

Corrigé Mines ponts 2011

mustaphasaadaoui@yahoo.fr

A. Préliminaire :

$$1^\circ) 1 + j^2 + j^4 = \frac{1 - j^6}{1 - j^2} = 0 .$$

2°) On a $\chi_A = X^4 + X^2 + 1$, d'après 1°), j et $-j$ sont des racines et comme χ_A est à coefficients réels, donc \bar{j} et $-\bar{j}$ sont aussi des racines, Ainsi $\chi_A = (X - j)(X + j)(X - \bar{j})(X + \bar{j})$

χ_A étant scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - jI_4) \text{ si et seulement si } \begin{cases} y & = & jx \\ z & = & jy \\ t & = & jz \\ -x - z & = & jt \end{cases}$$

$$\text{Donc } y = jx, z = j^2x = \bar{j}x, t = x, \text{ par suite } \text{Ker}(A - jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \bar{j} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A \text{ étant une matrice réelle, donc } \text{Ker}(A - \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ j \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{De même } \text{Ker}(A + jI_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \text{Ker}(A + \bar{j}I_4) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \\ j \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Ainsi } U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ j & \bar{j} & -j & -\bar{j} \\ \bar{j} & j & j & j \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ on a } U^{-1}AU = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\bar{j} \end{pmatrix}$$

3°) Les solutions du système $X' = AX$ sont de la forme :

$$X : t \mapsto \alpha e^{jt} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ \bar{j} \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{j} \\ j \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma e^{-jt} \begin{pmatrix} 1 \\ -j \\ j \\ -1 \end{pmatrix} + \delta e^{-\bar{j}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\bar{j} \\ j \\ -1 \end{pmatrix}$$

4°) Si y est solution de $y^{(4)} + y'' + y = 0$, alors $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$ est solution du système

$Y' = AY$, donc de la forme précédente, en particulier il existe $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{C}^4$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{C}, y(t) = \alpha e^{jt} + \beta e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \delta e^{-\bar{j}t}$$

Réciproquement : toute fonction de la forme ci-dessus est solution.

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $(\varphi_j, \varphi_{-j}, \varphi_{\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}})$ est libre, donc

Une fonction est à valeurs réelles $\Leftrightarrow y = \bar{y} \Leftrightarrow \beta = \bar{\alpha}$ et $\delta = \bar{\gamma}$.

Donc les solutions à valeurs réelles sont de la forme $y(t) = \alpha e^{jt} + \bar{\alpha}e^{\bar{j}t} + \gamma e^{-jt} + \bar{\gamma}e^{-\bar{j}t}$

Ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Be^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + Ce^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + De^{\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

Où A, B, C et D sont des réels .

Notons φ_λ la fonction définie par $\varphi_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. On a $(\varphi_j, \varphi_{-j}, \varphi_{\bar{j}}, \varphi_{-\bar{j}})$ est libre , donc

Comme les fonction les fonctions

B) Un lemme de du Bois-Reymond

Posons $\varphi(t) = \begin{cases} t^3 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ et $k(t) = 1 - t^3$. On a alors $h(t) = \varphi \circ k$

Vérifions que φ est de classe \mathcal{C}^2 . $\varphi'(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi'(t) = 0$

D'après le théorème de prolongement φ est de classe \mathcal{C}^1 . De même on applique

le même théorème pour φ' . h est composé de fonctions de classe \mathcal{C}^2 , donc elle est \mathcal{C}^2 .

6°) Soit γ l'application définie par $:\gamma(t) = \frac{1}{2}[(x_1 - x_0)t + x_1 + x_0]$

On a $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bijective et $\gamma(-1) = x_0$ et $\gamma(1) = x_1$ et $\gamma([-1, 1]) = [x_0, x_1]$.

Posons $g(x) = h(\gamma^{-1}(x))$, g est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

- Si $x \in]x_0, x_1[$, alors $\gamma^{-1}(x) \in]-1, 1[$, donc $g(\gamma^{-1}(x)) > 0$.
- Si $x \notin]x_0, x_1[$, alors $\gamma^{-1}(x) \notin]-1, 1[$, donc $g(\gamma^{-1}(x)) = 0$.

7°) Soit $F \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 F(x) u(x) dx = 0$ pour tout $u \in E_{0,0}^2$.

Supposons que F est non nulle , alors il existe $x_0 \in]0, 1[$ tel que $F(x_0) \neq 0$
Puis par continuité , il existe $x_1 \in]0, 1[$ tel que : $\forall x \in [x_0, x_1]$, $F(x) > 0$.

Soit g l'application définie à la question précédente , $g \in E_{0,0}^2$ alors

$$\int_0^1 F(x) g(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} F(x) g(x) dx > 0 \text{ car } F(x) g(x) > 0 \text{ sur } [x_0, x_1] .$$

Ce qui est absurde , donc $F = 0$.

C . Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange .

9°) A l'aide de la formule de Taylor pour les polynômes , si $\deg P = N$, alors :

$$P(x_0 + h) = \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!} h^k$$

Par application de la formule de Taylor pour les polynômes , si $N = \max(\deg P, \deg Q)$

$$\begin{aligned} J(f_0 + t u) &= \int_0^1 P(f_0(x) + t u(x)) dx + \int_0^1 Q(f'_0(x) + t' u'(x)) dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^N \frac{P^{(k)}(f_0(x))}{k!} t^k (u(x))^k dx + \int_0^1 \sum_{k=0}^N \frac{Q^{(k)}(f'_0(x))}{k!} t^k (u'(x))^k dx \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{t^k}{k!} \int_0^1 \left[P^{(k)}(f_0(x)) (u(x))^k + Q^{(k)}(f'_0(x)) (u'(x))^k \right] dx \end{aligned}$$

Donc $J(f_0 + t u) = \sum_{k=0}^N a_k t^k$ où $a_k = \frac{t^k}{k!} \int_0^1 \left[P^{(k)}(f_0(x)) (u(x))^k + Q^{(k)}(f'_0(x)) (u'(x))^k \right] dx$

En particulier $a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x)) u(x) + Q'(f'_0(x)) u'(x)] dx$.

9°) Si $J(f_0) \leq J(f)$ pour tout $f \in E$. On a pour tout $t \in R$, $f_0 + t u \in E$

Donc $q(t) = J(f_0 + t u) \geq J(f_0)$ pour tout $t \in R$

La fonction $t \mapsto q(t)$ est dérivable puisque polynômiale et présente un minimum en 0

Donc $q'(0) = 0$ c'est-à-dire $a_1 = 0$.

D'autre part , à l'aide d'une intégration par parties , on a

$$\int_0^1 Q'(f'(x)) u'(x) dx = \underbrace{[u(x) Q'(f'(x))]_0^1}_{=0 \text{ car } u(0)=u(1)=0} - \int_0^1 f''(x) Q'(f'(x)) u(x) dx$$

Donc $a_1 = \int_0^1 [P'(f_0(x)) - f''_0(x) Q'(f'_0(x))] u(x) dx = 0$ Pour tout $u \in E$.

Comme la fonction $x \mapsto P'(f_0(x)) - f''_0(x) Q'(f'_0(x))$ est continue , donc d'après la question 7°) ,

on a : $P'(f_0(x)) - f''_0(x) Q'(f'_0(x)) = 0$, c'est-à-dire que : $P'(f_0(x)) + \frac{d}{dx} [Q'(f'_0(x))] = 0$.

Premier exemple : On applique ce qui précède avec $P(x) = 0$ et $Q(x) = x^2$.

(Δ) : $y'' = 0$. Les solutions de cette équation sont les fonctions affines $y : x \mapsto ax + b$

$y \in E_{0,1}^2$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 0$, donc $f_0(x) = x$.

Pour tout $f \in E$, on a : $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$, donc ,

$$1 = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t) dt \leq \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2} = J(f)$$

Donc $J(f) \geq 1 = J(f_0)$ pour tout $f \in E$.

Deuxième exemple :

12°) Dans cet exemple $P = 0$ et $Q(x) = x^2 + x^3$ l'équation différentielle (Δ) s'écrit alors :

$$(\Delta) : \frac{d}{dx} (2y' + 3(y')^2) = 0$$

Si $f \in E$ est une solution de l'équation différentielle (Δ) , alors $2f'(x) + 3(f'(x))^2 = C$ constante

D'autre part on a $f(0) = 0$ et $f(1) = 0$ d'après Rolle, il existe $\alpha \in [0, 1]$ telle que : $f'(\alpha) = 0$

Par suite $C = 0$, donc $f'(x)(2 + 3(f'(x)))^2 = 0$ ce qui donne que $f'(x) \in \left\{0, -\frac{2}{3}\right\}$

Et comme f' est continue, donc f' est constante égale à $f'(\alpha) = 0$ par suite f est constante égale à $f(0) = 0$.

13° Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto t f(x)$ est un élément de E , de plus

$$J(tf(x)) = t^2 \int_0^1 (2x - 3x^2)^2 dx + t^3 \int_0^1 (2x - 3x^2)^3 dx = \frac{2t^2}{105} \left(\frac{7 - 3t}{3} \right)$$

change de signe donc pas d'extremum.

D) Un exemple avec dérivée seconde :

14° On a $|ff''| \leq \frac{1}{2} (|f|^2 + |f''|^2)$, $|f|^2$ et $|f''|^2$ étant intégrable, donc $|ff''|$ est aussi intégrable.

Supposons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) f(x) = +\infty$, alors il existe $A > 0$ tel que : $\forall x \geq A, f'(x) f(x) \geq 1$

Puis par intégration, on a $\frac{1}{2} (f(x)^2 - (f'(x))^2) \geq x - A$ pour tout $x \geq A$

Donc f^2 n'est pas intégrable, ce qui est absurde.

15° On a $\int_0^x (f'(t))^2 dt = [f(t) f'(t)]_0^x - \int_0^x f'(t) f''(t) dt$

Donc $f(x) f'(x) = \int_0^x (f'(t))^2 dt + f(0) f'(0) + \int_0^x f'(t) f''(t) dt$

Supposons que f'^2 n'est pas intégrable, comme elle est positive, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x (f'(t))^2 dt = +\infty$

$f' f''$ étant intégrable, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x f'(t) f''(t) dt$ est finie, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) f(x) = +\infty$ absurde.

$(f')^2$ étant intégrable donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) f'(x) = \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt + f(0) f'(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) f''(t) dt = L \in \mathbb{R}$$

Supposons que L est non nulle, alors $f(x) f'(x) \underset{+\infty}{\sim} L$ puis à l'aide des relations de comparaisons

$$\int_0^x f'(t) f(t) dt \underset{+\infty}{\sim} Lx \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Ce qui donne que $(f(x))^2 \underset{+\infty}{\sim} Lx$ et absurde puisque f^2 est intégrable sur \mathbb{R}^+ .

16°) Les solutions de (E) à valeurs réelles peuvent s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \rho_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_0\right) + \rho_2 e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_1\right)$$

La fonction $t \mapsto e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_0\right)$ est un élément de L^2 .

Reste à voir $t \mapsto e^{\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi_1\right)$. à l'aide d'un changement de variable on peut se ramener à la fonction $t \mapsto e^{\frac{t}{\sqrt{3}}} \cos(t)$. Or

$$\int_0^X e^{\frac{2t}{\sqrt{3}}} \cos^2(t) dt = \frac{3 \sin(2X)}{16} e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}} - \frac{5}{16} \sqrt{3} + \frac{1}{4} \sqrt{3} e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}} + \frac{\sqrt{13}}{16} \cos(2X) e^{\frac{2X\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{Donc } \int_0^{2n\pi} e^{\frac{2t}{\sqrt{3}}} \cos^2(t) dt = -\frac{5}{16} \sqrt{3} \frac{5}{16} \sqrt{3} e^{\frac{2n\pi\sqrt{3}}{3}} \rightarrow +\infty \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty$$

Donc la fonction n'est pas intégrable.

Par suite $y \in E$ si et seulement si $\rho_2 = 0$ c'est-à-dire si $y \in \text{Vect}(e_1, e_2)$

17°) D'après ce qui précède les éléments de F appartenant à L^2 sont les éléments du $\text{Vect}(e_1, e_2)$

qui est égal à l'ensemble des solutions de $y'' + y' + y = 0$.

Pour $f \in \text{Vect}(e_1, e_2)$, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $f = \alpha e_1 + \beta e_2$. On a alors :

$$J(f) = J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{1}{4} (\alpha^2 + 2\alpha\beta\sqrt{3} + 3\beta^2) = \frac{1}{4} (\alpha + \beta\sqrt{3})^2 \geq 0$$

De plus $J(f) = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta\sqrt{3} \Leftrightarrow f = \beta(e_2 - \sqrt{3}e_1) = 2\beta\psi$.

18°) Il suffit d'utiliser $a^2 - b^2 + c^2 = [a + b + c]^2 - 2ab - 2ac - 2bc - 2b^2$

On a f, f' et f'' sont des éléments de L^2 , donc les fonctions $ff', ff'', f'f''$ sont intégrables

par suite les fonctions $f^2 - (f')^2 + (f'')^2$ et $(f + f' + f'')$ sont intégrables.

L'égalité précédente, donne que $(f(A) + f'(A))^2$ admet une limite finie $L \geq 0$.

Et comme $(f + f')^2$ est intégrable, donc $\lim_{A \rightarrow +\infty} (f(A) + f'(A))^2 = 0$.

Par passage à la limite, on a alors

$$J(f) = \int_0^{+\infty} (f(x) + f'(x) + f''(x))^2 dx + (f(0) + f'(0))^2 \geq 0$$

$J(f)$ est minimale lorsque $f(x) + f'(x) + f''(x) = 0$ et $f(0) + f'(0) = 0$

C'est à dire $f = \alpha e_1 + \beta e_2$ et $f(0) + f'(0) = 0$, ce qui donne la condition de 17°).

E. Application : Une inégalité de Hardy et Littlewood

20) $f \in E$, donc pour tout $\mu > 0$, $f_\mu \in E$ et $J(f_\mu) \geq 0$.

On a $J(f_\mu) = \int_0^{+\infty} f(\mu x) - \mu^2 (f'(\mu x)) + \mu^4 (f''(\mu x))^2 dx$, utilisons le changement $t = \mu x$, on a :

$$\int_0^{+\infty} (f(\mu x))^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (f(t))^2 dt \quad ; \quad \int_0^{+\infty} (f'(\mu x))^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt$$

$$\int_0^{+\infty} (f''(\mu x))^2 dx = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} (f''(t))^2 dt .$$

Donc :

$$(*) : J(f_\mu) = \frac{1}{\mu} \left(\int_0^{+\infty} (f(x))^2 dt - \mu^2 \int_0^{+\infty} (f'(x))^2 + \mu^4 \int_0^{+\infty} (f''(x))^2 dt \right) \geq 0 \text{ pour tout } \mu > 0$$

Posons $A = \int_0^{+\infty} (f(x))^2 dt$; $B = \int_0^{+\infty} (f'(x))^2$, $C = \int_0^{+\infty} (f''(x))^2 dt$. (discuter le cas $C = 0 \dots$)

On a $U(t) = A - Bt + Ct^2 = C \left(t - \frac{B}{2C} \right)^2 + \frac{4AC - B^2}{4C}$.

En particulier $U\left(\frac{B}{2C}\right) = \frac{4AC - B^2}{4C} \geq 0$ ce qui donne $B \leq 2\sqrt{AC}$ c'est l'inégalité cherchée .

l'égalité à lieu si seulement si il existe

Si l'égalité à lieu , alors $J(f_\mu) = \frac{1}{\mu} U(\mu^2) = \frac{C}{\mu} \left(\mu^2 - \frac{B}{2C} \right)^2 = 0$ pour $\mu = \sqrt{\frac{B}{2C}}$

Or les fonctions minimisant J sont de la forme $\lambda\psi$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$f_\mu = \lambda\psi$ c'est -à-dire $f(\mu x) = \lambda\psi(x)$ donc $f(x) = \lambda\psi\left(\frac{x}{\mu}\right)$ où $\mu = \sqrt{\frac{B}{2C}}$.