

I.A Soit $x \in \mathbf{R}$. La fonction $h : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et positive. En 0, $h(t) \sim t^{x-1}$. Il y a donc intégrabilité si et seulement si $x > 0$. En $+\infty$, $h(t) = o(\frac{1}{t^2})$. Donc h est intégrable sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $x > 0$.

I.B Introduisons la fonction de deux variables $f : (x, t) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$, définie sur $]0, +\infty[^2$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable d'après I.A.
- Pour tout $t \in]0, +\infty[$, la fonction $f(\cdot, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \ln(t)e^{-t}t^{x-1}$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout segment $[a, A] \subset]0, +\infty[$ on a

$$\forall (x, t) \in [a, A] \times]0, +\infty[, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t) = \begin{cases} \ln(t)e^{-t}t^{A-1} & \text{si } t > 1 \\ |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} & \text{si } t \leq 1 \end{cases}$$

Montrons que la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En 0 on a $\varphi(t) = |\ln(t)|e^{-t}t^{a-1} = o(t^{\frac{a}{2}-1})$, et $t \mapsto t^{\frac{a}{2}-1}$ est intégrable sur $]0, 1]$. En $+\infty$, $\varphi(t) = o(\frac{1}{t^2})$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On peut en conclure, d'après le théorème de dérivation sous le signe $\int$ que Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tous les segments de $]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout $x > 0$, la fonction $h : t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et strictement positive. Donc $\Gamma(x) > 0$.

I.C En intégrant par parties on a $\Gamma(x+1) = [-e^{-t}t^x]_0^{+\infty} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x)$.

I.D On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$. On en déduit, par récurrence, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

II.A En procédant à deux intégrations par parties on a

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)}{t^2} dt &= \left[\frac{-(t-k+1)(k-t)}{t} \right]_{k-1}^k + \int_{k-1}^k \frac{-2t+2k-1}{t} dt \\ &= [(-2t+2k-1)\ln(t)]_{k-1}^k + 2 \int_{k-1}^k \ln(t) dt \\ &\quad - \ln(k) - \ln(k-1) + 2 \int_{k-1}^k \ln(t) dt \end{aligned}$$

On en déduit la formule demandée.

II.B On pose, pour $t \in [k-1, k]$, $h(t) = (t-k+1)(k-t)$. Une étude rapide montre que $0 \leq h(t) \leq \frac{1}{4}$. On en déduit $0 \leq w_k \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{8k(k-1)}$ qui est le terme général d'une série convergente. On en déduit que $S = \sum_{k \geq 2} w_k$ est une série convergente. On a alors

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^n u_k + \int_1^n \ln(t)dt = \frac{1}{2} \ln(n) - \sum_{k=2}^n w_k + n \ln(n) - n + 1 = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + 1 - S + v_n.$$

La constante $a = 1 - S$ convient.

II.C On a $w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{-6t^2 + 6(2k-1)t - (6k^2 - 6k + 1)}{t^2} dt$. On intègre par parties en choisissant la constante C de sorte que le crochet soit nul :

$$w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{12} \left[\frac{-2t^3 + 3(2k-1)t^2 - (6k^2 - 6k + 1)t + C}{t^2} \right]_{k-1}^k + \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{-2t^3 + 3(2k-1)t^2 - (6k^2 - 6k + 1)t + C}{t^3} dt$$

Un calcul rapide montre que la valeur convenable de C est $C = k(k-1)(2k-1)$. On arrive ainsi à l'égalité

$$\left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right| = \frac{1}{6} \left| \int_{k-1}^k \frac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3} dt \right| \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \left| \frac{(t-k+1)(k-t)(2t-2k+1)}{t^3} \right| dt$$

Donc $\left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6} \int_{k-1}^k \frac{1}{t^3} dt$.

II.D On a $\frac{1}{n} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$. On peut donc écrire :

$$\left| v_n - \frac{1}{12n} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| w_k - \frac{1}{12} \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2} \right| \leq \frac{1}{6} \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt = \frac{1}{12n^2}.$$

Donc $v_n = \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln(n!) = n \ln(n) - n + \frac{1}{2} \ln(n) + a + \frac{1}{12n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

III.A La fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$ puisqu'en n ses limites à gauche et à droite sont 0. En 0, $f_n(t) \sim t^{x-1}$. Donc f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $I_n(x) = \int_0^n f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt$.

III.B On applique le théorème de convergence dominée. Pour t fixé dans $]0, +\infty[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{-t}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e^{-t} t^{x-1}$. Mais aussi, en utilisant l'inégalité classique $\ln(1+u) \leq u$, $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$. Donc $f_n(t) = e^{-t} t^{x-1}$. On sait que $t \rightarrow e^{-t} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(x) = \Gamma(x)$.

III.C On intègre par parties : $J_{n+1}(x) = \left[\frac{t^x}{x} (1-t)^{n+1} \right]_0^1 + \frac{n+1}{x} J_n(x+1) = \frac{n+1}{x} J_n(x+1)$

III.D On en déduit : $J_n(x) = \frac{n}{x} \frac{n-1}{x+1} \dots \frac{1}{x+n-1} J_0(x+n) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)(x+n)}$.

III.E On constate, en posant $u = \frac{t}{n}$ que $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n n^x u^{x-1} du = n^x J_n(x)$. On en déduit l'identité d'Euler, en utilisant III.B et III.D.

IV.A

IV.B La fonction h est 1-périodique, continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ et vérifie $\int_0^1 h(t) dt = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\int_x^{x+1} h(t) dt = 0$, c'est-à-dire $H(x+1) - H(x) = 0$. Ainsi H est 1-périodique. Pour $x \in [0, 1[$, $H(x) = \frac{x(x-1)}{2}$. On en déduit que H est continue sur $\mathbf{R}$ (si $n \in \mathbf{Z}$, $H(n=0)$) et $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

IV.C Pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, $H'(t) = h(t)$. D'après les propriétés données à la question IV.B, Si $X \in]0, +\infty[$, on a $\int_0^X \frac{h(u)}{u+x} du = \left[\frac{H(u)}{u+x} \right]_0^X + \int_0^X \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$. On sait que H est bornée : $-\frac{1}{8} \leq H(x) \leq 0$. On en déduit que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$ est absolument convergente et que le crochet a une limite nulle lorsque $X \rightarrow +\infty$. Donc $\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du$ converge et on a l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du = \int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$$

IV.D Supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \left| \frac{h(u)}{u+x} \right| du$ soit convergente, alors $x_n = \int_n^{n+1} \left| \frac{h(u)}{u+x} \right| du$ serait le terme général d'une série convergente. Montrons qu'il n'en est rien.

$$x_n = \int_n^{n+1/2} \frac{n+1/2-u}{u+x} du + \int_{n+1/2}^{n+1} \frac{u-n-1/2}{u+x} du = (n+x+1/2) \ln \left(\frac{(x+n+1/2)^2}{(x+n)(x+n+1)} \right)$$

Donc $x_n = (x+n+1/2)2 \ln(n+x+1/2) - \ln(n+x) - \ln(n+x+1)$ On trouve

$$x_n = (x+n+1/2) \left(\frac{2x+1}{n} - \frac{(x+1/2)^2}{n^2} - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} - \frac{x+1}{n} + \frac{(x+1)^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que $u \mapsto \frac{h(u)}{u+x}$ n'est pas intégrable sur $]0, +\infty[$.

IV.E On reprend l'égalité $\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{H(u)}{(u+x)^2} du$ pour appliquer le théorème de dérivation sous le signe $\int$.

On définit une fonction $f : (x, u) \mapsto \frac{H(u)}{(u+x)^2}$ sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et intégrable.
- Pour tout $u \in]0, +\infty[$, la fonction $f(\cdot, u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \frac{-2H(u)}{(u+x)^3}$.
- Pour tout $x \in]0, +\infty[$, la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.
- Pour tout intervalle $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ on a $\forall (x, u) \in [a, +\infty] \times]0, +\infty[$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{1}{4(a+u)^3}$.

La fonction $u \mapsto \frac{1}{4(a+u)^3}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[a, +\infty[\subset]0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$. On a, en intégrant par parties :

$$\varphi'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{-2H(u)}{(u+x)^3} du = \left[\frac{H(u)}{(u+x)^2} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du = - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

V.A On calcule les deux membres : $\int_{x+i}^{x+i+1} \ln(t) dt = (x+i+1) \ln(x+i+1) - (x+i) \ln(x+i) - 1$. Par ailleurs $\ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x} du = \ln(x+i) - 1 + (x+i+1) \ln \left(\frac{x+i+1}{x+i} \right)$. D'où l'égalité demandée.

V.B

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \ln(n!) + (x+1) \ln(n) - \sum_{i=0}^n \ln(x+i) + \ln(x) - \ln(x+n+1) \\ &= \ln(n!) + (x+1) \ln(n) - \int_x^{x+n+1} \ln(t) dt - \int_0^{n+1} \frac{h(u)-1/2}{u+x} du + \ln(x) - \ln(x+n+1) \\ &= G_n(x) - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x} du \end{aligned}$$

en posant $G_n(x) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - (x+n+1)\ln(x+n+1) + x\ln(x) + n+1 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+n+1}{x}\right) + \ln(x) - \ln(x+n+1) = \ln(n!) + (x+1)\ln(n) - (x+n+3/2)\ln(x+n+1) + n+1 + (x+1/2)\ln(x)$.

V.C.1) On utilise la formule de Stirling :

$$G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \left(x + n + \frac{3}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+x+1}\right) + 1 + o(1).$$

On trouve $\left(x + n + \frac{3}{2}\right) \ln\left(\frac{n}{n+x+1}\right) = -(x+1) + o(1)$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) - x$

V.C.2) D'après l'identité d'Euler, $\ln(\Gamma(x+1)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln(x) + \frac{1}{2} \ln(2\pi) - x - \varphi(x)$.

V.D On dérive l'égalité précédente. Cela donne, en utilisant les parties I et IV :

$$\frac{\Gamma'(x+1)}{\Gamma(x+1)} = \ln(x) + \frac{1}{2x} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)^2} du$$

VI.A.1) Montrons que Ω est une partie compacte de $\mathbf{R}^4$. C'est-à-dire une partie fermée bornée. On sait que l'image réciproque de $\{(N, E)\}$ par l'application continue $(x_1, \dots, x_4) \mapsto \left(\sum_{i=1}^4 x_i, \sum_{i=1}^4 \varepsilon_i x_i\right)$ est un fermé.

Comme $\mathbf{R}_+^4$ est aussi un fermé, Ω est fermé comme intersection de deux fermés. De plus $\Omega \subset [0, 1]^4$ donc Ω est bornée. On peut en déduire que f atteint un maximum sur Ω .

VI.A.2) On résout le système en prenant comme inconnues x_3 et x_4 . On trouve :

$$x_3 = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_4)x_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_4)x_2 - E + \varepsilon_4 N}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3} \text{ et } x_4 = \frac{(\varepsilon_3 - \varepsilon_1)x_1 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_2)x_2 + E - \varepsilon_3 N}{\varepsilon_4 - \varepsilon_3}.$$

VI.A.3) On introduit la fonction $g : (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2, ux_1 + vx_2 + w, u'x_1 + v'x_2 + w')$ définie sur l'ouvert $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0, ux_1 + vx_2 + w > 0, u'x_1 + v'x_2 + w' > 0\}$. Si les 4 nombres a_i $i = 1..4$ sont strictement positifs, g atteint un maximum en (a_1, a_2) . Il s'agit donc d'un point singulier. Le gradient

$$\text{de } g \text{ est nul en ce point. On obtient } \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + u \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + u' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + v \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) + v' \frac{\partial f}{\partial x_4}(a) = 0 \end{cases}$$

VI.A.4) Le sous-espace F engendré par les vecteurs $(1, 0, u, u')$ et $(0, 1, v, v')$ est de dimension 2 car ces 2 vecteurs sont indépendants. De la même manière, le sous-espace G engendré par les vecteurs $(1, 1, 1, 1)$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ est de dimension 2 car ces 2 vecteurs sont indépendants. Il faut montrer que $G = F^\perp$. Pour cela il suffit de vérifier que le produit scalaire d'un vecteur de la base de F par un vecteur de la base de G est nul. Il y a 4 égalités à vérifier : $1 + u + u' = 1 + v + v' = \varepsilon_1 + \varepsilon_3 u + \varepsilon_4 u' = \varepsilon_2 + \varepsilon_3 v + \varepsilon_4 v' = 0$.

VI.A.5) D'après le résultat de la question VI.A.3) le vecteur $\text{Grad} f(a)$ est orthogonal au sous-espace F Il appartient donc au sous-espace G . D'où le résultat demandé.

VI.B On applique le résultat de la question VI.A à F : $-\text{Grad} F(\overline{N}) = \lambda(1, 1, 1, 1) + \mu(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$. Puis, en utilisant la formule de dérivation établie dans la partie V, on a pour

$$\forall i = [1, 4] \quad \ln(N_i) + \frac{1}{2N_i} + \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du = \lambda + \mu \varepsilon_i$$

VI.C.1) C'est immédiat car $\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u + N_i)^2} du < \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(u + N_i)^2} du = \frac{1}{2N_i}$.

VI.C.2) On reprend le résultat de la question VI.B. Le réel $K = e^\lambda$ convient.