

Corrigé X/ENS Maths A 2013

1. (a) L'ensemble V contient la suite nulle et est stable par addition et multiplication externe (car $\text{Supp}(f+g) \subset \text{Supp}(f) \cup \text{Supp}(g)$ et $\text{Supp}(\alpha f) = \text{Supp}(f)$ pour $\alpha \neq 0$) donc V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$.
 (b) L'opérateur de décalage E est linéaire. Si f est nulle en dehors d'une partie finie J , alors $E(f)$ est nulle en dehors de $J' = \{k-1 \mid k \in J\}$, donc V est stable par E .
2. L'application $E' : f \mapsto g$ définie par $g(k) = f(k-1)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ est un endomorphisme de V tel que $E \circ E' = E' \circ E = \text{Id}$ donc $E \in \text{GL}(V)$ et $E' = E^{-1}$.
3. (a) Soit $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ à support fini telle que $\sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i v_i = 0$. En appliquant cette relation à l'indice k , on obtient $a_k = 0$, ceci pour tout $k \in \mathbb{Z}$, donc $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est libre.
 Soit $f \in V$, de support J . On constate en testant l'égalité qui suit sur chaque entier que $f = \sum_{i \in J} f(i) v_i$ donc $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est génératrice, et finalement est une base de V .
 (b) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $E(v_i)(k) = \delta_{i,k+1} = \delta_{i-1,k}$, d'où $E(v_i) = v_{i-1}$.

4. On utilisera souvent dans la suite le fait que deux endomorphismes de V sont égaux si et seulement si ils coïncident sur chaque v_i .

$$(H \circ E)(v_i) = \lambda(i-1)v_{i-1}. \quad (E \circ H + 2E)(v_i) = (\lambda(i) + 2)v_{i-1}.$$

$$H \circ E = E \circ H + 2E \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = \lambda(i-1) - 2.$$

On utilisera dans la suite l'équivalence (immédiate à prouver) suivante :

$$\forall i \in \mathbb{Z}, f(i) = f(i-1) + u_i \text{ équivaut à}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, f(i) = f(0) + \sum_{j=1}^i u_j \text{ et } \forall i \in \mathbb{Z}^-, f(i) = f(0) - \sum_{j=i+1}^0 u_j.$$

En appliquant cette propriété avec $u_i = -2$ pour tout i , on obtient $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$ pour $i \in \mathbb{Z}$.

5. $(E \circ F)(v_i) = \mu(i)v_i$. $(F \circ E + H)(v_i) = (\mu(i-1) + \lambda(0) - 2i)v_i$. L'égalité $E \circ F = F \circ E + H$ équivaut à $\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0) - 2i$, donc à $\forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(0) + \lambda(0)i - i(i+1) = \mu(0) + i(\lambda(0) - 1) - i^2$.
6. (a) Soit $f \in V$, de support J . On a $f = \sum_{i \in J} f(i) v_i$ donc par récurrence sur n , $H^n(f) = \sum_{i \in J} \lambda(i)^n f(i) v_i$. Il en résulte que $\text{Vect}\{H^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \text{Vect}\{v_i \mid i \in J\}$, qui est de dimension finie égale à $\text{card } J$, donc $\text{Vect}\{H^n(f) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est aussi de dimension finie.
 (b) Soit W stable par H et $f \in W \setminus \{0\}$. Le sous-espace vectoriel W' engendré par les $H^n(f)$ est stable par f et de dimension finie d'après a). Le corps de base étant $\mathbb{C}$, l'endomorphisme induit par H sur W' admet un vecteur propre. Or, les $\lambda(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, étant deux à deux distincts d'après la relation $\lambda(i) = \lambda(0) - 2i$, les vecteurs propres de H sont les vecteurs non nuls colinéaires à l'un des v_i . Donc W' , et par conséquent W , contient l'un des v_i .

Autre solution :

Soit W un tel sous-espace. On considère un élément f non nul de W s'écrivant $\sum_{i \in J} f(i) v_i$ où J est fini et $f(i) \neq 0$ pour tout $i \in J$ **pour lequel le cardinal de J est minimal**.

On fixe $j \in J$. Soit $g = (\lambda(0) - 2j)f - H(f)$. Alors $g = \sum_{i \in J \setminus \{j\}} ((\lambda(0) - 2j)f(i) - (\lambda(0) - 2i)f(i))v_i = \sum_{i \in J \setminus \{j\}} 2(i-j)f(i)v_i$. Les coefficients sont non nuls, donc si $\text{card } J > 1$, on a trouvé un élément de W non nul dont le support est strictement inclus dans J , ce qui est absurde. Il en résulte que $J = \{j\}$, donc $f(j)v_j \in W$, or $f(j) \neq 0$, d'où $v_j \in W$.

7. (a) Ici, $\mu(i) = 1 - i - i^2$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc $\mu(i)$ n'est jamais nul. L'image par F de la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est $(\mu(i)v_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ qui est encore une base de V , donc F est bijective.
 (b) Pour $n \in \mathbb{Z}$, $E^n(v_0) = v_{-n}$ et $F^n(v_0) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mu(k)\right) v_n$. Ces deux vecteurs sont toujours distincts de v_0 , donc E et F ne sont pas d'ordre fini.

- (c) Avec les notations précédentes, $H(f) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{Z}, f(i)\lambda(i) = 0$. Or $\lambda(i) = -2i$ qui est non nul pour $i \neq 0$, donc $H(f) = 0 \iff \forall i \in \mathbb{Z}^*, f(i) = 0$, d'où $\text{Ker } H = \mathbb{C}v_0$.
Pour tout $r \geq 1$, $H^r(v_0) = 0$, donc $H^r \neq \text{Id}$.

8. Soit $U \in \mathcal{L}(V)$. On sait que l'application $P \mapsto P(U)$ est un morphisme d'algèbres de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathcal{L}(V)$ dont l'image est la sous-algèbre $\mathbb{C}[U]$. On observe que si la famille $(U^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre dans $\mathcal{L}(V)$, alors ce morphisme est injectif, donc sera un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{C}[U]$.

Ce sera en particulier le cas si la famille $(U^n(v_0))_{n \in \mathbb{Z}}$ est libre dans V , car toute relation de liaison sur les U^n produit la même relation de liaison sur les $U^n(v_0)$.

- (a) $E^n(v_0) = v_{-n}$, donc par ce qui précède, $\mathbb{C}[E]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.
(b) $F^n(v_0) = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \mu(k)\right) v_n$. Le coefficient devant v_n est non nul, donc de même qu'avant, $\mathbb{C}[F]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.
(c) On suppose que $\sum_{n=0}^d a_n H^n = 0$. Appliqué à v_i , on obtient $\left(\sum_{n=0}^d a_n (-2i)^n\right) v_i = 0$, d'où $\sum_{n=0}^d a_n (-2i)^n = 0$. En faisant varier i de 0 à d , on obtient un système linéaire de $d+1$ équations à $d+1$ inconnues $(a_0, \dots, a_d)$, dont le déterminant est non nul car de Vandermonde relativement aux valeurs $(-2i)_{0 \leq i \leq d}$ qui sont 2 à 2 distinctes (il vaut précisément $\prod_{0 \leq i < j \leq d} (-2j + 2i)$). Le système est de Cramer, donc les a_n sont nuls pour $n \in \llbracket 0, d \rrbracket$, d'où $(H^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre, donc $\mathbb{C}[H]$ est isomorphe à $\mathbb{C}[X]$.

9. En tant que racine primitive ℓ -ième de l'unité, q s'écrit sous la forme $\exp(\frac{2ik\pi}{\ell})$ avec k premier avec ℓ . Mais alors $q^2 = \exp(\frac{4ik\pi}{\ell})$ et $2k$ est premier avec ℓ donc q^2 est encore racine primitive ℓ -ième de l'unité.

10. (a) $G_a(v_i) = v_{i+1}$ pour $0 \leq i \leq \ell - 2$ et $G_a(v_{\ell-1}) = av_0$, donc $G_a^{\ell-i}(v_i) = av_0$, d'où $G_a^\ell(v_i) = G_a^\ell(av_0) = av_i$ pour i compris entre 0 et $\ell - 1$. Il en résulte que $G_a^\ell = a \text{Id}$, donc G_a est annulé par le polynôme $X^\ell - a$, qui est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$ (car $a \neq 0$), donc G_a est diagonalisable, à spectre inclus dans l'ensemble des racines ℓ -ièmes de a , c'est-à-dire $\{bq^k \mid 0 \leq k \leq \ell - 1\}$.
(b) On cherche à résoudre (E) : $G_a(f) = bq^k f$ avec $f = \sum_{i=0}^{\ell-1} f(i)v_i \neq 0$. Comme $G_a(f) = \sum_{i=0}^{\ell-2} f(i)v_{i+1} + af(\ell-1)v_0$, (E) se traduit par $f(i) = bq^k f(i+1)$ pour $0 \leq i \leq \ell - 2$ et $af(\ell-1) = bq^k f(0)$. On en déduit $f(i) = (bq^k)^{-i} f(0)$ pour tout $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$.
Par suite, le spectre de G_a est $\{bq^k \mid 0 \leq k \leq \ell - 1\}$ et $\text{Ker}(G_a - bq^k \text{Id}) = \mathbb{C}f_k$ où $f_k = \sum_{i=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i$.

11. Déjà, $P_a(v_r) = v_r$ lorsque $0 \leq r < \ell$ et $\Im P_a \subset W_\ell$ par définition, donc $\Im P_a = W_\ell$.

De plus, $P_a^2(v_i) = a^p P_a(v_r) = a^p v_r$ car $r < \ell$, d'où $P_a^2 = P_a$, donc P_a est un projecteur d'image W_ℓ .

12. $(H \circ E)(v_i) = H(v_{i-1}) = \lambda(i-1)v_{i-1}$. $(E \circ H)(v_i) = \lambda(i)E(v_i) = \lambda(i)v_{i-1}$, donc
 $H \circ E = q^2 E \circ H \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = q^{-2}\lambda(i-1) \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) = q^{-2i}\lambda(0)$.
13. $\lambda(0) \neq 0$ donc $\forall i \in \mathbb{Z}, \lambda(i) \neq 0$, donc l'image par H de la base $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base, d'où $H \in \text{GL}(V)$.
14. On a $H^{-1}(v_i) = \lambda(0)^{-1}q^{2i}v_i$, $(E \circ F)(v_i) = \mu(i)v_i$ et $(F \circ E + H - H^{-1})(v_i) = (\mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i})v_i$, donc $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1} \iff \forall i \in \mathbb{Z}, \mu(i) = \mu(i-1) + \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i}$.

15. (a) Pour $i \in \mathbb{Z}$, $\lambda(i + \ell) = \lambda(i)q^{-2\ell} = \lambda(i)$.
 $\mu(i + \ell) - \mu(i) = \sum_{j=i+1}^{i+\ell} \mu(j) - \mu(j-1) = \lambda(0) \sum_{j=i+1}^{i+\ell} q^{-2j} - \lambda(0)^{-1} \sum_{j=i+1}^{i+\ell} q^{2j} = 0$ car $\sum_{j=1}^{\ell} q^{-2j} = q^{-2} \frac{q^{-2\ell} - 1}{q^{-2} - 1} = 0$ et de même $\sum_{j=1}^{\ell} q^{2j} = 0$.
Par suite, λ et μ sont périodiques, ℓ étant une période. L'ensemble des périodes d'une suite périodique étant un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$ non réduit à $\{0\}$, il est de la forme $a\mathbb{Z}$ (avec $a \in \mathbb{N}^*$), donc les périodes minimales de λ et μ divisent ℓ .
Attention, quand l'énoncé parle de la période, il s'agit de la période minimale.
(b) q^{-2} est racine primitive ℓ -ième de l'unité donc les complexes q^{-2i} pour i variant de 0 à $\ell - 1$ sont 2 à 2 distincts, donc λ est de période minimale ℓ .

- (c) On suppose $0 < k < \ell$: par un calcul analogue au précédent,

$$\mu(i+k) - \mu(i) = \lambda(0)q^{-2(i+1)} \sum_{j=0}^{k-1} q^{-2j} - \lambda(0)^{-1} q^{2(i+1)} \sum_{j=0}^{k-1} q^{2j}.$$
Après simplification, $\mu(i+k) - \mu(i) = \frac{q^{2k} - 1}{q^2 - 1} (\lambda(0)q^{-2(i+k)} - \lambda(0)^{-1} q^{2(i+1)}).$
Si k est une période de μ , comme $q^{2k} \neq 1$ car $k < \ell$ et q est primitive, on aura pour tout i , $\lambda(0)^2 = q^{2(2i+k+1)}$.
En prenant $i = -1$ puis $i = 0$, il vient $q^{2(k-1)} = q^{2(k+1)}$ d'où $q^4 = 1$ ce qui est absurde car ℓ est impair. Il en résulte que ℓ est la période minimale de μ .
16. (a) $E \circ F = F \circ E + H - H^{-1}$ donc $C = (q - q^{-1})F \circ E + (q - q^{-1} + q^{-1})H + (-q + q^{-1} + q)H^{-1}$, d'où $C = (q - q^{-1})F \circ E + qH + q^{-1}H^{-1}$.
(b) $Cv_i = ((q - q^{-1})\mu(i) + q^{-1}\lambda(i) + q\lambda(i)^{-1})v_i$. Pour $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mu(i) = \mu(0) + \lambda(0)q^{-2} \sum_{j=0}^{i-1} q^{-2j} - \lambda(0)^{-1} q^2 \sum_{j=0}^{i-1} q^{2j} = \mu(0) + \lambda(0)q^{-2} \frac{1-q^{-2i}}{1-q^{-2}} - \lambda(0)^{-1} q^2 \frac{q^{2i}-1}{q^2-1}.$$
Après un rapide calcul, $Cv_i = ((q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1})v_i$.
Pour $i < 0$, en utilisant la remarque du 4, le calcul se mène de façon analogue et conduit au même résultat.
(c) La valeur propre de C associée à v_i obtenue ci-dessus ne dépend pas de i , donc comme $(v_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ est une base de V , C est l'homothétie de rapport $R(\lambda(0), \mu(0), q) = (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$.
(d) L'application $\mu(0) \mapsto (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$ est affine de coefficient directeur $q - q^{-1}$ non nul car ℓ est impair, donc est une bijection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
(e) Soit $z' \in \mathbb{C}$. L'équation $z' = q^{-1}z + qz^{-1}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ s'écrit $q^{-1}z^2 - z'z + q = 0$ donc est du second degré de coefficient constant non nul donc admet au moins une racine non nulle dans $\mathbb{C}$, donc l'application $\lambda(0) \mapsto (q - q^{-1})\mu(0) + q^{-1}\lambda(0) + q\lambda(0)^{-1}$ est surjective de $\mathbb{C}^*$ sur $\mathbb{C}$. Lorsque $z' \neq \pm 2$, l'équation possède 2 racines dans $\mathbb{C}^*$, donc l'application ci-dessus n'est pas injective.
17. (a) Si P_a commute avec ϕ , alors $P_a \circ \phi \circ P_a = P_a^2 \circ \phi = P_a \circ \phi$, donc ϕ est compatible avec P_a .
(b) Avec les notations de l'énoncé, $P_a \circ H \circ P_a(v_i) = P_a(a^p H(v_r)) = a^p \lambda(0) q^{-2r} P_a(v_r) = a^p \lambda(0) q^{-2r} v_r$.
 $P_a \circ H(v_i) = P_a(\lambda(0) q^{-2i} v_i) = a^p \lambda(0) q^{-2i} v_r$. Or $i = p\ell + r$ donc $q^{-2i} = q^{-2\ell p} q^{-2r} = q^{-2r}$, donc $P_a \circ H \circ P_a = P_a \circ H$.
Le calcul est le même pour H^{-1} en remplaçant q par q^{-1} , donc H et H^{-1} sont compatibles avec P_a .
18. $0 \in \mathcal{U}_q$ et $\text{Id} \in \mathcal{U}_q$. Si ϕ et ψ appartiennent à $\mathcal{U}_q$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, clairement $\alpha\phi$ et $\phi + \psi$ appartiennent à $\mathcal{U}_q$. $P_a \circ \phi \circ \psi \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a \circ \psi \circ P_a = P_a \circ \phi \circ P_a \circ \psi = P_a \circ \phi \circ \psi$ (merci à l'associativité), donc $\mathcal{U}_q$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(V)$.
19. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on écrit $i = p\ell + r$ avec $0 \leq r < \ell$. $P_a \circ E(v_i) = P_a(v_{i-1})$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p P_a(v_{r-1})$.
Si $r \neq 0$: $i - 1 = p\ell + r - 1$ donc $P_a \circ E(v_i) = a^p v_{r-1}$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p v_{r-1}$.
Si $r = 0$: $i - 1 = p\ell - 1 = (p - 1)\ell + \ell - 1$ donc $P_a \circ E(v_i) = a^{p-1} v_{\ell-1}$ et $P_a \circ E \circ P_a(v_i) = a^p P_a(v_{-1}) = a^p a^{-1} v_{\ell-1}$ car $-1 = (-1)\ell + \ell - 1$. Dans tous les cas, $P_a \circ E(v_i) = P_a \circ E \circ P_a(v_i)$ donc $P_a \circ E = P_a \circ E \circ P_a$.
 $P_a \circ F(v_i) = \mu(i) P_a(v_{i+1})$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) P_a(v_{r+1})$.
Si $r \neq \ell - 1$: $i + 1 = p\ell + r + 1$ donc $P_a \circ F(v_i) = a^p \mu(i) v_{r+1}$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) v_{r+1}$. Or $i - r$ est multiple de ℓ , période de μ , donc $\mu(i) = \mu(r)$.
Si $r = \ell - 1$: $i + 1 = (p + 1)\ell$ donc $P_a \circ F(v_i) = \mu(i) a^{p+1} v_0$ et $P_a \circ F \circ P_a(v_i) = a^p \mu(r) P_a(v_\ell) = a^{p+1} \mu(r) v_0$, avec là encore $\mu(i) = \mu(r)$.
Dans tous les cas, $P_a \circ F(v_i) = P_a \circ F \circ P_a(v_i)$ donc $P_a \circ F = P_a \circ F \circ P_a$.
20. (a) La composition indiquée dans cette question est incohérente, car on compose un endomorphisme de W_ℓ avec un endomorphisme de V . Cette erreur ne devrait pas avoir trop perturbé les candidats qui s'en sont aperçus.
Comme P_a restreinte à W_ℓ est l'identité, la condition proposée entraîne :

Pour tout $x \in W_\ell$, $\Psi_a(\phi)(x) = P_a(\phi(x))$. Ceci prouve l'unicité de $\Psi_a \in \mathcal{L}(\mathcal{U}_q, \mathcal{L}(W_\ell))$.

Inversement, pour tout $\phi \in \mathcal{U}_q$, on pose $\boxed{\forall x \in W_\ell, \Psi_a(\phi)(x) = P_a(\phi(x))}$.

Ainsi défini, $\Psi_a(\phi)$ est un endomorphisme de W_ℓ , donc l'application Ψ_a ainsi définie est linéaire de $\mathcal{U}_q$ dans $\mathcal{L}(W_\ell)$.

On a alors, pour tout $x \in V$, $\Psi_a(\phi)(P_a(x)) = P_a(\phi(P_a(x))) = P_a(\phi(x))$ car ϕ est compatible avec P_a , d'où $\Psi_a(\phi) \circ P_a = P_a \circ \phi$.

Soient ϕ et ϕ' dans $\mathcal{U}_q$: pour tout x dans W_ℓ , $\Psi_a(\phi \circ \phi')(x) = P_a((\phi \circ \phi')(x)) = (P_a \circ \phi)(\phi'(x)) = (P_a \circ \phi \circ P_a)(\phi'(x))$ (car ϕ est compatible avec P_a) $= (P_a \circ \phi)(P_a(\phi'(x))) = \Psi_a(\phi)(\Psi_a(\phi')(x))$. On en déduit que $\Psi_a(\phi \circ \phi') = \Psi_a(\phi) \circ \Psi_a(\phi')$, donc Ψ_a est un morphisme d'algèbres.

- (b) $\phi \in \text{Ker } \Psi_a \iff \forall x \in W_\ell, P_a(\phi(x)) = 0 \iff P_a \circ \phi \circ P_a = 0$ car $\text{Im } P_a = W_\ell$. Comme ϕ est compatible avec P_a , cela équivaut à $P_a \circ \phi = 0$, c'est-à-dire à $\text{Im } \phi \subset \text{Ker } P_a$.

Il ne reste plus qu'à déterminer le noyau de P_a :

Pour $r \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, on pose $V_r = \text{Vect}\{v_i \mid i \equiv r \pmod{\ell}\}$. En groupant les indices selon leur congruence modulo r , il apparaît que $V = \bigoplus_{r=0}^{\ell-1} V_r$ et $P_a(V_r) = \mathbb{C}v_r$. Il en résulte que $\text{Ker } P_a = \bigoplus_{r=0}^{\ell-1} \text{Ker } P_a|_{V_r}$.

Soit $f = \sum_{p \in J} \alpha_p v_{p\ell+r} \in V_r$ avec J fini. On a $P_a(f) = \left(\sum_{p \in J} \alpha_p a^p\right) v_r$, donc

$P_a(f) = 0 \iff \sum_{p \in J} \alpha_p a^p = 0$. Ceci entraîne que $f = \sum_{p \in J \setminus \{0\}} \alpha_p (v_{p\ell+r} - a^p v_r)$.

Inversement, $P_a(v_{p\ell+r} - a^p v_r) = 0$, donc $\text{Ker } P_a|_{V_r} = \text{Vect}\{v_{p\ell+r} - a^p v_r \mid p \in \mathbb{Z}^*, 0 \leq r \leq \ell - 1\}$. On en déduit que $\text{Ker } P_a = \text{Vect}\{v_{p\ell+r} - a^p v_r \mid p \in \mathbb{Z}^*, 0 \leq r \leq \ell - 1\}$.

21. (a) $\Psi_a(E)(v_0) = P_a(E(v_0)) = P_a(v_{-1}) = a^{-1}v_{\ell-1}$.
- (b) Pour $1 \leq r \leq \ell - 1$, $\Psi_a(E)(v_r) = P_a(v_{r-1}) = v_{r-1}$ donc $\Psi_a(E)^k(v_r) = v_{r-k}$ pour $1 \leq k \leq r$.
 $\Psi_a(E)^\ell(v_r) = \Psi_a(E)^\ell(v_r) = (\Psi_a(E)^{\ell-r-1} \circ \Psi_a(E))(\Psi_a(E)^r(v_r)) = \Psi_a(E)^{\ell-r-1}(\Psi_a(E)(v_0)) = a^{-1}\Psi_a(E)^{\ell-r-1}(v_{\ell-1}) = a^{-1}v^r$.
De même, $\Psi_a(E)^\ell(v_0) = a^{-1}\Psi_a(E)^{\ell-1}(v_{\ell-1}) = a^{-1}v_0$.
On en déduit que $\Psi_a(E)^\ell = a^{-1} \text{Id}$.
- (c) Pour $0 \leq k \leq \ell - 1$, $\Psi_a(E)^k(v_{\ell-1}) = v_{\ell-k-1}$, donc la famille $(\Psi_a(E)^k(v_{\ell-1}))_{0 \leq k \leq \ell-1}$ est libre, donc a fortiori la famille $(\Psi_a(E)^k)_{0 \leq k \leq \ell-1}$ est libre. D'après la question précédente, on en déduit que $(\Psi_a(E)^k)_{0 \leq k \leq \ell-1}$ est une base de $\mathbb{C}[\Psi_a(E)]$, qui est donc de dimension ℓ . En outre, le polynôme minimal de $\Psi_a(E)$ est égal à $X^\ell - a^{-1}$.
- (d) Pour $0 \leq k \leq \ell - 2$, $\Psi_a(E) \circ G_a(v_k) = \Psi_a(E)(v_{k+1}) = v_k$ et $\Psi_a(E) \circ G_a(v_{\ell-1}) = a\Psi_a(E)(v_0) = v_{\ell-1}$. On en déduit que $\Psi_a(E) = G_a^{-1}$. Les valeurs propres de $\Psi_a(E)$ sont les inverses de celles de G_a , avec les mêmes vecteurs propres.
Pour $0 \leq k \leq \ell - 1$, $\text{Ker}(\Psi_a(E) - b^{-1}q^{-k} \text{Id}) = \mathbb{C}f_k$ avec $f_k = \sum_{i=0}^{\ell-1} (bq^k)^{-i} v_i$.
22. (a) Pour $0 \leq i \leq \ell - 1$, $\Psi_a(H)(v_i) = P_a(H(v_i)) = \lambda(0)q^{-2i}v_i$. Comme W_ℓ est stable par H , $\Psi_a(H)$ est l'endomorphisme induit par H sur W_ℓ . Or, puisque $\lambda_i = \lambda(0)q^{-2i}$, les $\lambda(i)$ pour $0 \leq i \leq \ell - 1$ sont 2 à 2 distincts, donc $\Psi_a(H)$ admet ℓ valeurs propres distincts et ses vecteurs propres sont les vecteurs non nuls colinéaires aux v_i , $0 \leq i \leq \ell - 1$. Comme un sous-espace non nul de W_ℓ stable par $\Psi_a(H)$ contient un vecteur propre de $\Psi_a(H)$, il contient l'un des v_i .
- (b) Il existe r tel que $v_r \in W$. Si W est stable par $\Psi_a(E)$, comme $\Psi_a(E)(v_r) = \begin{cases} v_{r-1} & \text{si } r \neq 0 \\ a^{-1}v_{\ell-1} & \text{si } r = 0 \end{cases}$, en appliquant successivement $\Psi_a(E)$ à partir du vecteur v_r , on obtient que tous les v_i appartiennent à W pour $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$, donc $W = W_\ell$.

23. $\Psi_a(F)(v_i) = \mu(i)P_a(v_{i+1}) = \begin{cases} \mu(i)v_{i+1} & \text{si } 0 \leq i < \ell - 1 \\ a\mu(\ell - 1)v_0 & \text{si } i = \ell - 1 \end{cases}$

Comme $\dim W_\ell = \ell$, l'endomorphisme $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si $\Psi_a(F)^\ell = 0$.

Or $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = \Psi_a(F)^{i+1}\Psi_a(F)^{\ell-i-1}(v_i) = \Psi_a(F)^{i+1}(\mu(i) \cdots \mu(\ell - 2)v_{\ell-1})$

d'où $\Psi_a(F)^\ell(v_i) = a\mu(i) \cdots \mu(\ell - 1)\Psi_a(F)^i(v_0) = a\mu(0) \cdots \mu(\ell - 1)v_i$.

Il en résulte que $\Psi_a(F)^\ell = a\mu(0) \cdots \mu(\ell - 1) \text{Id}$, donc $\Psi_a(F)$ est nilpotent si et seulement si le produit $\prod_{i=0}^{\ell-1} \mu(i) = 0$, c'est-à-dire s'il existe i entre 0 et $\ell - 1$ tel que $\mu(i) = 0$.

En reprenant l'expression de μ dans la question 15c (avec $i \leftarrow 0$ et $k \leftarrow i$), on obtient

$$\mu(i) = \mu(0) + \frac{q^{2i} - 1}{q^2 - 1} (\lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^2). \quad (q^2 - 1)\mu(i) = qR(\lambda(0), \mu(0), q) - \lambda(0)q^{-2i} - \lambda(0)^{-1}q^{2i+2}.$$

La condition cherchée est qu'il existe $i \in \llbracket 0, \ell - 1 \rrbracket$ tel que $R(\lambda(0), \mu(0), q) = \lambda(0)q^{-2i-1} + \lambda(0)^{-1}q^{2i+1}$.