CCP 2010. Option MP. Mathématiques 1.

Corrigé pour serveur UPS par JL. Lamard (jean-louis.lamard@prepas.org)

EXERCICE 1

1. $\varphi(x) \underset{\text{DEF}}{=} f(x,0) = \dfrac{0}{x^2} = 0$ si $x \neq 0$ et $\varphi(0) = f(0,0) = 0$ donc φ est identiquement nulle donc dérivable en 0 de nombre dérivé 0 donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe et vaut 0.

De même $\psi(y) \underset{\text{DEF}}{=} f(0,y) = y^2$ si $y \neq 0$ et $\psi(0) = 0$ donc $\psi(y) = y^2$ pour tout y donc ψ est dérivable en 0 de nombre dérivé 0 donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existe également et vaut 0. $\square$

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ il vient en passant en coordonnées polaires $f(x,y) = r^2\sin^4(\theta)$ donc $f(x,y) = O(r^2) = O(\|(x,y)\|_2^2)$ ce qui est encore vrai en $(0,0)$ puisque $f(0,0) = 0$. Ainsi f admet un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$ c'est à dire est différentiable en $(0,0)$. $\square$

EXERCICE 2

1. Toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A. $\square$

2. Soit (y_n) une suite d'éléments de $f(A)$ et soit x_n un élément de A tel que $f(x_n) = y_n$. Comme A est compacte, il existe une suite $(\widetilde{x_n})$ avec $\widetilde{x_n} = x_{\varphi(n)}$ (et φ une fonction d'extraction) qui converge vers un élément $a \in A$.
Alors $(\widetilde{y_n}) \underset{\text{DEF}}{=} (y_{\varphi(n)})$ converge vers $f(a) \in f(A)$ car $\widetilde{y_n} = f(x_{\varphi(n)}) = f(\widetilde{x_n})$ et f est continue en $a \in A$. $\square$

Il suffit de considérer l'appliaction identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ et l'image réciproque de $\{0\}$. $\square$

PROBLÈME : PHÉNOMÈNE DE GIBBS

Partie préliminaire

1.a) $g : t \longmapsto \dfrac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité sur $[0,\pi]$ en posant $g(0) = 1$ donc est intégrable sur $]0,1]$ $\square$

1.b) Pour $t \neq 0$ on a $g(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n}$ et ce développement est encore vrai en 0. Ce qui prouve que g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et le théorème d'intégration terme à terme sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence montre que $I = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ avec $u_n = \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1).(2n+1)!}$ $\square$

2.a) La série $\sum \dfrac{\pi^n}{n!}$ converge par D'Alembert donc son terme général tend vers 0. $\square$

En posant $a_n = \dfrac{\pi^n}{n.n!}$, il vient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n\pi}{(n+1)^2} < \dfrac{\pi}{n+1} < 1$ pour $n \geqslant 3$ et on vérifie directement que c'est encore vrai pour $n = 1$ et $n = 2$. Ainsi la suite (a_n) est bien décroissante. $\square$

2.b) En tant que suite extraite de la suite (a_n) la suite (u_n) est décroissante et converge naturellement vers 0 puisque la série $\sum(-1)^n u_n$ converge. Ainsi cette dernière série relève du théorème spécial et donc $|R_n| \leqslant u_{n+1}$ $\square$

Donc $\dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$ est une valeur approchée de $\dfrac{2}{\pi} I$ dès que $\dfrac{2}{\pi} u_{n+1} < 10^{-2}$.

La calculatrice montre que $\dfrac{2}{\pi} u_4 \simeq 0.0058\ldots \leqslant 0.006$.

Or $S_3 = \dfrac{2}{\pi} \sum\limits_{k=0}^{3} (-1)^k u_k \simeq \overline{S_3} = 1.178$ et on peut raisonnablement considérer que $|S_3 - \overline{S_3}| \leqslant 10^{-3}$.

Ainsi $|\dfrac{2}{\pi} I - \overline{S_3}| \leqslant 0.006 + 0.001 = 0.007$ et donc $1.171 \leqslant \dfrac{2}{\pi} I \leqslant 1.185$ $\square$

Première partie : Phénomène de Gibbs

3. La fonction f est continue par morceaux et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et vérifie $f(x) = \dfrac{1}{2}\Big(f^+(x) + f^-(x)\Big)$ en tout point de discontinuité c'est à dire en $k\pi$.

Elle est donc développable en série de Fourier.

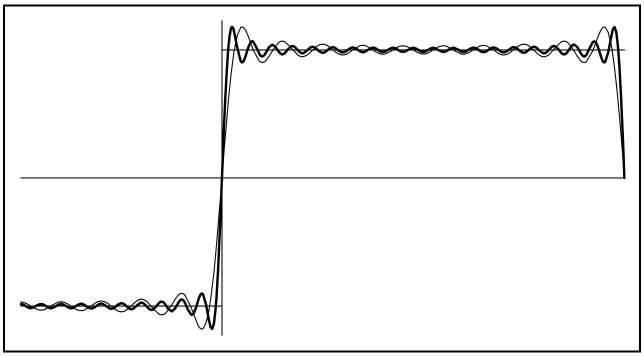
Comme en outre elle est impaire on a $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_n \sin(nt)$ pour tout réel t avec :

$b_n = 2 < \sin(nt) | f(t) >= \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nt) f(t)\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(nt)\,\mathrm{d}\,t.$

Donc $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \dfrac{4}{(2n+1)\pi}$ de sorte que $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\square$

La convergence n'est évidemment pas uniforme sur $\mathbb{R}$ sinon f serait continue sur $\mathbb{R}$ (par théorème de récupération uniforme de la continuité) ce qui n'est pas. $\square$

4.



En trait fin est figuré le graphe de S_{10} et en gras celui de S_{20}.
Au voisinage de 0 (et de π) on constate de fortes oscillations ce qui est en accord avec le fait que la convergence n'est pas uniforme.

5.a) Pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ (de sorte que $e^{2it} \neq 1$) il vient :

$$T_n(t) = \mathrm{Im}\left(e^{it}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2it}\right)^k\right) = \mathrm{Im}\left(e^{it}\frac{1-e^{2int}}{1-e^{2it}}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{e^{i(n+1)t}\times -2i\sin(nt)}{e^{it}\times -2i\sin t}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{\sin(nt)}{\sin t}e^{int}\right) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin t} \quad \square$$

5.b) $0 \leqslant T_n(t) \leqslant M \underset{\text{DEF}}{=} \dfrac{1}{\sin a}$ pour $t \in [a,b] \subset]0, \dfrac{\pi}{2}[$ $\square$

5.c) On effectue la transformation dite d'Abel :

$$S_{n+p}(t) - S_n(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_{k+1}(t)-T_k(t)}{2k+1} = \frac{4}{\pi}\left(\sum_{k=n+2}^{n+p+1}\frac{T_k(t)}{2k-1} - \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{T_k(t)}{2k+1}\right)$$
$$= \frac{4}{\pi}\left(\frac{T_{n+p+1}(t)}{2(n+p)+1} - \frac{T_{n+1}(t)}{2n+3} + \sum_{k=n+2}^{n+p}T_k(t)\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)\right)$$

Donc pour $t \in [a,b]$ il vient compte tenu de la question précédente du fait que la suite $\left(\dfrac{1}{2k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ décroît :

$$|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leqslant \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2(n+p)+1} + \frac{1}{2n+3} + \sum_{k=n+2}^{n+p}\Big(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\Big)\right)$$
$$= \frac{4M}{\pi}\left(\frac{1}{2(n+p)+1} + \frac{1}{2n+3} + \Big(\frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2(n+p)+1}\Big)\right) = \frac{8M}{(2n+3)\pi} \underset{\text{DEF}}{=} \omega_n$$

Ainsi $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leqslant \omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [a,b]$

En fixant dans l'inégalité ci-dessus n et t et en faisant tendre p vers $+\infty$, il vient (compte tenu de la convergence simple de la suite (S_k) vers f) : $|f(t) - S_n(t)| \leqslant \omega_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [a,b]$ $\square$

Ce qui prouve que la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur $[a,b]$ donc localement normalement sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$. $\square$

6.a) $\dfrac{\pi}{4}S_n'(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\cos(2k+1)t = \dfrac{\sin(nt)\cos(nt)}{\sin t}$ pour $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$ d'après le calcul de la question 5.a) (partie réelle au lieu de partie imaginaire). Ainsi $S_n'(t) = \dfrac{2\sin(2nt)}{\pi\sin t}$ pour $t \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$ $\square$

Il en découle que $\alpha_n = \dfrac{\pi}{2n}$ $\square$

6.b) La fonction S_n étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ on a $S_n(x) = S_n(x) - S_n(0) = \displaystyle\int_0^x S_n'(t)\,\mathrm{d}\,t = \int_{]0,x]} S_n'(t)\,\mathrm{d}\,t$ donc

$S_n(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{]0,x]}\dfrac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^x \dfrac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}\,t$ pour $x \in]0, \dfrac{\pi}{2}]$, résultat naturellement encore vrai si $x = 0$. $\square$

Donc $S_n(\alpha_n) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2n}\dfrac{\sin(2nt)}{\sin t}\,dt = \dfrac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{\sin u}{\sin(u/2n)}\,\mathrm{d}\,u$ par le changement admissible $u = 2nt$. $\square$

6.c) Soit la suite (g_n) définie sur $J =]0, \pi[$ par $g_n(u) = \dfrac{\sin u}{n\pi\sin(u/2n)}$. Il s'agit d'une suite de fonctions continues qui converge simplement sur J vers la fonction continue $\dfrac{2}{\pi}g$ avec $g(u) = \dfrac{\sin u}{u}$.

En outre en vertu de l'inégalité (évidente géométriquement) rappelée par l'énoncé, il vient $|g_n(u)| = g_n(u) \leqslant \dfrac{2}{\pi} g(u)$ pour tout $u \in J$.
Cette fonction dominatrice etant intégrable sur J d'après la question 1), on en déduit, par le théorème de la convergence dominée, que $S_n(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}\,u = \frac{2}{\pi} I$ □

7. Notons $\Delta_n = \sup\limits_{x\in]0,\pi/2[} |S_n(x) - f(x)|$. On a en particulier $\Delta_n \geqslant |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| = |S_n(\alpha_n) - 1|$.
Or $|S_n(\alpha_n) - 1|$ tend vers $\dfrac{2}{\pi} I - 1 \simeq 0.18 > 0$ donc (Δ_n) ne tend pas vers 0 . □

Remarque : ce n'est pas un scoop et il n'était nul besoin de faire tous ces calculs pour arriver à cette conclusion. En effet, comme $S_n(0) = f(0) = 0$ et que S_n et f sont continues en $\dfrac{\pi}{2}$, on a $\Delta_n = \sup\limits_{x\in[0,\pi/2]} |S_n(x) - f(x)|$.

Or on sait depuis le début (par négation du théorème de récupération uniforme de continuité) que la convergence n'est pas uniforme sur $[0, \dfrac{\pi}{2}]$!

Seconde partie : démonstration du théorème de convergence normale.

8. Si f est continue par morceaux alors $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 \underset{\text{DEF}}{=} \sum_{-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$

Il en découle que si tous les coefficients de Fourier de f sont nuls alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\mathrm{d}\,t = 0$ donc que si f est en outre continue alors f est identiquement nulle par le théorème de positivité stricte.
Ce dernier résultat tombant en défaut si f set simplement continue par morceaux comme on le voit par exemple en considérant la fonction f partout nulle sauf en les multiples de 2π où elle prend la valeur 1. □

9.a) Notons pour $k \in \mathbb{N}^*$: $u_k(f)(t) = c_{-k}(f)e^{-ikt} + c_k(f)e^{ikt}$ et $u_0(f)(t) = c_0(f)$.
Alors $u_k(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, comme la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k(f)(t)$ converge uniformément vers g, le théorème de récupération uniforme de la continuité prouve que g est continue sur $\mathbb{R}$. □

On a pour n fixé dans $\mathbb{Z}$: $2\pi c_n(g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_n(f)(t)e^{-int}\right)\mathrm{d}\,t \quad (1).$

Or la série $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_n(f)(t)e^{-int}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $g(t)e^{-int}$ puisque
$\left|g(t)e^{-int} - \sum\limits_{k=0}^{N} u_n(f)(t)e^{-int}\right| = \left|g(t) - \sum\limits_{k=0}^{N} u_n(f)(t)\right|$ qui converge uniformément vers 0 par hypothèse.

On peut donc intégrer terme à terme dans (1) et comme, pour $p \in \mathbb{Z}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{ipt}e^{-int}\,\mathrm{d}\,t$ vaut 0 si $p \neq n$ et 2π si $p = n$, il vient $c_n(g) = c_n(f)$ □

9.b) Ainsi $f - g$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et $c_n(f - g) = c_n(f) - c_n(g) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ donc $f = g$ d'après la question 8. □

10.a) Une intégration par partie (bien licite puisque f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux) montre immédiatement que $c_n(f) = \dfrac{-i}{n} c_n(f')$ □

10.b) Résulte immédiatement de la question précédente, de l'inégalité $|u_n(f)(t) \leqslant |c_{-n}(f)| + |c_n(f)|$ pour tout réel t et de l'inégalité $2ab \leqslant a^2 + b^2$ pour $(a, b) \in \mathbb{R}$. □

10.c) Comme f' est continue par morceaux, d'après le théorème de Parseval la série $\sum \Big(|c_{-n}(f')|^2 + |c_n(f)|^2\Big)$ converge donc la série $\sum u_n(f)(t)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Notons $g(t)$ sa somme. D'après la question 9.b) on a $g = f$ (car la convergence normale assure la convergence uniforme). □

10.d) On vient de démontrer (moyennant le théorème de convergence quadratique de Parseval) que la série de Fourier d'une fonction f périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f □

Naturellement pas de phénomène de Gibbs pour une telle fonction ! □

FIN