

Exercice I

- Q1. Soit f, g et $h \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons :
- | | |
|--|--------------------|
| (i) $(f g)$ existe dans \mathbb{R} | forme |
| (ii) $(f g) = (g f)$ | symétrique |
| (iii) $(\lambda f + g h) = \lambda(f h) + (g h)$ | linéarité à gauche |
| (iv) | linéarité à droite |
| (v) $(f f) \geq 0$ | positivité |
| (vi) $(f f) = 0 \Rightarrow f = 0_E$ | caractère défini |

Pour (i) : Comme f et g sont continues sur $[-1, 1]$, on a bien l'existence dans \mathbb{R} de $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$

Pour (ii) : On a : $(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt = \int_{-1}^1 g(t)f(t) dt = (g|f)$

Pour (iii) : On a : $(\lambda f + g|h) = \int_{-1}^1 (\lambda f(t) + g(t))h(t) dt = \lambda \int_{-1}^1 f(t)h(t) dt + \int_{-1}^1 g(t)h(t) dt = \lambda(f|h) + (g|h)$

Pour (iv) : Conséquence de (i) et (ii)

Pour (v) : La fonction f^2 est positive donc $(f|f) = \int_{-1}^1 f(t)^2 dt \geq 0$

Pour (vi) : On suppose que $(f|f) = 0$.

donc $\int_{-1}^1 f(t)^2 dt = 0$ or $t \mapsto f(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$

d'où $\forall t \in [-1, 1], f(t)^2 = 0$ ainsi la fonction f est identiquement nulle sur $[-1, 1]$

$(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E

- Q2. On remarque que $(u|v) = \int_{-1}^1 t dt = 0$ donc $u \perp v$

Ainsi la famille (u, v) formées de vecteurs non nulles est orthogonale donc elle est libre.

Ainsi (u, v) est une base orthogonale de $F = \text{vect}(u, v)$

De plus $\sqrt{(u|u)} = \sqrt{\int_{-1}^1 1 dt} = \sqrt{2}$ et $\sqrt{(v|v)} = \sqrt{\int_{-1}^1 t^2 dt} = \sqrt{\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=-1}^{t=1}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u, \sqrt{\frac{3}{2}}v\right)$ est une base orthonormée de F .

En notant $u' : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $v' : t \mapsto \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, (u', v') est une base orthonormée de F

- Q3. Je note p le projeté orthogonal de w sur F qui existe bien car $\dim F < +\infty$

Selon le cours, on a $p = (w|u')u' + (w|v')v'$ car (u', v') est une base orthonormée de F

or $(w|u') = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 e^t dt = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^1 - e^{-1}) = \frac{e}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}e}$

et à l'aide d'une intégration par parties avec des fonctions de classe \mathcal{C}^1 , on a :

$(w|v') = \int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{3}}{\sqrt{2}} e^t dt = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \left([te^t]_{t=-1}^{t=1} - \int_{-1}^1 e^t dt \right) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} (e^1 + e^{-1} - e^1 + e^{-1}) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{2}{e}$

donc $p : t \mapsto \frac{3t}{e} + \frac{e}{2} - \frac{1}{2e}$ est le projeté orthogonal de la fonction w sur le sous-espace F

On cherche en fait $(d(w, F))^2$ où $d(w, F)$ est la distance de w au sous espace F

Selon le cours $d(w, F)^2 = \|w - p\|^2$

On a $w - p + p = w$ et $(w - p) \perp p$ car $p \in F$ et $w - p \in F^\perp$

donc d'après le théorème de Pythagore, $\|w - p\|^2 + \|p\|^2 = \|w\|^2$

donc $(d(w, F))^2 = \|w - p\|^2 = \|w\|^2 - \|p\|^2$

$$\text{or } \|w\|^2 = (w|w) = \int_{-1}^1 e^{2t} dt = \left[\frac{e^{2t}}{2} \right]_{t=-1}^{t=1} = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}$$

et en utilisant le calcul dans une base orthonormée $\|p\|^2 = (w|u')^2 + (w|v')^2 = \left(\frac{e}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}e} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}2}{\sqrt{2}e} \right)^2$

$$\text{d'où } \|p\|^2 = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2e^2} - 1 + \frac{6}{e^2} = \frac{e^2}{2} + \frac{13}{2e^2} - 1$$

$$\text{donc } \|w\|^2 - \|p\|^2 = -\frac{1}{2e^2} - \frac{13}{2e^2} + 1 = 1 - \frac{7}{e^2}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (e^t - (a + bt))^2 dt \right] = 1 - \frac{7}{e^2}}$$

Exercice II

Q4. Question préliminaire

Soit $k \geq 1$. Quand $n \rightarrow +\infty$, $(n - i) \sim n$ pour $i \in \llbracket 0, k - 1 \rrbracket$ fixé

Par produit $n(n - 1) \cdots (n - k + 1) \sim n^k$ puis $\left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right) \sim 1$

$$\text{On a bien } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right) = 1}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, à partir d'un certain rang on a $n \geq k$ donc

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = \frac{\lambda^k}{k!} \left(\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \right) \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n$$

or $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \rightarrow 1$ et $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)\right)$ et on a $\frac{\lambda}{n} \rightarrow 0$ donc $\ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim -\frac{\lambda}{n}$

d'où $n \ln\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) \sim -\lambda$ car $\lambda \neq 0$ comme \exp est continue, on a $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \rightarrow e^{-\lambda}$

$$\text{Ainsi par produit et à l'aide du calcul précédent : } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}}$$

Q5. On a répétition de n épreuves indépendantes de Bernoulli de paramètre $p = 1/365$, le succès étant : "le candidat est convoqué le jour de son anniversaire". X_n compte le nombre de succès. Ainsi

$$\boxed{X_n \sim \mathcal{B}(n, 1/365); X_n \text{ suit la loi de binomiale de paramètres } n \text{ et } 1/365 \text{ donc } \mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{365} \text{ d'après le cours}}$$

Q6. On cherche $\mathbb{P}(X_{219} = 2)$ où $X_{219} \sim \mathcal{B}(219, 1/365)$.

On a $n = 219 > 50$, $p = 1/365 \leq 0,01 = 1/100$ et $\frac{219}{365} = \frac{3}{5} < 10$ après simplification par 73

On approxime donc X_{219} par la loi de Poisson de paramètre $\frac{3}{5}$ après simplification par 73

$$\text{Ainsi } \mathbb{P}(X_{219} = 2) \approx \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^2 e^{-3/5}}{2!} = \frac{9e^{-0,6}}{50} \approx \frac{9 \times 0,55}{50} = 9 \times 0,011$$

Dans le cas où l'examinateur interroge 219 candidats,

$$\boxed{\text{une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire est } 0,099}$$

Si on calcule $\mathbb{P}(X \geq 2)$, on trouve $1 - \mathbb{P}(X_n = 0) - \mathbb{P}(X_n = 1) \approx 0,12$ (ambiguïté ?)

Problème

Questions préliminaires

Q7. Comme u est diagonalisable, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^p E_{\lambda_i}(u)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On peut écrire $x = \sum_{i=1}^p x_i$ où pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $x_i \in E_{\lambda_i}(u)$.

Pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on a $P(u)(x_i) = P(\lambda_i)x_i = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Donc par linéarité, $P(u)(x) = \sum_{i=1}^p P(u)(x_i) = 0_{\mathbb{R}^n}$

Ainsi le polynôme $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$ est annulateur de u et donc de M .

Q8. On a $Q(X) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i)$ et les $(X - \mu_i)$ sont mutuellement premiers entre eux ainsi selon le lemme de la décomposition des noyaux :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\mu_i}(u)$$

On note pour $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $n_i = \dim(E_{\mu_i}(u))$ ainsi $n = \sum_{i=1}^r n_i$

On note aussi $J = \{j_1, \dots, j_p\} = \{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid E_{\mu_i}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}\} = \{i \in \llbracket 1, r \rrbracket \mid n_i \neq 0\}$, ainsi en retirant les sous espaces réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, on a

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i \in J} E_{\mu_i}(u) \text{ et } n = \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i=1}^p n_{j_i}$$

Comme \mathbb{R}^n est somme directe de sous espaces propres de u , alors u est diagonalisable et donc M aussi

Je note \mathcal{B} une base adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{i \in J} E_{\mu_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^p E_{\mu_{j_i}}(u)$

alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\mu_{j_1} I_{n_1}, \dots, \mu_{j_p} I_{n_p})$ (matrice diagonale par blocs) et ainsi

$$\chi_u(X) = \chi_M(X) = \prod_{i=1}^p (X - \mu_{j_i})^{n_i}$$

donc $\text{Sp}(u) = \{\mu_{j_i} \mid i \in \mathfrak{e}\} \subset \{\mu_1, \dots, \mu_r\}$

ainsi le spectre de u est inclus dans l'ensemble $\{\mu_1, \dots, \mu_r\}$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{R}

Q9. On a $\chi_V(X) = X^2 - \text{tr}(V)X + \det(V) = X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$

Comme $\text{Sp}(V) = \{1, 2\}$ de cardinal 2 et $V \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ alors V est diagonalisable

On a $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ or $\dim(E_2(M)) = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in E_2(M) \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ alors $E_2(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

De même $E_1(M) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de vecteurs colonnes propres de M

ainsi en prenant $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $D = \text{diag}(2, 1)$, on a P inversible et $V = PDP^{-1}$

On a $\det(P) = 1$ et donc $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} (\text{comm}(P))^{\top} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Q10. Je note $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ et $Q' = \begin{pmatrix} \alpha' I_n & \beta' I_n \\ \gamma' I_n & \delta' I_n \end{pmatrix}$

Un produit par blocs donne $QQ' = \begin{pmatrix} (\alpha\alpha' + \beta\gamma')I_n & (\alpha\beta' + \beta\delta')I_n \\ (\gamma\alpha' + \delta\gamma')I_n & (\gamma\beta' + \delta\delta')I_n \end{pmatrix}$

or $\begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix} = PP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $QQ' = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$

Ainsi Q est inversible et $Q^{-1} = Q' = \begin{pmatrix} 3I_n & 2I_n \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$

En effectuant deux produits par blocs (comme ci-dessus), on a :

$$Q \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} Q^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha I_n & \beta I_n \\ \gamma I_n & \delta I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' I_n & \beta' I_n \\ \gamma' I_n & \delta' I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix}$$

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est semblable à la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$

Q11. Par produits par blocs : $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & 0 \\ 0 & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$

De plus $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$

donc $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$

Ainsi la matrice B est diagonalisable car semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$

Comme $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est semblable à B

alors $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 2\Delta \end{pmatrix}$

Q12. Je prends Q et B comme en **Q10**.

On a $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = Q^{-1}BQ$.

En utilisant le résultat admis on a $T \left(\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \right) = Q^{-1}T(B)Q$.

Comme T est annulateur de $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$, on a $T(B) = 0$

Par récurrence immédiate $\forall k \in \mathbb{N}$, $B^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & (2A)^k \end{pmatrix}$

Puis en écrivant $T = \sum_{k=0}^r a_k X^k$, on a $T(B) = \sum_{k=0}^r a_k \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & (2A)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^r a_k A^k & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^r a_k (2A)^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T(A) & 0 \\ 0 & T(2A) \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{T(A) = 0}$

À l'aide de **Q8**, on vient de montrer que si $\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors A l'est.

La réciproque a été établie en **Q11**

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable si et seulement si } A \text{ l'est}}$

Un exemple où la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **est trigonalisable sur** \mathbb{R}

Q13. On a $\chi_E(X) = X^2 - \text{tr}(E)X + \det(E) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ qui est scindé donc $\boxed{E \text{ est trigonalisable}}$

De plus $\text{Sp}(E) = \{1\}$ de cardinal 1 or $E \neq 1 \cdot I_2$ donc $E \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas diagonalisable

Ainsi $1 \leq \dim(E_1(E)) < 2$ d'où $\dim(E_1(E)) = 1$ de plus $E \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Je note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $E_1(E) = \text{vect}(e_1)$

Je note v l'endomorphisme canoniquement associée à E et on a $E_1(v) = \text{vect}(e_1)$

puis je cherche $e_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $v(e_2) = E \cdot e_2 = e_2 - 2e_1$ c'est à dire $(E - I_2)e_2 = -2e_1$ or

$$(E - I_2)e_2 = -2e_1 \iff \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Je choisis alors $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

La famille (e_1, e_2) est libre, il s'agit donc d'une base de \mathbb{R}^2 de dimension 2

La matrice de v dans cette base est alors $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\boxed{\text{en prenant } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ on a } P \text{ inversible et } E = P \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}$

Q14. Par produits par blocs comme en **Q10**, à l'aide des calculs de la question précédente :

la matrice $Q = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ est inversible et $F = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} Q^{-1}$

Ainsi $\boxed{\text{la matrice } \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \text{ est semblable à la matrice } F = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix}}$

Q15. étape 1 : On montre par récurrence pour tout $k \in \mathbb{N}$, $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

— L'initialisation est évidente pour $k = 0$

— Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$. On a bien

$$F^{k+1} = FF^k = \begin{pmatrix} A & -2A \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{k+1} & -2(k+1)A^{k+1} \\ 0 & A^{k+1} \end{pmatrix}$$

— On établit par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $F^k = \begin{pmatrix} A^k & -2kA^k \\ 0 & A^k \end{pmatrix}$

étape 2 : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons $P(F) = \begin{pmatrix} P(A) & -2AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.

On peut écrire $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et les $a_k \in \mathbb{R}$

ainsi $XP'(X) = X \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^p k a_k X^k$ puis en utilisant l'étape 1 :

$$P(F) = \sum_{k=0}^p a_k F^k = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^p a_k A^k & -2 \sum_{k=0}^p a_k k A^k \\ 0 & \sum_{k=0}^p a_k A^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(A) & -2AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

Ce qui permet conclure

étape 3 : On sait que $U(F)$ est la matrice nulle puis on utilise l'étape 2 :

$$\begin{pmatrix} U(A) & -2AU'(A) \\ 0 & U(A) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}) \text{ est la matrice nulle}$$

Q16. En utilisant **Q15**, on $U(A) = AU'(A) = 0$ ainsi $U(X)$ et $XU'(X)$ sont annulateur de A donc en notant π_A le polynôme minimale de A , on a $\pi_A(X) | U(X)$ et $\pi_A(X) | XU'(X)$

Comme U scindé sur \mathbb{R} et à racines simples, alors $\pi_A(X)$ est scindé à racines simples.

Soit λ une racine de π_A ,

on a $\pi_A(\lambda) = 0$ alors $U(\lambda) = \lambda U'(\lambda)$ ainsi λ est une racine de U , alors $U'(\lambda) \neq 0$

donc $\lambda = 0$ est l'unique racine possible de π_A

Comme U scindé sur \mathbb{R} et à racines simples, alors π_A aussi

De plus $\deg(\pi_A) \geq 1$ et que π_A est unitaire

alors $\pi_A = X$ c'est à dire le polynôme minimal de la matrice A est X

ainsi la matrice A est la matrice nulle

Q17. Si $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ est diagonalisable alors cette matrice admet un polynôme annulateur scindé à racines simples et donc A est nulle d'après la question précédente

La réciproque est évidente.

Ainsi la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable si et seulement si A est la matrice nulle

Q18. On a $\chi_F(X) = \det(XI_{2n} - F) \begin{vmatrix} XI_n - A & 2A \\ 0 & XI_n - A \end{vmatrix} = \det(XI_n - A)^2$

Ainsi $\chi_F(X) = \chi_A(X)^2$ *Remarque : je ne suppose surtout pas que F est trigonalisable pour cette égalité*

Une matrice carrée réelle est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

De plus $\chi_A(X)$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$ si et seulement si $\chi_F(X) = \chi_A(X)^2$ est scindé sur $\mathbb{R}[X]$

Ainsi F est trigonalisable sur \mathbb{R} si et seulement si A est trigonalisable sur \mathbb{R}

Q19. En prenant $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_A(X) = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + 1$ qui est non scindé sur $\mathbb{R}[X]$

donc A n'est pas trigonalisable ainsi la matrice F ne l'est pas non plus d'après la question précédente

D'après **Q14**, la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ est semblable à F

Ainsi avec $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ n'est pas trigonalisable sur \mathbb{R}

Applications

Q20. Je note $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ de sorte que $M = \begin{pmatrix} A & 2A \\ 2A & A \end{pmatrix}$

La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique réelle donc diagonalisable.

On a $B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

Je pose $Q = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

en faisant comme en **Q10**, on a :

$$Q \text{ inversible et } M = Q \begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix} Q^{-1}$$

En notant $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_3 + e_4$, $f_3 = -e_1 + e_2$ et $f_4 = -e_3 + e_4$ alors (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de \mathbb{R}^4 et la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 3A & 0 \\ 0 & -A \end{pmatrix}$

Ainsi $\text{vect}(f_1, f_2)$ et $\text{vect}(f_3, f_4)$ sont deux plans vectoriels en somme directe adaptée à u et

$\text{vect}(e_1 + e_2, e_3 + e_4)$ et $\text{vect}(-e_1 + e_2, -e_3 + e_4)$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par u

Q21. La matrice M est symétrique réelle donc diagonalisable

On remarque que $M = \begin{pmatrix} 4I_2 & 2I_2 \\ 2I_2 & 4I_2 \end{pmatrix}$

Je pose $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3I_2 + B$ où B est introduite dans la question précédente

donc $C = 3I_2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$

En faisant comme en **Q10**, je pose $P = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}$

On a alors P inversible et $M = P \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix} P^{-1}$

donc en posant $P = \begin{pmatrix} I_2 & -I_2 \\ I_2 & I_2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 6I_2 & 0 \\ 0 & 2I_2 \end{pmatrix}$, on a P inversible et D diagonale et $M = PDP^{-1}$

Q22. Je donne quelques détails : on utilise calculs et notations de la question **Q21**.

Pour $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, je pose $Y = P^{-1}X$

X est \mathcal{C}^1 si et seulement si Y l'est et dans ce cas $Y' = P^{-1}X'$

Ainsi $X = PY$ et X est solution du système différentiel $X' = MX$ si et seulement si Y est solution de $Y' = DY$

Les solutions de $Y' = DY$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} \\ \beta e^{6t} \\ \gamma e^{2t} \\ \delta e^{2t} \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

donc les solutions de $\begin{cases} x'_1 = 4x_1 + 2x_3 \\ x'_2 = 4x_2 + 2x_4 \\ x'_3 = 2x_1 + 4x_3 \\ x'_4 = 2x_2 + 4x_4 \end{cases}$ sont les fonctions de la forme $t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} - \gamma e^{2t} \\ \beta e^{6t} - \delta e^{2t} \\ \alpha e^{6t} + \gamma e^{2t} \\ \beta e^{6t} + \delta e^{2t} \end{pmatrix}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$

Q23. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Le théorème de Cauchy-linéaire nous fournit une unique solution φ du système différentielle $X' = MX$ telle que $\varphi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$

L'énoncé (et le cours) nous donne que $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = e^{tM}\varphi(0)$.

La question **Q22** nous fournit : $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi : t \mapsto \begin{pmatrix} \alpha e^{6t} - \gamma e^{2t} \\ \beta e^{6t} - \delta e^{2t} \\ \alpha e^{6t} + \gamma e^{2t} \\ \beta e^{6t} + \delta e^{2t} \end{pmatrix}$

On a $\varphi(0) = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma \\ \beta - \delta \\ \alpha + \gamma \\ \beta + \delta \end{pmatrix}$ et $\varphi(1) = \begin{pmatrix} \alpha e^6 - \gamma e^2 \\ \beta e^6 - \delta e^2 \\ \alpha e^6 + \gamma e^2 \\ \beta e^6 + \delta e^2 \end{pmatrix} = e^M \varphi(0)$

Nécessairement $\alpha = (a + c)/2$, $\beta = (b + d)/2$, $\gamma = (-a + c)/2$ et $\delta = (d - b)/2$

d'où

$$e^M \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (a + c)e^6 - (-a + c)e^2 \\ (b + d)e^6 - (d - b)e^2 \\ (a + c)e^6 + (-a + c)e^2 \\ (b + d)e^6 + (d - b)e^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (e^6 + e^2)a + (e^6 - e^2)c \\ (e^6 + e^2)b + (e^6 - e^2)d \\ (e^6 - e^2)a + (e^6 + e^2)c \\ (e^6 - e^2)b + (e^6 + e^2)d \end{pmatrix}$$

Comme c'est valable pour tout $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on obtient :

$$e^M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 & 0 \\ 0 & e^6 + e^2 & 0 & e^6 - e^2 \\ e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 & 0 \\ 0 & e^6 - e^2 & 0 & e^6 + e^2 \end{pmatrix}$$