** d'une équation $[D_m]$ telle qu'il existe un intervalle I d'intérieur non vide pour lequel $|y(x)| \neq 1$ pour tout x dans I. Montrer qu'il existe alors un réel μ tel que :

$$y(x) = \frac{\mu e^{2kx} - 1}{\mu e^{2kx} + 1}$$

pour tout x de I.

3.*b*. En déduire que si y est solution sur **R** d'une équation différentielle $[D_m]$, il ne peut pas exister d'intervalle $]a, b[$ (avec $a < b$) vérifiant les deux conditions suivantes :

(*i*) $|y(a)| = 1$ ou $|y(b)| = 1$;

(*ii*) $|y(x)| \neq 1$ pour tout x dans $]a, b[$.

3.*c*. Montrer alors que, si y est solution sur **R** d'une équation différentielle $[D_m]$ telle qu'il existe x_0 dans **R** vérifiant $y(x_0) = 1$ [resp. $y(x_0) = -1$], alors y est la fonction constante sur **R** égale à 1 en tout point [resp. égale à -1 en tout point]. (On pourra raisonner par l'absurde).

4.*a*. Montrer que pour tout réel m, la fonction y définie par $y(x) = \text{th}\,(mx)$ pour tout x de **R** est la seule solution sur **R** de $[D_m]$ telle que $y(0) = 0$.

4.*b*. Conclure en caractérisant, grâce aux équations différentielles $[D_m]$, l'ensemble des fonctions de **R** dans **R**, vérifiant [1] et continues en 0.