

session de 1990

concours interne
et concours d'accès à l'échelle de rémunération
des professeurs agrégés

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 6 heures

L'usage des calculatrices de poche, y compris programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, non imprimantes, est autorisé pour cette épreuve conformément à la circulaire n° 86-828, du 28 juillet 1986.

Notations

Dans tout le problème, on désigne par \mathbb{R} le corps des nombres réels, par \mathbb{Z} l'anneau des entiers, par \mathbb{N} l'ensemble des entiers positifs ou nuls, et par \mathbb{N}^* l'ensemble des entiers strictement positifs.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{M}_n la \mathbb{R} -algèbre des matrices carrées de taille n à éléments réels. Si A est un élément de \mathcal{M}_n , la notation $A = [a_{ij}]$ signifie que a_{ij} est le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j de A . On dit que A est nilpotente s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$. La matrice A est dite triangulaire supérieure stricte si $a_{ij} = 0$ pour $i \geq j$.

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, $\mathcal{L}(E)$ désigne la \mathbb{R} -algèbre des endomorphismes de E , et id_E l'application identique de E . Pour u, v éléments de $\mathcal{L}(E)$, on note uv le composé $u \circ v$. Pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, u^i est l'endomorphisme de E défini par la formule de récurrence $u^{i+1} = u^i u$, avec $u^0 = \text{id}_E$. On dit que u est nilpotent s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, sa dimension est notée $\dim E$. Étant donné un endomorphisme u de E , et \mathcal{B} une base de E , on désigne par $\text{Mat}(u; \mathcal{B})$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} .

Il est rappelé qu'un endomorphisme d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie n'admet pas nécessairement de valeur propre.

PARTIE I

1. Dans toute cette question, n désigne un entier strictement positif. Pour tout élément $A = [a_{ij}]$ de \mathcal{M}_n , la trace $\text{tr}(A)$ de A est définie par :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On note \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n$ qui vérifient $\text{tr}(A) = 0$.

- a. Prouver que \mathcal{S}_n est un sous-espace vectoriel de \mathcal{M}_n . Quelle est sa dimension ?

- b. Soient A et B deux éléments de \mathcal{M}_n . Prouver que la matrice $AB - BA$ appartient à \mathcal{S}_n .

Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension n , et u un endomorphisme de E . Prouver que le nombre réel :

$$\text{tr}(u) = \text{tr}(\text{Mat}(u; \mathcal{B}))$$

est indépendant de la base \mathcal{B} de E choisie pour le définir. Ce nombre réel sera appelé la trace de l'endomorphisme u .

- c. Pour i et j éléments de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on note M_{ij} la matrice de \mathcal{M}_n dont le terme de la ligne d'indice i et de la colonne d'indice j est égal à 1, les autres termes de M_{ij} étant nuls.

Soient i et j des entiers distincts de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Calculer les matrices :

$$M_{ij} M_{ji} - M_{ji} M_{ij} \quad \text{et} \quad M_{ii} M_{ji} - M_{ji} M_{ii}.$$

- d. Soit φ une forme linéaire sur le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathcal{M}_n vérifiant : $\varphi(AB) = \varphi(BA)$
pour toutes matrices A et B de \mathcal{M}_n .

Montrer qu'il existe un nombre réel λ tel que : $\varphi(A) = \lambda \text{tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$.

2. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , et u un endomorphisme nilpotent de E .
- Prouver que u n'est pas surjectif.
 - Soient H un hyperplan de E contenant l'image de u , et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E telle que (e_1, \dots, e_{n-1}) soit une base de H .
Que peut-on dire de $\text{Mat}(u; \mathcal{B})$?
En raisonnant par récurrence sur la valeur de l'entier n , prouver qu'il existe une base \mathcal{F} de E telle que $\text{Mat}(u; \mathcal{F})$ soit triangulaire supérieure stricte.
 - Montrer que l'on a $\text{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.
3. Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie non nulle n , et u un endomorphisme de E tel que $\text{tr}(u^p) = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.
- Prouver que u n'est pas surjectif (on pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton).
 - En raisonnant comme dans la question 1.2.b., montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}(u; \mathcal{B})$ soit triangulaire supérieure stricte.
 - Prouver que l'endomorphisme u est nilpotent.
4. Énoncer le résultat démontré dans les questions 1.2. et 1.3.

PARTIE II

Si u et v sont deux endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, on pose :

$$[u, v] = uv - vu.$$

On appelle *quaterne* tout quadruplet $Q = (u, v, w, E)$ où E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie non nulle, et où u, v et w sont des endomorphismes de E vérifiant :

$$[u, v] = 2v, \quad [u, w] = -2w, \quad [v, w] = u.$$

Deux quaternes $Q = (u, v, w, E)$ et $Q' = (u', v', w', E')$ sont dits *équivalents* s'il existe des bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' de E et E' telles que :

$$\text{Mat}(u; \mathcal{B}) = \text{Mat}(u'; \mathcal{B}'), \quad \text{Mat}(v; \mathcal{B}) = \text{Mat}(v'; \mathcal{B}'), \quad \text{Mat}(w; \mathcal{B}) = \text{Mat}(w'; \mathcal{B}').$$

Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne.

On note $\mathcal{T}(Q)$ l'ensemble $\{u, v, w\}$.

On dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est $\mathcal{T}(Q)$ -stable si $f(x) \in F$ pour tout vecteur $x \in F$ et tout élément $f \in \mathcal{T}(Q)$. S'il en est ainsi, et si F est non réduit à $\{0\}$, on définit un quaterne $Q_F = (u_F, v_F, w_F, F)$ en notant respectivement u_F, v_F, w_F les restrictions de u, v, w à F .

Le quaterne Q est dit *irréductible* si les seuls sous-espaces vectoriels $\mathcal{T}(Q)$ -stables de E sont $\{0\}$ et E .

1. Soient r un entier strictement positif, E_r un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension r , et $\mathcal{B}_r = (e_1, \dots, e_r)$ une base de E_r . On définit des endomorphismes u_r, v_r et w_r de E_r par les formules suivantes :

$$u_r(e_i) = (r - 2i + 1)e_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r.$$

$$v_r(e_1) = 0, \quad \text{et } v_r(e_i) = (i - 1)(r - i + 1)e_{i-1} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq r.$$

$$w_r(e_r) = 0, \quad \text{et } w_r(e_i) = e_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq r - 1.$$

- Prouver que $Q' = (u_r, v_r, w_r, E_r)$ est un quaterne.
- Soit x un élément non nul de E_r . Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}$ tel que le vecteur $(w_r)^s(x)$ soit non nul et colinéaire à e_r .

En déduire que le quaterne Q' est irréductible.

Tournez la page S.V.P.

2. Soient f, g, h des endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel. Établir la formule :

$$[f, gh] = [f, g]h + g[f, h].$$

3. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne.

a. Montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$[u, v^p] = 2p v^p, \quad [u, w^p] = -2p w^p.$$

b. En déduire que v et w sont des endomorphismes nilpotents de E .

c. Pour p entier strictement positif, établir les formules :

$$[w, v^p] = -p(u - (p-1)\text{id}_E)v^{p-1}, \quad [v, w^p] = p(u + (p-1)\text{id}_E)w^{p-1}.$$

4. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. On note r le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$ (un tel entier existe d'après la question II.3.b.).

a. Soit z un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul. Montrer que :

$$v(y) = 0, \quad u(y) = (r-1)y.$$

b. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x_p = w^{p-1}(y).$$

Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u(x_p) = (r-2p+1)x_p.$$

Prouver qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$x_s \neq 0, \quad \text{et } x_k = 0 \text{ pour } k > s.$$

c. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que :

$$v(x_p) = (p-1)(r-p+1)x_{p-1}.$$

d. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs x_1, x_2, \dots, x_s , où s est l'entier défini à la question II.4.b.

Prouver que F est de dimension s et est $\mathcal{T}(Q)$ -stable.

e. Montrer que la trace de la restriction de u à F est égale à :

$$s(r-s).$$

En déduire que $s = r$, puis que le quaterne $Q_F = (u_F, v_F, w_F, F)$ est équivalent au quaterne Q' défini à la question II.1.

f. Que peut-on dire si le quaterne Q est irréductible ?

A SUIVRE

PARTIE III

Pour tout \mathbb{R} -espace vectoriel E , on désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E . Si $f \in E^*$, et si $x \in E$, on note $\langle f, x \rangle$ pour $f(x)$. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, ${}^t u$ désigne l'endomorphisme transposé de u . Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, les endomorphismes $({}^t u)^p$ et ${}^t(u^p)$ sont égaux; on les notera ${}^t u^p$. Si G est un sous-espace vectoriel de E^* , l'orthogonal G^\perp de G est le sous-espace vectoriel de E constitué des vecteurs $x \in E$ tels que $\langle f, x \rangle = 0$ pour tout $f \in G$.

1. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. Prouver que $Q^* = (-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$ est un quaterne.
2. On reprend dans cette question les notations de la question II.4. : $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne, r est le plus petit entier strictement positif tel que $v^r = 0$, z est un vecteur de E tel que $y = v^{r-1}(z)$ soit non nul, et F est le sous-espace vectoriel de E engendré par les vecteurs $x_p = w^{p-1}(y)$ pour $1 \leq p \leq r$.

De plus, on note Q^* le quaterne $(-{}^t u, -{}^t v, -{}^t w, E^*)$, et on fixe un élément h de E^* tel que $\langle h, y \rangle = 1$. On pose $g = {}^t v^{r-1}(h)$, et on note G le sous-espace vectoriel de E^* engendré par les vecteurs $f_p = (-{}^t w)^{p-1}(g)$ pour $1 \leq p \leq r$.

a. Vérifier que g est non nul. Prouver que F est $\mathcal{F}(Q)$ -stable, que G est $\mathcal{F}(Q^*)$ -stable, et que les quaternes Q_F et Q_G^* sont irréductibles et équivalents.

b. Soient k et p des entiers de l'ensemble $\{1, 2, \dots, r\}$. Établir les formules :

$$\langle f_k, x_{r-k+1} \rangle = (-1)^{k-1} ((r-1)!)^2, \quad \langle f_k, x_p \rangle = 0 \quad \text{si } p+k > r+1.$$

c. Prouver que l'orthogonal G^\perp de G est $\mathcal{F}(Q)$ -stable, et que c'est un supplémentaire de F dans E .

d. Montrer qu'il existe un entier $s \in \mathbb{N}^*$, et des sous-espaces vectoriels non nuls F_1, \dots, F_s de E vérifiant les conditions suivantes :

i. $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_s$.

ii. Pour $1 \leq i \leq s$, F_i est $\mathcal{F}(Q)$ -stable.

iii. Pour $1 \leq i \leq s$, le quaterne Q_{F_i} est irréductible, et équivalent au quaterne Q^{r_i} , où r_i est la dimension de F_i .

Tournez la page S.V.P.

3. Soit $Q = (u, v, w, E)$ un quaterne. On considère deux décompositions :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_s = F'_1 \oplus F'_2 \oplus \dots \oplus F'_t$$

où $F_1, \dots, F_s, F'_1, \dots, F'_t$ sont des sous-espaces vectoriels non nuls et $\mathcal{F}(Q)$ -stables de E , les quaternes $Q_{F_1}, \dots, Q_{F_s}, Q_{F'_1}, \dots, Q_{F'_t}$, étant irréductibles.

Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$, on note U_i le sous-espace propre de u pour la valeur propre i .

a. Prouver que la dimension de U_0 (resp. U_1) est égale au nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension impaire (resp. paire).

En déduire que $s = t$.

b. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, soit n_k le nombre d'indices i tels que F_i soit de dimension k . Établir la formule :

$$n_k = \dim U_{k-1} - \dim U_{k+1}.$$

En déduire qu'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, s\}$ telle que, pour $1 \leq i \leq s$, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{F'_{\sigma(i)}}$ soient équivalents.

PARTIE IV

Dans toute cette partie, $Q = (u, v, w, E)$ est un quaterne. On désigne par F_1, \dots, F_s des sous-espaces vectoriels non nuls de E , $\mathcal{F}(Q)$ -stables, vérifiant $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_s$, et tels que les quaternes Q_{F_i} , $1 \leq i \leq s$, soient irréductibles.

On note \mathcal{B} la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ constituée des endomorphismes θ de E qui vérifient :

$$[u, \theta] = [v, \theta] = [w, \theta] = 0.$$

1. Montrer que si Q est irréductible, on a $\mathcal{B} = \mathbb{R} \text{id}_E$.

2. Soient θ un élément de \mathcal{B} , et i un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$.

Prouver que $\theta(F_i)$ est un sous-espace vectoriel $\mathcal{F}(Q)$ -stable de E . Montrer que si $\theta(F_i)$ est non nul, les quaternes Q_{F_i} et $Q_{\theta(F_i)}$ sont équivalents.

3. On définit un endomorphisme Δ de E par la formule :

$$\Delta = u^2 + 2vw + 2wv.$$

a. Soient j un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$, et x un vecteur de F_j . Prouver que l'on a :

$$\Delta(x) = ((\dim F_j)^2 - 1)x.$$

En déduire que Δ est un élément de \mathcal{B} .

b. On suppose dans cette question que les dimensions des F_i , $1 \leq i \leq s$, sont deux à deux distinctes.

Soient θ un élément de \mathcal{B} , et i un entier appartenant à $\{1, 2, \dots, s\}$. Montrer que $\theta(F_i) \subset F_i$. En déduire que l'espace vectoriel \mathcal{B} est de dimension s .

4. Donner un exemple où \mathcal{B} n'est ni de dimension 1, ni de dimension s .

FIN