

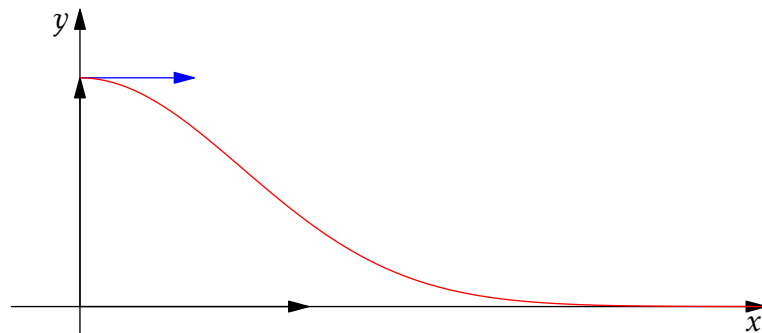
I Existence de F et I

1. a. On calcule facilement $f'(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$. f est décroissante sur $[0, +\infty[$.
 Tout aussi facilement $f(0) = 1$, et, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On a donc le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	1	$\searrow$ 0

- b. $f'(0) = 0$, donc la demi tangente en $(0, 1)$ est horizontale.
 L'axe des x , d'équation $y = 0$ est asymptote à la courbe.



2. F est la primitive de f qui s'annule en 0, comme f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.
 On a aussi : $F'(x) = f(x) = e^{-x^2}$.
3. C'est l'intégrale d'une fonction positive, on a une unique singularité de l'intégrale en $+\infty$.
 Pour $x \geq 1$, on a : $0 \leq f(t) \leq e^{-t}$.
 On sait que $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ converge.
 Par comparaison, $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.

II Calcul de I : première méthode

1. On pose $g(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$.

g est définie et continue sur $[0, +\infty[\times [0, 1]$, sa dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x} = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ existe et est continue sur $[0, +\infty[\times [0, 1]$.

Le théorème des intégrales simples à paramètres entraîne alors l'existence et la classe $\mathcal{C}^1$ de G sur $[0, +\infty[$.

$$\text{De plus : } G'(x) = \int_0^1 -2xe^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

2. a. On va calculer la dérivée de H .

$$H'(x) = 2F(x)F'(x) + G'(x) = 2f(x)F(x) + G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2 t^2} dt$$

Dans la dernière intégrale, on pose $u = xt$, donc, $x dt = du$, et on obtient :

$$H'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du = 0.$$

H est bien constante sur $[0, +\infty[$.

- b. Donc, pour $x \in [0, +\infty[$, $H(x) = H(0) = F^2(0) + G(0) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}$.

3. a. $\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times [0, 1], 0 \leq \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est immédiat.

On a aussi pour les mêmes valeurs : $\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} = e^{-x^2} \frac{e^{-x^2 t^2}}{1+t^2} \leq e^{-x^2}$.

En intégrant ces inégalités entre 0 et 1, on a pour tout x positif : $0 \leq G(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 dt = e^{-x^2}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$

- b. On a $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq 0$.

On a aussi $\lim_{x \rightarrow +\infty} F^2(x) = \frac{\pi}{4}$, car la limite de $G(x)$ est nulle.

On en déduit facilement : $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. $F'(x) \geq 0$, donc F est croissante sur $[0, +\infty[$.

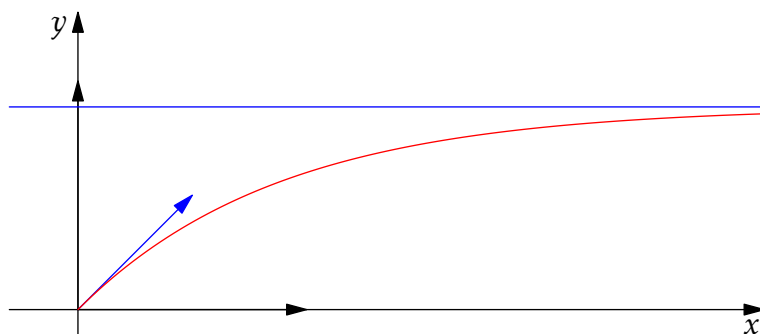
$F(0) = 0$ et $F'(0) = 1$, donc la droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe en $(0, 0)$.

La limite de $F(x)$ en $+\infty$ est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. La droite d'équation $y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ est donc asymptote à la courbe.

On a donc le tableau de variation :

x	0	$+\infty$
$F'(x)$	1	+
$F(x)$	0	$\nearrow \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Il ne reste qu'à tracer l'allure de la courbe.



III Calcul de I : deuxième méthode

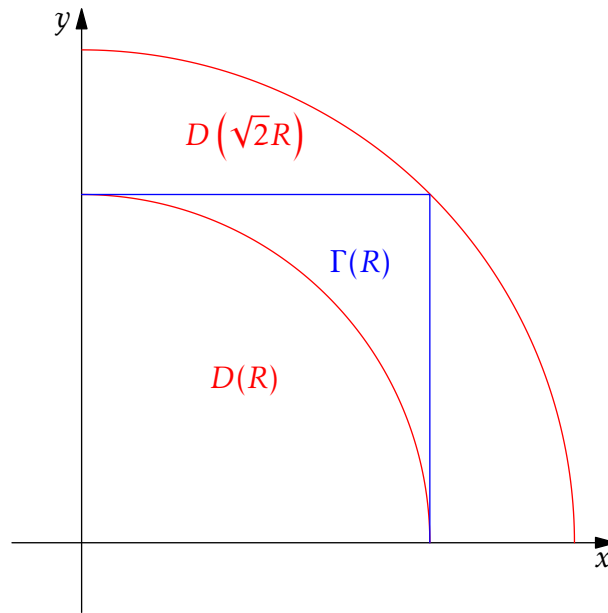
1. On a : $(x, y) \in D(R) \Leftrightarrow (\theta, r) \in [0, \pi/2] \times [0, r]$.

D'autre part, $dx dy = r dr d\theta$ et $x^2 + y^2 = r^2$.

Ce qui donne : $J(R) = \int_0^{\pi/2} \int_0^R r e^{-r^2} dr d\theta = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-e^{-r^2}}{2} \right]_0^R d\theta = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2})$

2. $K(R) = \int_0^R \int_0^R e^{-(x^2+y^2)} dy dx = \int_0^R \int_0^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx = \int_0^R e^{-y^2} dy \int_0^R e^{-x^2} dx$
 $= F^2(R)$

3. a. Il ne reste qu'à tracer les trois domaines imbriqués.



b. La fonction qu'on intègre est positive, l'imbrication des domaines et la positivité de l'intégrale nous donne : $J(R) \leq K(R) \leq J(\sqrt{2}R)$.

$$4. \lim_{R \rightarrow +\infty} J(R) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Donc : } \lim_{R \rightarrow +\infty} K(R) = \frac{\pi}{4}.$$

$$5. \text{ Ce qui donne : } \lim_{R \rightarrow +\infty} F^2(R) = \frac{\pi}{4}, \text{ qu'on associe à } F(R) \geq 0.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{R \rightarrow +\infty} F(R) = I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

IV Développement en séries entières

$$1. \quad \text{a. On a : } \forall u \in \mathbb{R}, e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

$$\text{b. On remplace } u \text{ par } -x^2, \text{ et on obtient : } \forall x \in \mathbb{R}, e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}.$$

2. a. On peut primitiver terme à terme une série entière sur son ouvert de convergence, ici $\mathbb{R}$. F est la primitive de f qui s'annule en 0, et on vient de développer f en série entière. La constante d'intégration est donc nulle.

$$\text{b. On obtient donc facilement : } \forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1) \times n!}.$$

$$3. \quad \text{a. On a : } \forall x \in]-R, R[, y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On peut dériver terme à terme une série entière sur son ouvert de convergence ? ce qui donne :

$$\forall x \in]-R, R[, y' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

On travaille toujours sur le même intervalle, ce qu'on ne précisera plus.

$$y' - 2xy = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1}.$$

On réindexe la première somme en posant $n' = n - 1$ et la seconde en posant $n' = n + 1$.

$$y' - 2xy = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n' + 1)a_{n'+1}x^{n'} - 2 \sum_{n'=1}^{+\infty} a_{n'-1}x^{n'} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1})x^n = 1.$$

Par unicité du développement en série entière, on a $a_1 = 1$, et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)a_{n+1} - 2a_{n-1} = 0$.
Ce qui est le résultat demandé, qui ne nécessite pas encore $a_0 = 0$.

Notons que c'est bien une condition nécessaire et suffisante pour que la somme de la série entière vérifie l'équation différentielle (E)!

- b. Comme $a_0 = 0$, la relation de récurrence avec $n = 1$ donne $a_2 = 0$.

Si on suppose $a_{2p} = 0$, la relation de récurrence avec $n = 2p + 1$ donne $a_{2(p+1)} = 0$.

On a bien montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = 0$.

Pour l'autre formule : $\frac{2^0 \times 1!}{(1)!} = 1 = a_1$. On a la formule donnant a_{2n+1} pour $n = 0$.

On admet maintenant que $a_{2p+1} = \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!}$.

La relation de récurrence appliquée avec $n = 2p + 2$ donne :

$$a_{2(p+1)+1} = \frac{2}{2p+3} \times \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} = \frac{2}{2p+3} \times \frac{2(p+1)}{2p+2} \times \frac{2^{2p}p!}{(2p+1)!} = \frac{2^{2(p+1)}(p+1)!}{(2(p+1)+1)!}.$$

La formule est donc démontrée par récurrence également.

- c. On doit donc chercher le rayon de convergence de $\sum a_{2n+1}x^{2n+1}$.

On utilise le théorème de d'Alembert en prenant $x \neq 0$.

$$\left| \frac{a_{2n+3}x^{2n+3}}{a_{2n+1}x^{2n+1}} \right| = \frac{2}{2n+3}x^2, \text{ dont la limite est nulle quand } n \rightarrow +\infty.$$

Le rayon de convergence de cette série entière est donc $+\infty$.

J'imagine que, quand l'énoncé parle de sa somme, c'est de $n = 0$ à $+\infty$.

Soit h définie par $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1}$,

h vérifie donc l'équation différentielle (E), avec $h(0) = 0$.

En effet, les a_{2n} , qui sont nuls, et les a_{2n+1} , vérifient la relation du 3.a., donc l'équation différentielle !

- d. Calculons d'abord : $g'(x) = 2xe^{x^2}F(x) + e^{x^2}F'(x) = 2xe^{x^2}F(x) + e^{x^2}e^{-x^2} = 2xg(x) + 1$.

On a donc bien : $g'(x) - 2xg(x) = 1$.

g vérifie donc bien l'équation différentielle (E) et on a aussi : $g(0) = F(0) = 0$.

- e. $\mathbb{R}$ est un intervalle convenable pour l'équation différentielle (E).

Sur un tel intervalle, la solution de (E), avec une condition initiale du type $g(x_0) = y_0$, est unique.

h et g sont solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ avec la même condition initiale $g(0) = 0$. Elles sont donc égales.

g est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}n!}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$