UN CORRIGÉ du SUJET X-ENS 2022, MATH PSI

0. (Préliminaires). Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}^d$, si a et b sont deux points de A, alors les parties $A - a$ et $A - b$ engendrent le même sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^d$.

En effet, si $x \in \mathrm{Vect}(A - a)$, alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$, des réels $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, et des éléments $x_1, \cdots, x_k$ de A tels que $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i - a)$. On peut alors écrire

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i (x_i - b) - \Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \Big) (a - b) ,$$

ce qui prouve que $x \in \mathrm{Vect}(A - b)$. L'inclusion inverse se prouve de la même façon, on a donc $\mathrm{Vect}(A - a) = \mathrm{Vect}(A - b)$ et je noterai par la suite V_A ce s.e.v. de $\mathbb{R}^d$, on pose alors $\dim(A) = \dim(V_A)$.

La partie A est alors incluse dans le sous-espace affine $a + V_A$, où a est un point quelconque de A, et elle n'est incluse dans aucun sous-espace affine de dimension strictement inférieure.

Remarque. Aucune notion affine ne figure au programme de la filière PCSI-PSI, alors que le thème abordé dans ce sujet me semble indissociable de ces notions. Je n'ai donc pas hésité à faire appel au vocabulaire de la géométrie affine dans ce corrigé déjà très long, et qui l'aurait été encore plus si j'avais dû faire de longues périphrases à chaque question où intervenait naturellement un sous-espace affine.

J'ajouterai que ce sujet très académique, ressemblant à un cours de préparation à l'agrégation (avec un certain nombre de maladresses, qui plus est), me semble totalement délirant pour la filière PSI, même au niveau X-ENS!

Partie I. Projection et séparation

Projection

1. • Soit $m = d(x, C)^2 = \inf_{y \in C} \|x - y\|^2$. L'application $\begin{cases} f : & \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \\ & y \mapsto \|x - y\|^2 \end{cases}$ est continue, donc elle admet un minimum μ sur la partie fermée bornée non vide $K = C \cap \overline{B}(x, \sqrt{m+1})$. *En effet, f est continue comme composée de $y \mapsto \|x - y\|$ qui est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}^d$ et de $t \mapsto t^2$ qui est continue sur $\mathbb{R}$. Et K est fermé comme intersection de deux fermés.* Comme $f > m + 1$ sur $C \setminus K$ et que, par définition d'une borne inférieure, il existe $y \in C$ tel que $f(y) \leq m + 1$, on a donc $m = \inf_{y \in K} f(y) = \mu$, d'où l'existence d'au moins un $y_1 \in C$ tel que $\|x - y_1\|^2 = m$.

• Si on a aussi $f(y_2) = m$ avec $y_2 \in C$, alors $y = \frac{y_1 + y_2}{2} \in C$ car C est convexe, et

$$\|x - y\| = \Big\| x - \frac{y_1 + y_2}{2} \Big\| = \frac{1}{2} \big\| (x - y_1) + (x - y_2) \big\| \leq \frac{1}{2} \big(\|x - y_1\| + \|x - y_2\| \big) = \sqrt{m} = d(x, C) ,$$

et cette "inégalité triangulaire" est une égalité puisqu'on ne peut avoir $\|x - y\| < d(x, C)$, ce qui n'est possible que si les vecteurs $x - y_1$ et $x - y_2$ sont positivement liés, ce qui entraîne leur égalité puisqu'ils sont de même norme $\sqrt{m}$, et par la suite $y_2 = y_1$.

Il y a donc existence et unicité du point $y_0 \in C$ tel que $\|x - y_0\|^2 = \min_{y \in C} \|x - y\|^2 = d(x, C)^2$, on pose alors $\mathrm{proj}_C(x) = y_0$.

• Si $x \in C$, il est clair que $\min_{y \in C} \|x - y\|^2 = 0 = \|x - x\|^2$ donc $\mathrm{proj}_C(x) = x$.

Inversement, si $x = \mathrm{proj}_C(x)$, par définition de ce projeté sur C, on a bien $x \in C$.

2. • Si $y = \mathrm{proj}_C(x)$, alors clairement $y \in C$. Si on se donne $z \in C$, alors $u_t := (1 - t)y + tz \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$ car C est convexe, donc $\|u_t - x\|^2 \geq \|y - x\|^2 = d(x, C)^2$. Ainsi

$$\forall t \in [0, 1] \qquad \big\| (1 - t)(y - x) + t(z - x) \big\|^2 \geq \|y - x\|^2 .$$

En développant,

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t) := t(t-2)\,\|y-x\|^2 + 2t(1-t)\,(y-x)\cdot(z-x) + t^2\,\|z-x\|^2 \geq 0\ .$$

Cette fonction f (c'est un trinôme) est dérivable sur $\mathbb{R}$, nulle en 0, positive sur $[0,1]$, ce qui entraîne $f'(0) \geq 0$, soit (c'est aussi le coefficient de t dans le développement du trinôme):

$$-2\,\|y-x\|^2 + 2\,(y-x)\cdot(z-x) \geq 0\ ,$$

ce que l'on factorise en

$$2\,(y-x)\cdot\big((z-x)-(y-x)\big) \geq 0\ , \quad \text{ou encore} \quad (x-y)\cdot(z-y) \leq 0\ ,$$

et cela prouve l'implication dans le sens direct.

• Si $y \in C$ vérifie $\forall z \in C \quad (x-y)\cdot(z-y) \geq 0$, alors pour tout $z \in C$, on a

$$\|x-z\|^2 = \big\|(x-y)+(y-z)\big\|^2 = \|x-y\|^2 + 2\,(x-y)\cdot(y-z) + \|y-z\|^2 \geq \|x-y\|^2$$

puisque les deux derniers termes sont positifs. Donc $\|x-y\|^2 = d(x,C)^2$ et on a bien $y = \mathrm{proj}_C(x)$.

3. • Posons $y_1 = \mathrm{proj}_C(x_1)$ et $y_2 = \mathrm{proj}_C(x_2)$, alors

$$\begin{aligned}(y_1-y_2)\cdot(x_1-x_2) - \|y_1-y_2\|^2 &= (y_1-y_2)\cdot\big((x_1-x_2)-(y_1-y_2)\big)\\ &= (y_1-y_2)\cdot\big((x_1-y_1)-(x_2-y_2)\big)\\ &= -\big[(x_2-y_2)\cdot(y_1-y_2) + (x_1-y_1)\cdot(y_2-y_1)\big]\\ &\geq 0\end{aligned}$$

car les deux termes dans le crochet sont négatifs en vertu de la question **2.** ci-dessus, le premier car $y_2 = \mathrm{proj}_C(x_2)$ et $y_1 \in C$, le second pour la même raison en intervertissant les indices. On a donc prouvé que

$$\big(\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\big)\cdot(x_1-x_2) \geq \big\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\big\|^2\ .$$

• De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit alors que

$$\forall (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2 \qquad \big\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\big\|^2 \leq \big\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\big\|\,\|x_1-x_2\|\ .$$

En séparant les cas $\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2) = 0$ ou $\neq 0$, on obtient

$$\forall (x_1,x_2) \in (\mathbb{R}^d)^2 \qquad \big\|\mathrm{proj}_C(x_1) - \mathrm{proj}_C(x_2)\big\| \leq \|x_1-x_2\|\ .$$

L'application $\mathrm{proj}_C : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est alors 1-lipschitzienne, donc continue.

4. Je ne justifierai pas à chaque fois que les ensembles C considérés sont des convexes fermés non vides de $\mathbb{R}^d$, c'est assez immédiat.

i. Pour $C = \mathbb{R}_+^d$ (orthant fermé), si $x = (x_1,\cdots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, posons $y = (x_1^+,\cdots,x_d^+)$ avec $x_i^+ = \max\{0,x_i\}$ pour tout i. Alors $y \in C$ et, pour tout $z = (z_1,\cdots,z_d) \in C$, on a

$$(x-y)\cdot(z-y) = \sum_{i=1}^d (x_i - x_i^+)(z_i - x_i^+) = \sum_{i\in J} x_i z_i \leq 0$$

en posant $J = \{i \in [\![1,d]\!] \mid x_i < 0\}$. Donc $y = \mathrm{proj}_C(x)$ d'après **2.**

ii. Pour $C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y\| \leq 1\}$ (boule unité fermée), posons $y = \begin{cases} x & \text{si } \|x\| \leq 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } \|x\| > 1 \end{cases}$.

• Dans le cas $\|x\| \leq 1$ (i.e. $x \in C$), il est clair que $y = x = \mathrm{proj}_C(x)$.

• Dans le cas $\|x\| > 1$, on a $\|y\| = 1$ donc $y \in C$. Si on prend $z \in C$, i.e. $\|z\| \leq 1$, alors

$$y \cdot (z - y) = y \cdot z - \|y\|^2 = y \cdot z - 1 \leq 1 \times \|z\| - 1 \leq 0$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Puis $x = \|x\|\, y$, donc

$$(x - y) \cdot (z - y) = \big(\|x\| - 1\big)\, y \cdot (z - y) \leq 0\ .$$

De nouveau grâce à **Q2.**, on conclut que $y = \mathrm{proj}_C(x)$. *Faire un dessin!*

iii. Pour $C = \left\{y \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=1}^{d} y_i \leq 1\right\}$ (demi-espace fermé), alors $C = \{y \in \mathbb{R}^d \mid u \cdot y \leq 1\}$ avec $u = (1, \cdots, 1) \in \mathbb{R}^d$.

• Si $x \in C$, il est clair que $\mathrm{proj}_C(x) = x$.

• Si $x \notin C$, soit y le projeté orthogonal de x sur l'hyperplan affine $\mathcal{H} = \{y \in \mathbb{R}^d \,|\, u \cdot y = 1\}$. *Bien sûr ces notions ne sont pas au programme PSI, mais elles permettent d'illustrer l'idée de la construction.* On cherche un "point" $y \in \mathbb{R}^d$ tel que $\begin{cases} (\mathbf{1}) : \ y \in \mathcal{H} & \text{i.e.} \quad u \cdot y = 1 \\ (\mathbf{2}) : \ \exists \lambda \in \mathbb{R} & y - x = \lambda u \end{cases}$.

Ces deux conditions entraînent $\lambda = \dfrac{1}{d}\,(1 - u \cdot x)$, donc $y = x + \dfrac{1 - u \cdot x}{d}\, u$ est la seule solution de ce système. On a bien $y \in C$. Notons par ailleurs que $\lambda < 0$ puisque $u \cdot x > 1$, donc si $z \in C$, i.e. si $u \cdot z \leq 1$, alors

$$(x - y) \cdot (z - y) = -\lambda\, u \cdot (z - y) = -\lambda\, (u \cdot z - u \cdot y) = -\lambda\, (u \cdot z - 1) \leq 0\ ,$$

ce qui permet d'affirmer que $y = \mathrm{proj}_C(x)$ toujours d'après la question **2.**

iv. Pour $C = [-1, 1]^d$ (hypercube plein), introduisons la fonction $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq -1 \\ x & \text{si} \ -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}.$$

Si $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, soit $y = \big(f(x_1), \cdots, f(x_d)\big)$, montrons que $\mathrm{proj}_C(x) = y$.

Clairement $y \in C$ et, si $z = (z_1, \cdots, z_d) \in C$, i.e. si $-1 \leq z_i \leq 1$ pour tout i, alors

$$(x - y) \cdot (z - y) = \sum_{i=1}^{d} \big(x_i - f(x_i)\big)\,\big(z_i - f(x_i)\big)$$

et tous les termes de cette somme sont négatifs. En effet,

- si $x_i \in [-1, 1]$, alors $f(x_i) = x_i$ et le terme d'indice i est nul ;
- si $x_i < -1$, alors $f(x_i) = -1$ puis $x_i - f(x_i) < 0$ et $z_i - f(x_i) = z_i + 1 \geq 0$;
- si $x_i > 1$, alors $f(x_i) = 1$ puis $x_i - f(x_i) > 0$ et $z_i - f(x_i) = z_i - 1 \leq 0$.

On a donc $(x - y) \cdot (z - y) \leq 0$ pour tout $z \in C$. De nouveau, on déduit que $y = \mathrm{proj}_C(x)$.

Séparation

5. On a $D - C = \big\{y - x\ ;\ (x,y) \in C \times D\big\}$.

De $C\ \cap\ D = \emptyset$, on déduit que $0 \notin D - C$.

Soient $z = y - x \in D - C$, $z' = y' - x' \in D - C$ avec $(x,y) \in C \times D$ et $(x',y') \in C \times D$, soit $\lambda \in [0,1]$, alors

$$\lambda z + (1-\lambda)z' = \lambda(y-x) + (1-\lambda)(y'-x') = \big(\lambda y + (1-\lambda)y'\big) - \big(\lambda x + (1-\lambda)x'\big) \in D - C$$

puisque C et D sont convexes.

Soit (z_n) une suite convergente d'éléments de $D-C$, avec $z_n = y_n - x_n$ où $x_n \in C$ et $y_n \in D$ pour tout n. Soit $z = \lim\limits_{n\to+\infty} z_n$. La suite (x_n) est bornée, donc possède une extraction convergente, i.e. il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{\varphi(n)} = x$. Comme C est fermé, $x \in C$. Puis $y_{\varphi(n)} = z_{\varphi(n)} + x_{\varphi(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} z + x$. Comme D est fermé, $z + x \in D$. Finalement, $z = (z+x) - x \in D - C$. L'ensemble $D - C$ est donc fermé dans $\mathbb{R}^d$.

6. Comme $D - C$ est une partie non vide, convexe et fermée de $\mathbb{R}^d$, on peut introduire $p = \mathrm{proj}_{D-C}(0)$. Alors $p \neq 0$ puisque $0 \notin D - C$ et, d'après **Q2.**,

$$\forall z \in D - C \qquad (0-p)\cdot(z-p) \leq 0\ , \quad \text{i.e.} \quad p \cdot z \geq \|p\|^2\ .$$

Posons alors $\varepsilon = \|p\|^2 > 0$, on a donc

$$\forall (x,y) \in C \times D \qquad p\cdot y - p \cdot x \geq \varepsilon\ , \quad \text{i.e.} \quad p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon\ .$$

7. Soit C un convexe fermé non vide, posons $C' = \big\{y \in \mathbb{R}^d \mid \forall p \in \mathbb{R}^d\ \ p\cdot y \leq \sigma_C(p)\big\}$.

L'inclusion $C \subset C'$ est immédiate.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $x \notin C$, alors $\{x\}$ est un convexe fermé non vide et borné, disjoint de C qui est un convexe fermé non vide, on peut donc le séparer strictement de C, i.e. il existe $p \in \mathbb{R}^d$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\forall y \in C\quad p \cdot x \leq p \cdot y - \varepsilon$. On a donc $(-p)\cdot y \leq (-p)\cdot x - \varepsilon$ pour tout $y \in C$, donc

$$\sigma_C(-p) = \sup_{y\in C}\big((-p)\cdot y\big) \leq (-p)\cdot x - \varepsilon < (-p)\cdot x\ ,$$

donc $x \notin C'$. Ceci montre l'autre inclusion $C' \subset C$.

Remarque. On peut "zapper" une partie des questions précédentes pour arriver ici à nos fins, par exemple il n'est pas vraiment utile de parler d'extraction d'une suite à valeurs dans le singleton $\{x\}$... Il suffit de dire que, si $x \notin C$, alors $y = \mathrm{proj}_C(x) \neq x$ et, en choisissant $p = x - y$, on montre facilement à l'aide de **Q2.** que $\sigma_C(p) = p\cdot y$. En effet, pour tout $z \in C$, on a

$$(x-y)\cdot(z-y) \leq 0\ , \quad \text{i.e.} \quad p\cdot(z-y) \leq 0\ , \quad \text{i.e.} \quad p\cdot z \leq p \cdot y\ .$$

On en déduit que $p \cdot y = \max\limits_{z\in C}\,(p\cdot z) = \sigma_C(p)$. Puis

$$p\cdot x - p\cdot y = p\cdot(x-y) = \|p\|^2 > 0$$

donc $p \cdot x > \sigma_C(p)$, et donc $x \notin C'$.

8. *Soit j'ai loupé quelque chose de "simple", soit cette question me semble totalement hors de portée d'un étudiant de PSI, même pour le concours X-ENS!*

Lemme 1. (*facile*) **Si A est un convexe non vide, alors son adhérence $C = \overline{A}$ est un convexe non vide et fermé.**

Preuve. Si $x \in \overline{A}$, $y \in \overline{A}$ et $\lambda \in [0,1]$, alors il existe des suites (x_n) et (y_n) d'éléments de A convergeant vers x et y respectivement, donc $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda x + (1-\lambda)y$ et, comme A est convexe, on a $\lambda x_n + (1-\lambda)y_n \in A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\lambda x + (1-\lambda)y \in \overline{A}$, ce qui prouve la convexité de $\overline{A}$.

Pour montrer que $\overline{A}$ est fermé (il n'est pas clairement écrit dans les programmes que ceci soit censé être connu), montrons que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$. L'inclusion indirecte est immédiate puisque $A \subset \overline{A}$. Pour l'autre inclusion, si $x \in \overline{\overline{A}}$ et $r > 0$, alors il existe $y \in \overline{A} \cap B\Big(x, \dfrac{r}{2}\Big)$, puis comme y est adhérent à A, il existe $z \in A \cap B\Big(y, \dfrac{r}{2}\Big)$. Par l'inégalité triangulaire, $z \in B(x,r)$, donc $A \cap B(x,r) \neq \emptyset$. Toute boule centrée en x rencontre A, donc $x \in \overline{A}$.

Lemme 2. Si A est un convexe non vide de $\mathbb{R}^d$, alors $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Preuve. Je renvoie le lecteur à l'annexe 1 en fin de ce document, s'inspirant d'idées trouvées sur Wikipédia...

Soit alors $x \in \mathbb{R}^d \setminus A$. Deux cas se présentent:

- si $x \notin C = \overline{A}$, alors (*c'est presque la remarque à la fin du corrigé de la question précédente*), soit $y = \mathrm{proj}_C(x)$, alors $y \in C$ et $y \neq x$. En posant $p = y - x$, on a par **Q2.**,

$$\forall z \in C \qquad p\cdot z - p\cdot y = (y-x)\cdot(z-y) = -(x-y)\cdot(z-y) \geq 0 \ , \quad \text{donc} \quad p\cdot z \geq p\cdot y \ .$$

Puis $p\cdot y - p\cdot x = \|p\|^2 > 0$ donc $p\cdot y > p\cdot x$, et par transitivité $p\cdot z \geq p\cdot x$ pour tout $z \in C$, donc a fortiori pour tout $z \in A$.

- si $x \in C = \overline{A}$, alors il existe une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus C$ qui converge vers x. En effet, comme $x \notin A$, alors a fortiori $x \notin \overset{\circ}{A}$, donc par le **lemme 2**, $x \notin \overset{\circ}{\overline{A}}$, donc

$$x \in \mathbb{R}^d \setminus \overset{\circ}{\overline{A}} = \overline{\mathbb{R}^d \setminus \overline{A}} = \overline{\mathbb{R}^d \setminus C} \ .$$

Alors pour tout n, on peut trouver $p_n \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $p_n \cdot x_n \leq p_n \cdot y$ pour tout $y \in A$. On peut supposer les vecteurs p_n unitaires quitte à remplacer p_n par $\dfrac{p_n}{\|p_n\|}$. La suite (p_n) étant maintenant bornée, il en existe une sous-suite convergente $(p_{\varphi(n)})$ de limite p (vecteur unitaire lui aussi). Si on se donne $y \in A$, on a alors $p_{\varphi(n)} \cdot x_{\varphi(n)} \leq p_{\varphi(n)} \cdot y$ pour tout n et, en passant à la limite, on obtient $p\cdot x \leq p\cdot y$, ce qu'il fallait démontrer.

8 bis. Je ne comprends pas bien les choix faits dans cette question **8.** En effet, pour traiter la suite du sujet, il aurait suffi de la remplacer par la question suivante, moins difficile: "**Montrer que, si C est un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^d$ et si $x \in \mathbb{R}^d$ appartient à la frontière de C, alors il existe un hyperplan d'appui passant par x, i.e. il existe $p \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que** $\forall y \in C \quad p\cdot x \leq p\cdot y$**.**" Cela se traite avec les mêmes méthodes, sans avoir besoin des lemmes 1 et 2.

Partie II. Points extrémaux

Cas particuliers

9.a. Par récurrence sur l'entier I: c'est évident pour $I = 1$, c'est la définition d'un convexe pour $I = 2$ et, si c'est vrai pour un $I \geq 2$, si $x = \sum_{i=1}^{I+1} \lambda_i x_i$ avec les λ_i positifs de somme 1 et les x_i dans A, alors:

- si $\lambda_{I+1} = 1$ (et les autres λ_i nuls), alors $x \in A$ est évident ;
- sinon, $y = \dfrac{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_I x_I}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_I} \in A$ par l'hypothèse de récurrence, puis

$$x = (\lambda_1 + \cdots + \lambda_I)\, y + \lambda_{I+1} x_{I+1} \in A$$

puisque $\lambda_1 + \cdots + \lambda_I$ et λ_{I+1} sont positifs de somme 1.

b. Si $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i \in \mathrm{Ext}(A)$, si $i \in [\![1, I]\!]$ est tel que $\lambda_i > 0$, alors:

- si $\lambda_i = 1$, les autres λ_j sont nuls et $x = x_i$;
- sinon, posons $y = \dfrac{\sum_{j \neq i} \lambda_j x_j}{\sum_{j \neq i} \lambda_j}$, alors $y \in A$ d'après **a.**, et $x = \lambda_i x_i + \mu y$ en posant $\mu = \sum_{j \neq i} \lambda_j$, les réels λ_i et μ sont dans $]0, 1[$ et ont pour somme 1, donc par la définition d'un point extrémal, on a $x_i = y$, ce qui entraîne aussi $x_i = x$.

10. • L'inclusion $E \subset \mathrm{co}(E)$ est immédiate.

• Si x et y sont dans $\mathrm{co}(E)$, si $\alpha \in [0, 1]$, on écrit $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i$ et $y = \sum_{j=1}^{J} \mu_j y_j$ avec les x_i et les y_j dans E, les réels λ_i positifs de somme 1 et idem pour les μ_j, alors

$$\alpha x + (1 - \alpha) y = \sum_{i=1}^{I} \alpha \lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{J} (1 - \alpha) \mu_j y_j \in \mathrm{co}(E)$$

puisque les réels $\alpha\lambda_1, \cdots, \alpha\lambda_I, (1 - \alpha)\mu_1, \cdots, (1 - \alpha)\mu_J$ sont positifs de somme 1. Ceci prouve que l'ensemble $\mathrm{co}(E)$ est convexe.

• Si C est un convexe contenant E, il résulte de **9.a.** que tout élément de $\mathrm{co}(E)$ appartient à C.

On conclut donc que $\mathrm{co}(E)$ est le plus petit convexe contenant E.

• Soit $x \in \mathrm{Ext}\big(\mathrm{co}(E)\big)$. On a $x \in \mathrm{co}(E)$, donc $x = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i x_i$ avec les λ_i positifs de somme 1, et les x_i dans E donc a fortiori dans $\mathrm{co}(E)$. Il existe au moins un indice $i \in [\![1, I]\!]$ pour lequel $\lambda_i > 0$, on a alors $x = x_i$ d'après **9.b.**, donc $x \in E$. Ainsi, $\mathrm{Ext}\big(\mathrm{co}(E)\big) \subset E$.

Remarque 1. Si $E = \emptyset$, en convenant qu'alors $\mathrm{co}(E) = \emptyset$, tout ceci reste vrai.

Remarque 2. Cette inclusion est souvent stricte. Par exemple, si E est un carré plein de sommets A, B, C, D dans le plan, alors E est convexe donc $\mathrm{co}(E) = E$, puis $\mathrm{Ext}\big(\mathrm{co}(E)\big) = \{A, B, C, D\}$.

11. • Le point $(0, 0, 1)$ appartient à E, donc aussi à $A = \mathrm{co}(\mathrm{E})$ et c'est le seul point de A dont la cote est supérieure ou égale à 1, c'est donc un point extrémal de A, donc $\mathrm{Ext}(A) \neq \emptyset$.

• Les points $m_\theta = (1 + \cos\theta, \sin\theta, 0)$, avec $\theta \in]0, 2\pi[$, sont tous des points extrémaux de A, mais pas l'origine $(0, 0, 0)$ qui est pourtant la limite de m_θ lorsque $\theta \to 0$ puisque c'est le milieu du segment joignant $(0, 0, 1)$ et $(0, 0, -1)$, donc $\mathrm{Ext}(A)$ n'est pas fermé.

Remarque. L'ensemble E est la réunion du cercle $\mathcal{C}$ de centre $(1, 0, 0)$ et de rayon 1 dans le plan horizontal $x0y$, et des points $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$. Notons $\mathcal{D}$ le disque fermé du plan xOy délimité par le cercle $\mathcal{C}$. Alors $A = \mathrm{co}(E)$ est la réunion des segments $[M, N]$ et des segments $[M, S]$ avec M décrivant $\mathcal{D}$. Enfin,

$$\mathrm{Ext}(A) = \big\{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\big\} \ \cup \ \big\{(1 + \cos\theta, \sin\theta, 0) \ ; \ \theta \in \ [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}\big\} = E \setminus \big\{(0, 0, 0)\big\} \ .$$

Bien sûr, tout ceci mériterait peut-être d'être justifié, argumenté... et agrémenté d'un joli dessin en 3D.

12. • Les formes linéaires $x \mapsto p_i \cdot x$ étant continues sur $\mathbb{R}^d$, l'ensemble A est fermé car c'est une intersection de k fermés.

• Si $x \in A$ et $y \in A$, si $\lambda \in [0, 1]$, alors pour tout i, on a $b_i - p_i \cdot x \geq 0$ et $b_i - p_i \cdot y \geq 0$, donc

$$b_i - p_i \cdot \big(\lambda x + (1 - \lambda)y\big) = \lambda(b_i - p.x) + (1 - \lambda)(b_i - p_i \cdot y) \geq 0 \ ,$$

donc $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$. L'ensemble A est donc convexe.

▷ Pour la suite, notons x un élément de A, soit $F_x = \mathrm{Vect}\,\big((p_i)_{i \in I(x)}\big)$ et $r_x = \dim(F_x)$.

• Si x n'est pas extrémal, alors il existe $y \in A$ et $z \in A$ avec $y \neq z$ tels que $x = \dfrac{y + z}{2}$. On a donc $z - x = -(y - x)$ et $y \neq x$. Pour tout $i \in I(x)$, on a $p_i \cdot x = b_i$, $p_i \cdot y \leq b_i$ et $p_i \cdot z \leq b_i$. Donc $p_i \cdot (y - x) \leq 0$ et $p_i \cdot (z - x) = -p_i \cdot (y - x) \leq 0$, ce qui entraîne $p_i \cdot (y - x) = 0$. Le vecteur $y - x$ est non nul et appartient à $F_x^\perp$, donc $r_x = \dim(F_x) < d$.

• Si $r_x < d$, il existe un vecteur non nul u dans $F_x^\perp$. On va en déduire l'existence d'un réel $\delta > 0$ tel que $[x - \delta u, x + \delta u] \subset A$, ce qui montrera que x n'est pas extrémal dans A. En effet,

- si $i \in I(x)$, alors $p_i \cdot u = 0$ donc pour tout α réel, $p_i \cdot (x + \alpha u) = p_i \cdot x = b_i$;
- si $i \in [\![1, k]\!] \setminus I(x)$, on peut écrire $p_i \cdot x = b_i - \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i > 0$, donc si α est réel,

$$p_i \cdot (x + \alpha u) = b_i - \varepsilon_i + \alpha \, p_i \cdot u$$

et cette expression reste majorée par b_i pour $|\alpha|$ petit, disons pour $|\alpha| \leq \delta_i$ avec $\delta_i > 0$.

En prenant $\delta = \min\limits_{i \in [\![1,k]\!] \setminus I(x)} \delta_i$, on a trouvé un $\delta > 0$ tel que $[x - \delta u, x + \delta u] \subset A$.

Bilan. On a prouvé l'équivalence $x \notin \mathrm{Ext}(A) \iff r_x < d$, ce qui équivaut à l'équivalence demandée.

• L'application $I : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}(A) & \to & \mathcal{P}\big([\![1, k]\!]\big) \\ x & \mapsto & I(x) \end{array} \right.$ est injective. En effet, si J est une partie donnée de $[\![1, k]\!]$, si $x \in \mathrm{Ext}(A)$ vérifie $I(x) = J$, alors la famille de vecteurs $(p_i)_{i \in J}$ est de rang d, et on a $p_i \cdot x = b_i$ pour tout $i \in J$ ce qui veut dire que les coordonnées de x dans $\mathbb{R}^d$ sont solutions d'un système linéaire de $|J|$ équations à d inconnues, de rang d, et un tel système a au plus une solution. Donc J admet au plus un antécédent par l'application I. On en déduit que $\left|\mathrm{Ext}(A)\right| \leq \left|\mathcal{P}\big([\![1,k]\!]\big)\right| = 2^k$.

Cas d'un convexe fermé borné

13. Si $p = 0$, alors $K_0 = K$ et tout est évident.

Sinon, utilisons les notions de la question **7.** Comme l'application $x \mapsto p \cdot x$ est continue sur le fermé borné K, elle y est bornée et atteint ses bornes, donc

$$\sigma_K(p) = \max_{x \in K} (p \cdot x) < +\infty \ .$$

Donc $K_p = \big\{x \in K \mid p \cdot x = \min_{y \in K}(p \cdot y)\big\} = \big\{x \in K \mid (-p) \cdot x = \sigma_K(-p)\big\}$ est non vide, et si on choisit $x_0 \in K_p$, alors K_p est l'intersection de l'hyperplan affine $\{x \in \mathbb{R}^d \mid p \cdot x = p \cdot x_0\}$, qui est fermé et convexe, et de l'ensemble K, lui aussi fermé et convexe. Donc K_p est fermé et convexe.

Notons $m_p = \min_{x \in K}(p \cdot x) = -\sigma_K(-p)$. Si $x \in \mathrm{Ext}(K_p)$, alors $x \in K_p \subset K$ et, si $x = (1-\lambda)y + \lambda z$ avec $y \in K$, $z \in K$ et $\lambda \in]0,1[$, alors $p \cdot x = m_p = (1-\lambda)\, p \cdot y + \lambda\, p \cdot z$. Les réels $p \cdot y$ et $p \cdot z$ appartiennent au convexe $[m_p, +\infty[$ de $\mathbb{R}$ dont m_p est clairement un point extrémal, il en résulte que $p \cdot y = p \cdot z = m_p$ donc $y \in K_p$ et $z \in K_p$. Enfin, x étant extrémal dans K_p, on déduit $y = z = x$, ce qui montre que x est aussi extrémal dans K. On a donc l'inclusion $\mathrm{Ext}(K_p) \subset \mathrm{Ext}(K)$.

13 bis. Pour préparer les questions **14.** et **15.**, voici un lemme utilisant les notations du préliminaire ("question **0.**")... et un peu de géométrie affine!

Lemme 3. Si K est un convexe fermé borné de dimension $k > 0$ de $\mathbb{R}^d$, si p est un vecteur non nul de V_K, alors $\dim(K_p) < k$.

Preuve. Soit a un point de K, on a alors $K \subset a + V_K$. Pour tout réel C, l'ensemble $H_C = \{x \in V_K \mid p \cdot x = C\}$ est un hyperplan affine de V_K donc est de dimension $k-1$. Par ailleurs,

$$K_p = \{x \in K \mid p \cdot x = m_p\} \subset \{x \in a + V_K \mid p \cdot x = m_p\} = a + \{y \in V_K \mid p \cdot y = m_p - p \cdot a\} \ ,$$

donc K_p est inclus dans un ensemble de la forme $a + H_C$ qui est un sous-espace affine de $\mathbb{R}^d$ de dimension $k-1$, donc $\dim(K_p) \leq k-1$.

14. Raisonnons par récurrence forte sur $k = \dim(K) = \dim(V_K)$.

Pour $k = 0$, alors $K = \{a\}$ est un singleton et $\mathrm{Ext}(K) = \{a\} \neq \emptyset$.

Soit $k > 0$, supposons $\mathrm{Ext}(L) \neq \emptyset$ pour tout convexe fermé borné L non vide de dimension strictement inférieure à k, soit K un convexe fermé borné de dimension k. D'après le lemme 3 ci-dessus et la question **13**, si p est un vecteur non nul de V_K, alors K_p est un convexe fermé borné non vide de dimension strictement inférieure à k, on peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et $\mathrm{Ext}(K_p) \neq \emptyset$. Enfin $\mathrm{Ext}(K_p) \subset \mathrm{Ext}(K)$ d'après **13.**, donc $\mathrm{Ext}(K) \neq \emptyset$.

15. L'ensemble K est un convexe contenant $\mathrm{Ext}(K)$, il contient donc $\mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K)\big)$ d'après **10.**

Pour l'inclusion inverse, c'est de nouveau une récurrence forte sur la dimension k de K.

On pourrait commencer par prouver que, pour toute partie E de $\mathbb{R}^d$, $\mathrm{co}\big(\mathrm{co}(E)\big) = \mathrm{co}(E)$, mais passons plutôt à la suite...

Si $\dim(K) = 0$, alors K est un singleton et c'est évident.

Soit $k > 0$, supposons la propriété vraie pour tout convexe fermé borné non vide de dimension strictement inférieure à k, soit K un convexe fermé borné de dimension k dans $\mathbb{R}^d$. Soit $x \in K$, soit $K' = K - x$, alors $K' \subset V_K$ avec V_K s.e.v. de $\mathbb{R}^d$ de dimension k. On a maintenant $0 \in K'$ et K' est un convexe fermé borné de dimension k dans V_K (que l'on peut identifier à $\mathbb{R}^k$). Si D est une droite vectorielle de V_K (contenant donc 0), son intersection avec K' est un convexe fermé borné de D, c'est donc un segment $[A, B]$ contenant 0, les points extrémités A et B de ce segment étant sur la frontière de K' (pour la topologie induite sur $V_K \simeq \mathbb{R}^k$). D'après la question **8 bis** et en travaillant maintenant dans V_K, il existe dans V_K un hyperplan affine H_A passant par A et tel que K' soit inclus dans l'un des demi-espaces fermés délimités par cet hyperplan. On en déduit que $A \in K'_p$ où p est un certain vecteur non nul de V_K. Comme $\dim(K'_p) < k$ d'après le lemme 3, l'hypothèse de récurrence s'applique et $A \in \mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K'_p)\big)$. Or, par la question **13.**, $\mathrm{Ext}(K'_p) \subset \mathrm{Ext}(K')$, donc $A \in \mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K')\big)$. De même, $B \in \mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K')\big)$. Enfin, le point 0 appartient au segment $[A, B]$, donc $0 \in \mathrm{co}\Big(\mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K')\big)\Big) = \mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K')\big)$. En translatant le tout du vecteur x, on obtient $x \in \mathrm{co}\big(\mathrm{Ext}(K)\big)$, ce que l'on voulait démontrer.

On a ainsi prouvé le **théorème de Krein-Milman** (en se retreignant à la dimension finie).

Partie III. Un résultat de dualité

Cônes convexes

16. L'ensemble E^+ est clairement un cône. Par ailleurs, $E^+ = \displaystyle\bigcap_{x \in E \setminus \{0\}} \{p \in \mathbb{R}^d \mid p \cdot x \geq 0\}$ est une intersection de demi-espaces fermés, c'est donc une intersection de fermés convexes, et c'est encore un fermé convexe.

Ce qui précède s'applique à $E^{++} = (E^+)^+$.

Si $x \in E$, alors pour tout $p \in E^+$, on a $p \cdot x \geq 0$, donc $x \in E^{++}$. Ainsi, $E \subset E^{++}$.

17. Si $E = E^{++}$, alors E est un cône convexe fermé d'après la question précédente.

Réciproquement, soit E un cône convexe fermé non vide ; d'après **Q16.**, il suffit de montrer que $E^{++} \subset E$. Procédons par contraposition.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$ tel que $\xi \notin E$. Pour montrer que $\xi \notin E^{++}$, il faut construire un vecteur $p \in \mathbb{R}^d$ tel que $p \in E^+$ (i.e. tel que $\forall x \in E \quad p \cdot x \geq 0$) mais tel que $p \cdot \xi < 0$. Comme E est convexe fermé non vide, on peut considérer le point $x_0 = \mathrm{proj}_E(\xi)$ et poser $p = x_0 - \xi$.

Comme $\xi \notin E$, on a $x_0 \neq \xi$ donc $p \neq 0$.

Comme $x_0 \in E$ et que E est un cône, on a $\lambda x_0 \in E$ pour tout $\lambda \geq 0$. De **Q2.**, on déduit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \qquad (\xi - x_0) \cdot (\lambda x_0 - x_0) \leq 0 \ ,$$

soit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+ \qquad (1-\lambda)\, p \cdot x_0 \leq 0 \ ,$$

il en résulte que $p \cdot x_0 = 0$, puis que $p \cdot \xi = p \cdot x_0 + p \cdot (\xi - x_0) = -\|p\|^2 < 0$.

Enfin, si $x \in E$, on a

$$p \cdot x = p \cdot (x - x_0) + p \cdot x_0 = -(\xi - x_0) \cdot (x - x_0) \geq 0$$

toujours d'après **Q2.** et car $p \cdot x_0 = 0$, donc $p \in E^+$. Ceci prouve l'inclusion $E^{++} \subset E$ et termine la démonstration de l'équivalence

$$E = E^{++} \iff E \text{ est un cône convexe fermé.}$$

18. Le fait que F est un cône et qu'il est convexe sont des formalités.

Le fait que F est fermé ne me semble pas du tout être une formalité, si je ne m'abuse c'est plus ou moins le théorème de Carathéodory (*tout ceci est-il bien raisonnable en PSI ?*), je renvoie le lecteur à l'annexe 2.

On a donc $F = F^{++}$ d'après **Q17.** Or, il est facile de vérifier que

$$F^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in [\![1,k]\!] \quad \xi_i \cdot x \geq 0 \right\} .$$

Donc $\xi \in F \iff \xi \in F^{++} = (F^+)^+$, ce qui est exactement l'équivalence demandée.

Programmation linéaire

19. Introduisons des notations: soient les ensembles

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid x \geq 0 \ , \ Mx \leq b \right\} \qquad \text{et} \qquad B = \left\{ q \in \mathbb{R}^k \mid q \leq 0 \ , \ M^T q \leq p \right\} .$$

Soient $x \in A$ et $q \in B$. Alors, les coordonnées du vecteur x étant positives, de $p \geq M^T q$, on déduit $p \cdot x \geq (M^T q) \cdot x$.

D'autre part, $(M^T q) \cdot x = (M^T q)^T x = q^T M x = q \cdot (Mx)$.

Enfin, les coordonnées du vecteur q étant négatives, de $Mx \leq b$, on déduit $q \cdot (Mx) \geq q \cdot b$.

Enchaînons tout cela:

$$\forall x \in A \quad \forall q \in B \qquad p \cdot x \geq (M^T q) \cdot x = q \cdot (Mx) \geq q \cdot b = b \cdot q \ .$$

Donc $\inf\limits_{x \in A} (p \cdot x) \geq \sup\limits_{q \in B} (b \cdot q)$, soit $\alpha \geq \beta$.

20.a. Soit $z \in \mathbb{R}^d$ tel que $z_j \geq 0$ pour tout $j \in J$ et $M_i \cdot z \leq 0$ pour tout $i \in I$.

Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a $\overline{x} + \varepsilon z \in A$ (notation introduite dans le corrigé de la question précédente). En effet, pour tout $j \in [\![1,d]\!]$, $(\overline{x} + \varepsilon z)_j = \overline{x}_j + \varepsilon\, z_j$ donc,

- si $j \in J$, alors $(\overline{x} + \varepsilon z)_j = \varepsilon\, z_j \geq 0$ de façon évidente ;

- si $j \notin J$, alors $\overline{x}_j > 0$ donc $\overline{x}_j + \varepsilon\, z_j$ reste positif pour $\varepsilon > 0$ petit.

On montre de même que, si $\varepsilon > 0$ est petit, alors $M_i \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) \leq b_i$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, en distinguant les cas $i \in I$ et $i \notin I$.

Pour $\varepsilon > 0$ petit, on a donc $\overline{x} + \varepsilon z \geq 0$ et $M(\overline{x} + \varepsilon z) \leq b$, donc $\overline{x} + \varepsilon z \in A$, ce qui entraîne que $p \cdot (\overline{x} + \varepsilon z) \geq \alpha = p \cdot \overline{x}$, donc $p \cdot z \geq 0$.

b. Utilisons les questions **17.** et **18.** Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Notons F le cône engendré par les vecteurs e_j $(j \in J)$ et les vecteurs $-M_i$ $(i \in I)$, à savoir

$$F = \left\{ \sum_{j\in J} \lambda_j e_j - \sum_{i\in I} \mu_i M_i \ ; \text{ les } \lambda_j \text{ et les } \mu_i \text{ positifs ou nuls} \right\} .$$

Alors F est un cône convexe fermé donc $F = F^{++}$. Or, on vient de prouver dans le **a.** ci-dessus que $p \in F^{++}$. Donc $p \in F$, autrement dit il existe des réels positifs λ_j $(j \in J)$ et μ_i $(i \in I)$ tels que $p = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j - \sum_{i\in I} \mu_i M_i$.

Soit maintenant $\overline{q} = (\overline{q}_1, \cdots, \overline{q}_k) \in \mathbb{R}^k$, avec $\overline{q}_i = \begin{cases} -\mu_i & \text{si} \quad i \in I \\ 0 & \text{si} \quad i \in [\![1, k]\!] \setminus I \end{cases}$.

On a clairement $\overline{q} \leq 0$.

Notons $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^k$. Alors $\overline{q} = -\sum_{i\in I} \mu_i \varepsilon_i$, et

$$M^T \overline{q} = -\sum_{i\in I} \mu_i \ M^T \varepsilon_i = -\sum_{i\in I} \mu_i M_i ,$$

donc $p - M^T \overline{q} = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j \geq 0$ donc $M^T \overline{q} \leq p$.

On vient de montrer que $\overline{q} \in B$ (notation introduite dans le corrigé de la question **19.**).

Ensuite, $\overline{q} \cdot (M\overline{x} - b) = \sum_{i=1}^{k} \overline{q}_i \ (M_i \cdot \overline{x} - b_i) = 0$ car chaque terme de la somme est nul (distinguer les cas $i \in I$ et $i \notin I$).

Enfin, $(p - M^T \overline{q}) \cdot \overline{x} = \left(\sum_{j\in J} \lambda_j e_j \right) \cdot \overline{x} = \sum_{j\in J} \lambda_j \overline{x}_j = 0$ puisque les $\overline{x}_j$ sont nuls pour $j \in J$.

c. De la relation $\overline{q} \cdot (M\overline{x} - b) = 0$, on tire, en utilisant aussi $(p - M^T \overline{q}) \cdot \overline{x} = 0$,

$$b \cdot \overline{q} = \overline{q} \cdot b = \overline{q} \cdot (M\overline{x}) = \overline{q}^T M \overline{x} = (M^T \overline{q})^T \overline{x} = (M^T \overline{q}) \cdot \overline{x} = p \cdot \overline{x} = \alpha .$$

On a noté ci-dessus que $\overline{q} \in B$. Enfin, de **Q19.**, on déduit que $b \cdot \overline{q} = \alpha \geq \beta = \sup_{q\in B} (b \cdot q)$.

On a donc nécessairement $b \cdot \overline{q} = \max_{q\in B} (b \cdot q) = \beta$.

Partie IV. Systèmes linéaires sous-déterminés

21. • Si $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, et si $y = (y_1, \cdots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ vérifie $\|y\|_\infty \leq 1$, alors

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \leq \left| \sum_{i=1}^{d} x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| \, |y_i| \leq \|y\|_\infty \ \sum_{i=1}^{d} |x_i| \leq \|x\|_1 ,$$

donc $\|x\|_1$ est un majorant du premier ensemble considéré. Enfin, si on choisit y tel que $y_i = \begin{cases} \dfrac{|x_i|}{x_i} & \text{si } x_i \neq 0 \\ 0 & \text{si } x_i = 0 \end{cases}$, alors $\|y\|_\infty \leq 1$ et $x \cdot y = \sum_{i \notin I_0(x)} |x_i| = \sum_{i=1}^{d} |x_i| = \|x\|_1$. Ceci prouve que

$$\|x\|_1 = \max\left\{x\cdot y\ ;\ y\in \mathbb{R}^d\ ,\ \|y\|_\infty \leq 1\right\}\ .$$

• Si maintenant $\|y\|_1 \leq 1$, alors $x\cdot y \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|\,|y_i| \leq \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{d} |y_i| \leq \|x\|_\infty$. Et, si $i_0 \in [\![1,d]\!]$ est un indice tel que $|x_{i_0}| = \|x\|_\infty$, en choisissant $y = \dfrac{|x_{i_0}|}{x_{i_0}}\, e_{i_0}$ (vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$) (si le vecteur x est non nul!), on a $\|y\|_1 = 1$ et $x\cdot y = |x_{i_0}| = \|x\|_\infty$. Finalement,

$$\|x\|_\infty = \max\left\{x\cdot y\ ;\ y\in \mathbb{R}^d\ ,\ \|y\|_1 \leq 1\right\}\ .$$

22. La matrice $M\in\mathcal{M}_{k,d}(\mathbb{R})$ est supposée de rang k, donc l'application linéaire de $\mathbb{R}^d$ vers $\mathbb{R}^k$ qui lui est canoniquement associée est surjective, ainsi l'ensemble $E = \{x\in\mathbb{R}^d \mid Mx = b\}$ est non vide. Cet ensemble E est fermé car $x\mapsto Mx$ est continue.

L'ensemble $C' = \left\{x\in\mathbb{R}^d \mid Mx = b\ ,\ \|x\|_1 \leq r+1\right\}$ est alors non vide par définition de r, il est fermé car c'est l'intersection de E avec une boule fermée, et il est évidemment borné.

L'application continue $x\mapsto \|x\|_1$ admet donc un minimum sur C' et

$$\min_{x\in C'} \|x\|_1 = \min_{x\in E} \|x\|_1 = \inf_{x\in E} \|x\|_1 = r\ ,$$

ce qui prouve que C est non vide (la borne inférieure r est atteinte).

L'ensemble $C = \left\{x\in\mathbb{R}^d \mid Mx = b\ ,\ \|x\|_1 = r\right\}$ est fermé puisque c'est l'intersection de deux fermés (l'ensemble E et une sphère), il est clairement borné.

Soient $x\in C$, $y\in C$, $\lambda\in[0,1]$, posons $z = \lambda x + (1-\lambda)y$, alors clairement $Mz = b$, puis

$$\|z\|_1 = \big\|\lambda x + (1-\lambda)y\big\|_1 \leq \lambda\|x\|_1 + (1-\lambda)\|y\|_1 = \lambda r + (1-\lambda)r = r\ ,$$

mais comme $r = \min\limits_{z\in E} \|z\|_1$, cela entraîne $\|z\|_1 = r$, donc $z\in C$. L'ensemble C est donc convexe.

23. *Hum! Y a-t-il un spécialiste d'analyse convexe dans l'avion ? Si oui, je pense qu'il résoudra cette question en deux minutes, en utilisant la question* **21.** *et en s'inspirant probablement de la partie "programmation linéaire", peut-être en parlant de "certificat dual" ou de ce genre de choses que j'avoue humblement ignorer malgré un très (trop) rapide survol de quelques articles sur le sujet. Je me contente donc modestement d'une solution très partielle que j'ai bidouillée dans le cas où $I_0(\overline{x}) = \emptyset$.*

Si $I_0(\overline{x}) = \emptyset$, on n'a pas trop de choix, on doit prendre (à un facteur strictement positif près) le vecteur q tel que, pour tout $i\in[\![1,d]\!]$, on ait $q_i = \mathrm{sgn}(\overline{x}_i) = \dfrac{|\overline{x}_i|}{\overline{x}_i}$. On a alors $\|q\|_\infty = 1$ et la relation $q_i\,\overline{x}_i = \|q\|_\infty\,|\overline{x}_i|$ est satisfaite pour tout $i\in[\![1,d]\!]$. Notons que $q\cdot\overline{x} = \|\overline{x}\|_1 = r$. Par ailleurs, si $h\in\mathrm{Ker}(M)$, alors pour tout t réel, on a $M(\overline{x}+th) = M\overline{x} = b$, ce qui entraîne $\|\overline{x}+th\|_1 \geq r$. Or,

$$\begin{aligned}
\|\overline{x}+th\|_1 &= \sum_{i=1}^{d} |\overline{x}_i + th_i| = \sum_{i=1}^{d} \mathrm{sgn}(\overline{x}_i + th_i)\times(\overline{x}_i + th_i)\\
&= \sum_{i=1}^{d} \mathrm{sgn}(\overline{x}_i)\times(\overline{x}_i + th_i) \qquad \text{pour } |t| \text{ assez petit}
\end{aligned}$$

$$= \quad q\cdot(\overline{x}+th) \;=\; r+t\,q\cdot h\;.$$

Pour que cette expression reste minorée par r lorsque le réel t décrit un intervalle $[-\delta,\delta]$ avec $\delta>0$, il est nécessaire que $q\cdot h$ soit nul. On a donc montré ainsi que $q\in(\operatorname{Ker}M)^{\perp}$.

24. Pour traiter cette question et la suivante, choisissons q tel que $\|q\|_\infty=1$, ce qui ne change rien. Dans ce cas, on a $q_i=\operatorname{sgn}(\overline{x}_i)\in\{-1,1\}$ pour tout $i\in[\![1,d]\!]\setminus I_0(\overline{x})$, et $q\cdot\overline{x}=r$.

On a facilement $\overline{x}\in K$,donc $K\neq\emptyset$.

Si $y\in K$, alors $My=b$ et

$$\|y\|_1=\sum_{i=1}^{d}|y_i|=\sum_{i\in[\![1,d]\!]\setminus I_0(\overline{x})}|y_i|=\sum_{i\in[\![1,d]\!]\setminus I_0(\overline{x})}\operatorname{sgn}(y_i)\,y_i=q\cdot y$$

puisque, si y_i est non nul, les réels q_i et y_i sont de même signe et $q_i=\pm1=\operatorname{sgn}(y_i)$. Enfin,

$$\|y\|_1=q\cdot y=q\cdot\overline{x}+q\cdot(y-\overline{x})=q\cdot\overline{x}=r$$

puisque $My=M\overline{x}=b$ donc $y-\overline{x}\in\operatorname{Ker}(M)$. Donc $y\in C$, ce qui prouve l'inclusion $K\subset C$.

Il est clair aussi que l'ensemble K est convexe.

25. Soit $y\in\operatorname{Ext}(K)$. Soit $h\in\operatorname{Ker}(M)$ tel que $I_0(y)\subset I_0(h)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $h\neq0$, alors $I_0(h)\neq[\![1,d]\!]$.

Pour tout indice $i\in[\![1,d]\!]$ tel que $i\notin I_0(h)$, on a *a fortiori* $i\notin I_0(y)$ et, *a fortiori* encore puisque $y\in K$, $i\notin I_0(\overline{x})$. Donc $q_i=\operatorname{sgn}(\overline{x}_i)\in\{-1,1\}$. Comme $q_iy_i\geq0$ puisque $y\in K$, avec $y_i\neq0$, on a encore $q_i(y_i+th_i)\geq0$ pour t réel suffisamment proche de 0, disons si $|t|\leq\delta_i$ avec $\delta_i>0$.

Soit $\delta=\min\limits_{i\in[\![1,d]\!]\setminus I_0(h)}\delta_i$, alors $\delta>0$ et, pour $t\in[-\delta,\delta]$, on a bien sûr $M(y+th)=My=b$, on a $y_i+th_i=0$ pour tout $i\in I_0(\overline{x})$, et enfin $q_i(y_i+th_i)\geq0$ pour tout $i\in[\![1,d]\!]$.

Le segment $[y-\delta h,y+\delta h]$ est inclus dans K, ce qui contredit l'hypothèse que y est un point extrémal du convexe K.

26. Il s'agit de montrer que $\big|I_0(y)\big|\geq d-k$. Notons alors l ce cardinal. Pour simplifier, supposons que $I_0(y)=[\![1,l]\!]$, ce qui ne change rien au raisonnement qui suit. La question **25.** nous dit qu'un vecteur de $\operatorname{Ker}(M)$ dont les l premières coordonnées sont nulles est nécessairement le vecteur nul, ce qui se formalise en écrivant que $\operatorname{Ker}(M)\cap\operatorname{Vect}(e_{l+1},\cdots,e_d)=\{0\}$. Comme $\operatorname{Ker}(M)\oplus\operatorname{Vect}(e_{l+1},\cdots,e_d)\subset\mathbb{R}^d$, on déduit que $(d-k)+(d-l)\leq d$, soit $l\geq d-k$, ce qu'il fallait démontrer.

ANNEXE 1: DÉMONSTRATION du LEMME 2

<u>Rappel de l'énoncé du lemme 2:</u> Si A est un convexe de $\mathbb{R}^d$, alors $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Pour le prouver, nous utiliserons trois "sous-lemmes":

<u>Sous-lemme 2.1.</u>:

Si A est un convexe de $\mathbb{R}^d$, si $x \in \overset{\circ}{A}$ et $y \in \overline{A}$, alors $[x, y[\subset A$.

Preuve. Le lecteur est invité à faire un dessin, à représenter des boules et imaginer des homothéties.

Nous supposerons $y \neq x$, sinon il n'y a rien à démontrer.

Comme $x \in \overset{\circ}{A}$, il existe $r > 0$ tel que la boule $B = B(x, r)$ soit incluse dans A.

Soit alors $z \in]x, y[$, i.e. $z = tx + (1-t)y$ avec $t \in]0, 1[$. On a alors $x = \dfrac{1}{t}z + \Big(1 - \dfrac{1}{t}\Big)y$, ce qui signifie que $x = h(y)$, où h est l'homothétie de centre z et de rapport $-\dfrac{1-t}{t}$.

Posons $r = \dfrac{t}{1-t}\, r$, alors la boule $B' = B(y, r')$ vérifie $h(B') = B$. Comme $y \in \overline{A}$, cette boule B' contient au moins un point y_1 qui est dans A. Alors $x_1 = h(y_1) \in B$, donc $x_1 \in A$. La relation $x_1 = h(y_1)$ s'écrit aussi $z = tx_1 + (1-t)y_1$, on a donc $z \in [x_1, y_1]$ donc $z \in A$ puisque A est un convexe contenant x_1 et y_1. On a bien montré que $[x, y[\subset A$.

Remarque. En modifiant un peu la preuve, on peut montrer avec les mêmes hypothèses l'inclusion meilleure $[x, y[\subset \overset{\circ}{A}$, c'est le "lemme d'intériorité" selon Wikipédia.

<u>Sous-lemme 2.2.</u>

Soit A un convexe de $\mathbb{R}^d$. Alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset \iff \dim(A) < d$.

Preuve.

• *Si $\dim(A) = k < d$, alors A est inclus dans un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de dimension k, or $\overset{\circ}{\mathcal{F}} = \emptyset$ donc a fortiori $\overset{\circ}{A} = \emptyset$.*

• *Si $\dim(A) = d$, soit $a \in A$, il existe alors dans $A - a$ une famille $(e_1, \cdots, e_d)$ de d vecteurs linéairement indépendants. Le convexe A contient alors toutes les "combinaisons convexes"*

$$\lambda_0 a + \lambda_1(a + e_1) + \cdots + \lambda_d(a + e_d) = a + \sum_{i=1}^{d} \lambda_i e_i$$

où les λ_i, $0 \leq i \leq d$, sont des réels positifs de somme 1, et qui constituent un "simplexe" d'intérieur non vide. Donc a fortiori $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$.

__**Sous-lemme 2.3.**__

Soit A un convexe de $\mathbb{R}^d$. Alors $\overset{\circ}{A} = \emptyset \iff \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.

Preuve. Comme $A \subset \overline{A}$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, l'implication indirecte est donc évidente.

Si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, on déduit du **sous-lemme 2.2.** *que $\dim(A) = k < d$, donc A est contenu dans un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de dimension k. Comme $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathbb{R}^d$, on a aussi $\overline{A} \subset \mathcal{F}$ (puisque $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A). Donc $\dim(\overline{A}) \leq k$, et on déduit de nouveau du* **sous-lemme 2.2.** *que $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.*

__**Démonstration du lemme 2.**__

L'inclusion $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$ est immédiate.

Pour l'inclusion inverse, deux cas se présentent:

- si $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, alors $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$ d'après le **sous-lemme 2.3.** *d'où l'égalité.*

- supposons maintenant $\overset{\circ}{A} \neq \emptyset$, soit $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}$. Soit d'autre part un point v dans $\overset{\circ}{A}$. Comme x est intérieur à $\overline{A}$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, le point $u = x + \varepsilon(x - v)$ appartient à $\overline{A}$. Par le **lemme 2.1.**, *on a $[u, v[\subset A$. Or, $x = \dfrac{1}{1+\varepsilon}u + \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}v$ donc $x \in [u, v[$ et donc $x \in A$. On a donc obtenu l'inclusion $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset A$. Comme $\overset{\circ}{\overline{A}}$ est un ouvert et que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A, on déduit enfin que $\overset{\circ}{\overline{A}} \subset \overset{\circ}{A}$.*

ANNEXE 2: CARACTÈRE FERMÉ D'UN CÔNE FINIMENT ENGENDRÉ

Si $\mathcal{X} = (x_1, \cdots, x_k)$ est une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^d$, nous noterons $C(\mathcal{X})$ le cône convexe engendré par $\mathcal{X}$, à savoir

$$C(\mathcal{X}) = \Big\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ ; \ (\lambda_1, \cdots, \lambda_k) \in \mathbb{R}_+^k \Big\} .$$

L'objectif de cet annexe est de montrer le caractère fermé de $C(\mathcal{X})$.

• Notons d'abord que ceci est facile si $\mathcal{X}$ est libre. Notons en effet $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, c'est un s.e.v. de $\mathbb{R}^d$ de dimension k dont $\mathcal{X}$ est une base. Si $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \in C(\mathcal{X})$, alors les λ_i sont déterminés de façon unique, ce sont les coordonnées du vecteur x de V dans la base $\mathcal{B}$. Le s.e.v. V étant fermé dans $\mathbb{R}^d$, et la convergence d'une suite de vecteurs d'un e.v. de dimension finie pouvant s'étudier coordonnée par coordonnée, il est immédiat que toute suite convergente d'éléments de $C(\mathcal{X})$ a sa limite dans $C(\mathcal{X})$, donc $C(\mathcal{X})$ est fermé.

• Montrons maintenant que, **si $\mathcal{X}$ est liée, alors pour tout vecteur $x \in C(\mathcal{X})$, il existe une sous-famille stricte $\mathcal{X}'$ de $\mathcal{X}$ telle que $x \in C(\mathcal{X}')$.**

Preuve. Soit $x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$ avec les λ_i positifs ou nuls.
Si l'un au moins des λ_i est nul, c'est immédiat, il suffit de retirer de $\mathcal{X}$ le x_i correspondant.
Sinon, soient α_1, $\cdots$, α_k des réels non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = 0$. Quitte à remplacer tous les α_i par leurs opposés, on peut supposer qu'au moins un des α_i est strictement négatif. Posons $I = \big\{ i \in [\![1,k]\!] \mid \alpha_i < 0 \big\}$. Soit $\beta = \min_{i \in I} \left(\dfrac{\lambda_i}{-\alpha_i} \right)$, alors $\beta > 0$, ce minimum est atteint pour un certain indice $i_0 \in I$, on a alors $\lambda_{i_0} + \beta\, \alpha_{i_0} = 0$ et, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, on a $\lambda_i + \beta\, \alpha_i \geq 0$. Enfin,

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i + \beta \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \beta\, \alpha_i) x_i \in C(\mathcal{X}')$$

avec $\mathcal{X}' = (x_i)_{i \in [\![1,k]\!] \setminus \{i_0\}}$ sous-famille stricte de $\mathcal{X}$.

• On déduit de cela que, si $x \in C(\mathcal{X})$, alors il existe une famille libre $\mathcal{X}'$ extraite de $\mathcal{X}$ telle que $x \in C(\mathcal{X}')$. *Il suffit en effet de considérer une sous-famille $\mathcal{X}'$ de cardinal minimal extraite de $\mathcal{X}$ telle que $x \in C(\mathcal{X}')$.*

On a donc $C(\mathcal{X}) = \bigcup_{\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}\ ,\ \mathcal{X}' \text{ libre}} C(\mathcal{X}')$, ainsi $C(\mathcal{X})$ est une réunion finie de fermés, c'est une partie fermée de $\mathbb{R}^d$.