Corrigé de E3A 2007 PC math A

Partie A

1. (a) Le coefficient de y' ne s'annule que pour $x = 0$, les intervalles de résolution sont $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$. L'équation s'écrit encore $((\mathrm{e}^x - 1)y)' = 1$ d'où $(\mathrm{e}^x - 1)y = x + C_1$ sur I_1 , $x + C_2$ sur I_2.

   (b) Pour pouvoir prolonger la solution sur I_1 en 0 il faut $0 \times y(0) = 0 + C_1$ donc $C_1 = 0$; de même il faut $C_2 = 0$. On obtient alors pour $x \neq 0$: $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1} = f(x)$. Un développement limité à l'ordre 1 donne: $f(x) = \dfrac{x}{x + x^2/2 + o(x^2)} = \dfrac{1}{1 + x/2 + o(x)} = 1 - \dfrac{x}{2} + o(x)$ qui entraine que f est continue en 0 ($f(0) = 1$) et que f est dérivable en 0 ($f'(0) = -1/2$). (E) admet donc f comme unique solution sur $\mathbb{R}$.

2. (a) La simplification par x impose de prendre un développement limité à l'ordre 3 pour e^x: $f(x) = \dfrac{x}{x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)} = \dfrac{1}{1 + x/2 + x^2/6 + o(x^2)} = 1 - (\dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{6}) + (\dfrac{x}{2})^2 + o(x^2) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} + o(x^2)$.

   (b) On en déduit $f(0) = 1$, $f'(0) = -1/2$ mais l'existence d'un développement limité à l'ordre 2 n'entraine pas que f est dérivable 2 fois en 0.

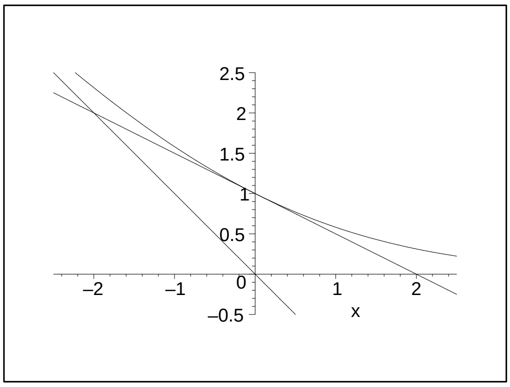
   (c) Il faut montrer que f' est continue en 0 (pas de problème pour $x \neq 0$). En utilisant (E) : $f'(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x - 1} = \dfrac{1 - (1 + x)(1 - x/2) + o(x)}{x + o(x)} = -\dfrac{1}{2} + o(1)$. f' est continue en 0 donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

   (d) La tangente T a pour équation $y = -\frac{x}{2} + 1$. Le développement limité à l'ordre 2 entraine: $f(x) - (1 - \frac{x}{2}) = \frac{x^2}{12} + o(x^2)$ qui est positif pour x proche de 0; la courbe (C) est au dessus de T pour x proche de 0.

3. (a) $g'(x) = x\mathrm{e}^x$ est négatif pour $x < 0$ et positif pour $x > 0$; g a donc un minimum en 0 d'où $g(x) \geqslant 0$ pour tout x.

   (b) $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x - 1)^2}$ a le signe de $-g(x) \leqslant 0$ donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} f(x) = 0$: f a donc pour asymptote $y = 0$ en $+\infty$.
   $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x) = \lim\limits_{x \mapsto -\infty} \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = 0$: f a donc pour asymptote $y = -x$ en $-\infty$. On a de plus $f(x) \geqslant 0$ et $f(x) + x \geqslant 0$ pour tout x; (C) est donc au-dessus de ses deux asymptotes.



4. (a) $f(x) = \dfrac{x}{2} \dfrac{2\mathrm{e}^{-x/2}}{(\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2})} = \dfrac{x}{2} \left(\dfrac{\mathrm{e}^{x/2} + \mathrm{e}^{-x/2}}{\mathrm{e}^{x/2} - \mathrm{e}^{-x/2}} - 1 \right) = \dfrac{x}{2} \left(\dfrac{1}{\tanh x/2} - 1 \right)$.

   (b) i. $f_1(x) = \dfrac{x}{2} \dfrac{1}{\tanh x/2} - 1 = \dfrac{x}{2} t(\dfrac{x}{2})$.

ii. t est impaire puisque tanh est impaire; f_1 est donc paire.

iii. $f_1(x)$ est la différence des ordonnées des points de (C) et T ayant la même abscisse x; la parité de f_1 entraine que cette différence est la même pour x et $-x$. Il y a donc égalité entre les aires limitées par (C),T et les droites d'abscisses $-x$ et 0 d'une part, (C),T et les droites d'abscisses 0 et x d'autre part.

5. (a) f est continue sur $\mathbb{R}_+$; le seul problème vient de la borne $+\infty$. En $+\infty$ on a $f(x) \sim \frac{x}{e^x} = o(1/x^2)$ donc f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et I existe.

(b) $\varphi(u) = -\ln(u)$ définit une bijection de classe C^1 de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. on peut donc poser $x = -\ln u$ dans I pour obtenir: $I = \displaystyle\int_1^0 \frac{(-\ln u)}{1/u-1}\frac{(-du)}{u} = J$. Cela prouve l'existence de J et l'égalité $I = J$.

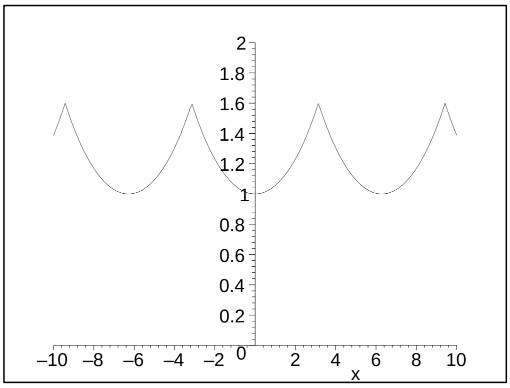
(c) I_0 existe puisque ln est intégrable sur $]0,1]$. Il n'y a pas de problème d'existence pour I_k quand $k \geqslant 1$. On intègre par parties sur $[x,1]$ $(x>0)$: $I_k = -[\frac{u^{k+1}}{k+1}\ln u]_x^1 + \displaystyle\int_x^1 \frac{u^k}{k+1}du = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x + \frac{1}{(k+1)^2}$ qui donne en faisant tendre x vers 0: $I_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$.

(d) Soit (g_n) une suite de fonctions continues et intégrables sur I telle que la série $(\sum g_n)$ converge simplement sur I vers une fonction continue g; si de plus la série $(\sum \int_I |g_n|)$ converge alors g est intégrable sur I et $\displaystyle\int_I g = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I g_n$.

(e) Pour $u \in]0,1]$ $\dfrac{\ln u}{u-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} -u^k \ln u$ donc la série de fonctions de terme général $g_k(u) = -u^k\ln u$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $g : u \mapsto \frac{\ln u}{u-1}$ qui est continue sur $]0,1]$. La série de terme général $\int_0^1 |g_k(u)|du = I_k$ converge (série de Riemann d'exposant 2) donc on obtient $J = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} I_k$. En changeant k en $k-1$ on a bien $I = J = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \zeta(2)$.

Partie B

1. (a) g_a est continue sur $\mathbb{R}$ car $\displaystyle\lim_{t\to-\pi} g_a(t) = \cosh(a\pi) = g_a(\pi)$.



(b) $$\int_0^\pi \cosh(at)\cos(nt)dt = \left[\frac{\sinh(at)}{a}\cos(nt)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sinh(at)}{a} n\sin(nt)dt$$
$$= \frac{\sinh(a\pi)}{a}(-1)^n + \left[\frac{\cosh(at)}{a^2}n\sin(nt)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\cosh(at)}{a^2}n^2\cos(nt)dt$$
d'où $(1+\dfrac{n^2}{a^2})\displaystyle\int_0^\pi \cosh(at)\cos(nt)dt = \frac{\sinh(a\pi)}{a}(-1)^n$ qui est bien le résultat attendu.

(c) g_a est paire donc $b_n = 0$ et $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g_a(t)\cos(nt)dt = \frac{2}{\pi}(-1)^n\frac{a\sinh(a\pi)}{a^2+n^2}$.

(d) Puisque g_a est 2π-périodique, continue et de classe C^1 par morceaux sa série de Fourier converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers g_a.

(e) On a donc $g_a(\pi) = \cosh(a\pi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi) = \dfrac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \dfrac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{a\sinh(a\pi)}{a^2+n^2}$. En posant $x = a\pi$ on obtient $2x\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+(n\pi)^2} = \dfrac{1}{\tanh x} - \dfrac{1}{x} = t(x)$.

2. (a) $N_\infty(t \mapsto \dfrac{1}{t^2+n^2\pi^2}) = \dfrac{1}{n^2\pi^2}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente donc il y a bien convergence normale.

(b) L'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^p}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$ donc $\dfrac{1}{(k+1)^p} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \dfrac{1}{t^p}dt \leqslant \dfrac{1}{k^p}$ pour $k \geqslant 1$; en ajoutant ces inégalités pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^p} - 1 \leqslant \int_1^n \dfrac{1}{t^p}dt \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^p}$.

Pour $p \geqslant 2$, l'application $t \mapsto \dfrac{1}{t^p}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $\zeta(p)$ existe. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient $\zeta(p) - 1 \leqslant \displaystyle\int_1^\infty \dfrac{1}{t^p}dt = \left[\dfrac{t^{1-p}}{1-p}\right]_1^{+\infty} = \dfrac{1}{p-1}$. Comme $\zeta(p) \geqslant 1$ on déduit $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \zeta(p) = 1$.

(c) Quand k tend vers $+\infty$, $|\alpha_{2k}t^{2k}| = \dfrac{\zeta(2k+2)t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \sim \left(\dfrac{t}{\pi}\right)^{2k} \dfrac{1}{\pi^2}$ qui tend vers 0 si et seulement si $|t| < \pi$. Le rayon de convergence de la série entière est donc égal à π et la série converge pour $|t| < \pi$.

(d) $S_N(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{\pi^{2k+2}} \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^{2k+2}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N} \dfrac{(-1)^k t^{2k}}{(n\pi)^{2k+2}}$ puisque les $N+1$ séries convergent.

Puisque $|t| < n\pi$ on calcule $S_N(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(n\pi)^2} \dfrac{1-(-\frac{t^2}{(n\pi)^2})^{N+1}}{1+\frac{t^2}{(n\pi)^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1+(-1)^N(\frac{t}{n\pi})^{2N+2}}{t^2+(n\pi)^2}$.

D'où $|S_N(t) - m(t)| \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\frac{t}{n\pi})^{2N+2}}{t^2+(n\pi)^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(\frac{t^2}{\pi^2})^{N+1}}{t^2+(n\pi)^2} = \left(\dfrac{t^2}{\pi^2}\right)^{N+1} m(t)$.

(e) En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient pour $t \in]-\pi, \pi[$: $h(t) = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} S_N(t) = m(t)$.

3. (a) C'est une fonction somme d'une série entière de rayon de convergence non nul.

(b) D'après B)1)e) $t(x) = 2xm(x)$; d'après B)2)e) $m(x) = h(x)$. On a donc $t(x) = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}x^{2k+1}$ pour $|x| < \pi$.

(c) D'après A)4)b)i) $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}t\left(\dfrac{x}{2}\right) = 1 - \dfrac{x}{2} + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{2k}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{2k+2}$ pour $|\frac{x}{2}| < \pi$. On a donc pour $x \in]-2\pi, 2\pi[$: $f(x) = 1 - \dfrac{x}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{2k}$ en posant $\beta_k = \dfrac{\alpha_{2k-2}}{2^{2k-1}} = \dfrac{(-1)^{k-1}\zeta(2k)}{2^{2k-1}\pi^{2k}}$.

(d) f est donc de classe C^∞ sur $]-2\pi, 2\pi[$; comme elle l'est aussi sur $\mathbb{R}^*$ par sa définition elle l'est sur $\mathbb{R}$. $f(0) = 1$, $f'(0) = -\frac{1}{2}$, et pour $k \geqslant 1$:$f^{(2k+1)}(0) = 0$ et $f^{(2k)}(0) = (2k)!\beta_k$.

(e) En utilisant le développement limité de f calculé au A)2)a) on obtient: $I = \zeta(2) = 2\pi^2\beta_1 = 2\pi^2 \times \dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi^2}{6}$.