

ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI 2001
Filière PC - Première épreuve

Première Partie

Au début de cette partie une faute de frappe: Il faut lire $n \in \mathbb{N}$ au lieu de $n \in \mathbb{R}$.

1.a) $g_n : x \mapsto (x^2 - 1)^n$ est un polynôme de degré $2n$ de terme dominant x^{2n} donc avec $P_n = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} g_n$

P_n est un polynôme de degré n de terme dominant $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n$.

b) Pour tout n , g_n est un polynôme pair donc, pour k pair ($k \leq 2n$), $\frac{d^k}{dx^k} g_n$ est un polynôme pair, et pour k impair, $\frac{d^k}{dx^k} g_n$ est un polynôme impair. En particulier, P_n a la même parité que n .

c) En calculant P_n par la formule de Leibniz appliquée à $g_n(x) = (x - 1)^n (x + 1)^n$ on obtient $P_n(1) = 1$ et en tenant compte de la parité $P_n(-1) = (-1)^n$.

2. On prouve $\int_{-1}^1 P_n(x) x^m dx = 0$ par intégration par parties successives sachant que pour $k < n$, $\frac{d^k}{dx^k} g_n$ s'annule en 1 et -1 .

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dx^n} g_n(x) x^m dx &= \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x) x^m \right]_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x) x^{m-1} dx \\ &= -m \int_{-1}^1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} g_n(x) x^{m-1} dx \\ &= (-1)^m m! \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} g_n(x) dx \\ &= (-1)^m m! \left[\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}} g_n(x) \right]_{-1}^1 = 0. \end{aligned}$$

P_n est donc orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n - 1$.

3.a) Pour $m < n$, P_m est de degré m donc d'après 2., $(P_n | P_m) = 0$.

b) Toujours d'après 2., $(P_n | P_n) = (P_n | \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n)$ et l'intégration par parties de cette même question donne

$$\begin{aligned} (P_n | P_n) &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^3} (-1)^n n! \int_{-1}^1 g_n(x) dx \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx \end{aligned}$$

On calcule cette dernière intégrale par parties:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx &= \int_{-1}^1 (1 - x)^n (1 + x)^n dx \\ &= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^1 (1 - x)^{n-1} (1 + x)^{n+1} dx \\ &= \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+2} \cdots \frac{1}{2n} \int_{-1}^1 (1 + x)^{2n} dx \\ &= \frac{(n!)^2}{(2n)!} \frac{2^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

On obtient enfin:

$$(P_n|P_n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)! 2n+1} = \frac{2}{2n+1}.$$

(Remarque: par changement de variable $x = \cos t$ on ramène l'intégrale $\int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ à une intégrale de

Wallis: $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^{2n+1} dt$.)

4.a) Pour $m = 0$: $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((x^2-1)P'_n(x)) dx = [(x^2-1)P'_n(x)]_{-1}^1 = 0$

Pour $m \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}((x^2-1)P'_n(x)) x^m dx &= [(x^2-1)P'_n(x)x^m]_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 x^{m-1}(x^2-1)P'_n(x) dx \\ &= -m[x^{m-1}(x^2-1)P_n(x)]_{-1}^1 + m \int_{-1}^1 \frac{d}{dx}(x^{m-1}(x^2-1)) P_n(x) dx. \end{aligned}$$

Or $\frac{d}{dx}(x^{m-1}(x^2-1))$ est un polynôme de degré $m < n$ donc P_n lui est orthogonal et par suite

$$\boxed{\frac{d}{dx}((x^2-1)P'_n(x)) \text{ est orthogonal à } x^m \text{ pour } 0 \leq m \leq n-1.}$$

b) $\frac{d}{dx}((x^2-1)P'_n(x))$ est un polynôme de degré n , orthogonal à tout polynôme de degré au plus $n-1$, il est donc colinéaire à P_n . La comparaison des coefficients dominants donne:

$$\frac{d}{dx}((x^2-1)P'_n(x)) = \boxed{(x^2-1)P''_n(x) + 2xP'_n(x) = n(n+1)P_n(x)}$$

Deuxième Partie

La définition de $f_{n,m}$ présente une indétermination pour $|x| = 1$ et $m = 0$. Il faut convenir que sur $[-1, 1]$, $f_{n,0} = P_n$

5.a) $x \mapsto (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est une fonction paire, donc $f_{n,m}$ a la parité de $\frac{d^m}{dx^m} P_n$. Or P_n a la parité de n et la dérivation change la parité; on peut traduire la parité de $f_{n,m}$ par $\boxed{\forall x \in [-1, 1], f_{n,m}(-x) = (-1)^{n+m} f_{n,m}(x).}$

b) m étant positif ou nul, $x \mapsto (1-x^2)^{\frac{m}{2}}$ est continue sur $[-1, 1]$ et par produit avec une fonction polynôme $f_{n,m}$ est continue sur $[-1, 1]$.

Remarque: Si n et n' n'ont pas la même parité ($n+n'$ impair) le produit $f_{n,m}f_{n',m}$ est une fonction impaire et $(f_{n,m}|f_{n',m}) = 0$. Reste les cas n et n' ont la même parité mais en fait le calcul ci-dessous traite tous les cas.

On suppose $n' < n$.

$(f_{n,m}|f_{n',m}) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^m \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) \frac{d^m}{dx^m} P_{n'}(x) dx = \int_{-1}^1 Q(x) \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) dx$ où Q est un polynôme de degré $n' + m$ admettant 1 et -1 pour racines d'ordre m . Par IPP successives on obtient $(f_{n,m}|f_{n',m}) = \int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} Q(x) P_n(x) dx$. Or $\frac{d^m}{dx^m} Q(x)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n' avec $n' < n$ donc P_n est orthogonal à ce polynôme et $\boxed{(f_{n,m}|f_{n',m}) = 0.}$

Troisième Partie

6.a) Partons de " $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est un polynôme homogène de degré N " et écrivons $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ sous la forme $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum_J a_{i_1, i_2, i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$ la somme étant étendue à un ensemble J de triplets i_1, i_2, i_3 d'entiers naturels tels que

$i_1 + i_2 + i_3 = N$. Le polynôme q défini par, $q(x_1, x_2, x_3) = \sum_J \frac{a_{i_1, i_2, i_3}}{i_1 + 1} x_1^{i_1+1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$ vérifie $\frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}$ donc il existe une fonction φ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = q(x_1, x_2, x_3) + \varphi(x_2, x_3)$. Puisque $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ est un polynôme homogène de degré N , $\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}$ est un polynôme homogène de degré N en deux variables. En réitérant le raisonnement avec φ on écrit $\varphi(x_2, x_3) = \sum_H \frac{b_{j_2, j_3}}{j_2 + 1} x_2^{j_2+1} x_3^{j_3} + \psi(x_3)$ où ψ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que ψ' soit un polynôme homogène de degré N en une seule variable. On a donc $\psi'(x_3)$ de la forme cx_3^N puis $\psi(x_3) = \frac{c}{N+1} x_3^{N+1} + \mu$. La fonction f s'annule en 0 donc $\mu = 0$ et f est somme de fonctions polynômes homogènes de degré $N + 1$.

b) On raisonne par récurrence sur N .

- $N = 0$ f est supposée continue sur $\mathbb{R}^3$ et vérifiant $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = f(x_1, x_2, x_3)$. On a donc $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, f(0, 0, 0) = f(x_1, x_2, x_3)$ et f est un polynôme constant ou homogène de degré 0.

- On suppose la propriété démontrée pour un certain N .

Soit f de classe C^{N+1} vérifiant $\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, f(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^{N+1} f(x_1, x_2, x_3)$.

Pour $i = 1, 2, 3$, en dérivant cette égalité par rapport à x_i on obtient:

$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3)$. Les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe C^N donc l'hypothèse de récurrence assure que les $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des polynômes homogènes sur $\mathbb{R}^3$ de degré N et comme $f(0, 0, 0) = 0$, d'après la question précédente f est un polynôme homogène de degré $N + 1$.

7. La relation de l'énoncé ou relation d'Euler se vérifie immédiatement sur les monômes $x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$, ce qui suffit par linéarité des dérivations partielles.

8.

Justifions d'abord l'indépendance des monômes $x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}$ pour $(i_1, i_2, i_3) \in \mathbb{N}^3$ tels que $i_1 + i_2 + i_3 = N$. Si $f = \sum a_{i_1, i_2, i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} = 0$ alors $a_{i_1, i_2, i_3} i_1! i_2! i_3! = \frac{\partial^N f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \partial x_3^{i_3}} = 0$ et donc $a_{i_1, i_2, i_3} = 0$.

La dimension de $\mathcal{F}_N$ est égale au nombre de triplets d'entiers naturels (i_1, i_2, i_3) tels que $i_1 + i_2 + i_3 = N$ ou au nombre de couples d'entiers naturels (i_1, i_2) tels que $i_1 + i_2 \leq N$. Pour chaque i_1 fixé dans $\{0, \dots, N\}$, i_2 peut prendre $N + 1 - i_1$ valeurs. On obtient ainsi $(N + 1) + N + (N - 1) + \dots + 1$ couples (i_1, i_2) tels que

$i_1 + i_2 \leq N$. On a donc $\dim \mathcal{F}_N = \frac{(N + 1)(N + 2)}{2}$.

9.a) En calculant le laplacien d'un monôme, on vérifie que $\Delta \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}_{N-2}$. (Δ est linéaire)

$\mathcal{H}_N$ est le noyau de Δ considéré comme endomorphisme de $\mathcal{F}_N$. Puisque $\text{rg} \Delta \leq \dim \mathcal{F}_{N-2}$, le théorème du rang assure $\dim \text{Ker} \Delta \geq \dim \mathcal{F}_N - \dim \mathcal{F}_{N-2}$ soit $\dim \text{Ker} \Delta \geq 2N + 1$.

b) Calcul de $\Delta(r^{2k}g)$: Pour $i \in \{1, 2, 3\}$ on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(r^{2k}g) &= kr^{2k-2}2x_i g + r^{2k} \frac{\partial g}{\partial x_i} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(r^{2k}g) &= 2kr^{2k-2}g + 2k(2k-2)r^{2k-4}x_i^2 g + 4kr^{2k-2}x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + r^{2k} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

En sommant on obtient:

$$\Delta(r^{2k}g) = 6kr^{2k-2}g + 2k(2k-2)r^{2k-2}g + 4kr^{2k-2} \sum_i x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} + r^{2k} \Delta g$$

Comme $g \in \mathcal{F}_{N-2k}$, la question 7. donne $\sum_i x_i \frac{\partial g}{\partial x_i} = (N - 2k)g$ et par suite

$$\Delta(r^{2k}g) = r^{2k} \Delta g + 2k(2N - 2k + 1)r^{2k-2}g$$

10. Je ne suis pas exactement l'énoncé mais prouve par récurrence sur k que f s'écrit $r^{2k}u$ avec $u \in \mathcal{F}_{N-2k}$ ou $u = 0$.

- $k = 1$ correspond à l'hypothèse de l'énoncé.
 - f s'écrivant $r^2 g$ avec $g \in \mathcal{F}_{N-2}$, on a $\Delta f = r^2 \Delta g + (4N - 2)g$ avec $\Delta g \in \mathcal{F}_{N-4}$ si $N \geq 4$ et $\Delta g = 0$ sinon. On a supposé f harmonique donc $\Delta f = 0$ soit $g = -\frac{r^2 \Delta g}{(4N - 2)}$ et f s'écrit $f = \frac{r^4 \Delta g}{(2 - 4N)}$.
 - Supposons f écrit sous la forme $r^{2k} g_1$ avec $g_1 \in \mathcal{F}_{N-2k}$ ($0 < 2k \leq N$). Alors $\Delta f = 0 = r^{2k} \Delta g_1 + 2k(2N - 2k + 1)r^{2k-2} g_1$ et $f = \frac{r^{2k+2} \Delta g_1}{2k(2k - 2N - 1)}$ avec Δg_1 dans $\mathcal{F}_{N-2k-2}$ si $2k \leq N - 2$ et $\Delta g_1 = 0$ si $2k = N$ ou $N - 1$.
- Pour k partie entière de $\frac{N}{2}$ on a $\Delta g_1 = 0$ et $f = 0$.

11.a) Considérons l'application linéaire ϕ de $\mathcal{F}_{N-2}$ dans $\mathcal{F}_N$ qui à g associe $r^2 g$. ϕ est injective donc $\dim \text{Im } \phi = \dim \mathcal{F}_{N-2}$. De plus $\text{Im } \phi \cap \mathcal{H}_N = \{0\}$ d'après la question 10. donc $\dim \mathcal{H}_N \leq \dim \mathcal{F}_N - \dim \text{Im } \phi = \dim \mathcal{F}_N - \dim \mathcal{F}_{N-2} = 2N + 1$

b) Avec 9.a) on a $\boxed{\dim \mathcal{H}_N = 2N + 1.}$

Quatrième Partie

12. Pour $0 \leq m \leq n$ on a successivement:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \theta} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -\cos m\varphi f'_{n,m}(\cos \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -\cos m\varphi f'_{n,m}(\cos \theta) \cos \theta + \cos m\varphi f''_{n,m}(\cos \theta) \sin^2 \theta \\ \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} Y_{n,m}(\theta, \varphi) &= -m^2 \cos m\varphi f_{n,m}(\cos \theta)\end{aligned}$$

En tenant compte de la relation (E) de la fin de la deuxième partie on obtient

$$\boxed{\Delta_S Y_{n,m} = -n(n+1)Y_{n,m}}$$

Le cas $-n \leq m < 0$ est analogue.

13.a)

L'expression du laplacien en coordonnées sphériques et la relation ci dessus donne facilement $\tilde{\Delta} \tilde{H}_{n,m} = 0$

b) Remarque: L'expression " soit $H_{n,m}$ la fonction sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\tilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi)$ " est abusive. La donnée de $\tilde{H}_{n,m}$ précise la valeur de $H_{n,m}$ sur $\mathbb{R}^3$ privé d'un demi-plan P . Il s'agit en fait de montrer l'existence d'une fonction $H_{n,m}$ polynômiale sur $\mathbb{R}^3$ telle que $\tilde{H}_{n,m}(r, \theta, \varphi) = r^n Y_{n,m}(\theta, \varphi)$, ce polynôme étant homogène de degré n et harmonique.

Pour un tel polynôme, le résultat du a) et l'expression du laplacien en coordonnées sphériques assure qu'il est harmonique sur $\mathbb{R}^3 \setminus P$ donc sur $\mathbb{R}^3$ par continuité.

Détermination du polynôme:

- Cas: $m = 0$

$\tilde{H}_{n,0} = r^n P_n(\cos \theta)$. P_n est un polynôme ayant même parité que n , on peut l'écrire $P_n = \sum_{2k \leq n} a_k X^{n-2k}$.

$\tilde{H}_{n,0}$ devient: $\tilde{H}_{n,0} = \sum_{2k \leq n} a_k r^{2k} (r \cos \theta)^{n-2k} = \sum_{2k \leq n} a_k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k x_3^{n-2k}$ ce qui est l'expression d'un

polynôme homogène de degré n . On prendra $H_{n,0} = \sum_{2k \leq n} a_k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k x_3^{n-2k}$

- Cas: $0 < m \leq n$

On introduit $\tilde{Z}_{n,m} = \tilde{H}_{n,m} + i\tilde{H}_{n,-m}$.

$\tilde{Z}_{n,m} = r^n (e^{i\varphi})^m (\sin \theta)^m \frac{\partial^m P_n}{\partial x^m}(\cos \theta)$ Or $\frac{\partial^m P_n}{\partial x^m}$ est un polynôme de degré $n - m$ ayant la parité de $n - m$, il s'écrit $\frac{\partial^m P_n}{\partial x^m} = \sum_{2k \leq n-m} b_k X^{n-m-2k}$ et

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{n,m} &= \sum_{2k \leq n-m} b_k r^n (e^{i\varphi} \sin \theta)^m (\cos \theta)^{n-m-2k} \\ &= \sum_{2k \leq n-m} b_k r^{2k} (r e^{i\varphi} \sin \theta)^m (r \cos \theta)^{n-m-2k} \\ &= \sum_{2k \leq n-m} b_k (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^k (x_1 + ix_2)^m x_3^{n-m-2k} \end{aligned}$$

Parties réelle et imaginaire de $\tilde{Z}_{n,m}$ donnent des polynômes homogènes de degré n que l'on prendra respectivement pour $H_{n,m}$ et $H_{n,-m}$.