Correction du sujet d'algèbre

Partie I

1. D'après la formule du binôme, on a :

$$\mathrm{A} = \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{X}^k + 1 - 1 = \mathrm{X}\times\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{X}^{k-1} = \mathrm{X}\times\mathrm{B}\text{, en posant : } \mathrm{B} = \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}\mathrm{X}^{k-1} = \sum_{j=0}^{2n-1}\binom{2n}{j+1}\mathrm{X}^j.$$

Donc $\mathrm{B}\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$; B est de degré $2n-1$; son coefficient dominant vaut $\binom{2n}{2n} = 1$ et son terme constant vaut

$b_0 = \binom{2n}{1} = 2n$.

2. On résout : (e) $(z+1)^{2n} = 1$ dans $\mathbb{C}$.

On a : (e) $\iff z = -1 + e^{i\frac{k\pi}{n}}$ avec $k\in[\![0, 2n-1]\!]$

$\iff z = e^{i\frac{k\pi}{2n}}\left(e^{i\frac{k\pi}{2n}} - e^{-i\frac{k\pi}{2n}}\right) = 2\,\mathrm{i}\,e^{i\frac{k\pi}{2n}}\times\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$ avec $k\in[\![0, 2n-1]\!]$.

Si $k = 0$, on obtient la racine 0; si $k\in[\![1, 2n-1]\!]$, $\frac{k\pi}{2n}\in\,]0, \pi[$ donc $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$.

Les racines de A sont donc $z_0 = 0$ et les nombres $z_k = 2\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\times e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)}$ où $k\in[\![1, 2n-1]\!]$.

3. On pose $j = 2n - k$; alors, on a : $\mathrm{P}_n = \prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right) = \prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right) = \prod_{j=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)$.

Donc : $\boxed{\mathrm{P}_n = \prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)}$.

On a alors : $\mathrm{Q}_n = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\times\prod_{k=n+1}^{2n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\times\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right) = (\mathrm{P}_n)^2$.

De plus, comme, pour $k\in[\![1, n-1]\!]$, $\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) > 0$, $\mathrm{P}_n > 0$.

$\boxed{\text{D'où : } \mathrm{P}_n = \sqrt{\mathrm{Q}_n}\,.}$

4. D'après **1.** , $\mathrm{B} = \prod_{k=1}^{2n-1}(\mathrm{X} - z_k)$; donc, en identifiant les termes constants, on obtient :

$$b_0 = (-1)^{2n-1}\prod_{k=1}^{2n-1} z_k \iff \prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n.$$

Or, d'après la forme trigonométrique des racines z_k de B, on a :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = 2^{2n-1}\times\mathrm{Q}_n\times\prod_{k=1}^{2n-1} e^{i\left(\frac{k\pi}{2n}+\frac{\pi}{2}\right)} = 2^{2n-1}\times\mathrm{Q}_n\times e^{i\left(\frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{2n-1}k+(2n-1)\frac{\pi}{2}\right)}$$

Mais $\dfrac{\pi}{2n}\displaystyle\sum_{k=1}^{2n-1} k+(2n-1)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n}\frac{2n\times(2n-1)}{2}+(2n-1)\frac{\pi}{2} = (2n-1)\,\pi$.

Donc $\displaystyle\prod_{k=1}^{2n-1} z_k = -2n = -2^{2n-1}\times Q_n \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{Q_n = \frac{n}{2^{2n-2}}} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{P_n = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}}$.

5. La fraction F est irréductible et sa partie entière est nulle puisque le numérateur est de degré 0 alors que le dénominateur est, au moins de degré 2.

F n'a que des pôles simples : les racines z_k où $k\in[\![0, 2n-1]\!]$. On sait qu'alors le coefficient de la partie polaire relative à z_k est donné par : $c_k = \dfrac{1}{A'(z_k)} = \dfrac{1}{2n\times(1+z_k)^{2n-1}} = \dfrac{1+z_k}{2n}$ car $(1+z_k)^{2n} = 1$.

D'où : $\forall k\in[\![0, 2n-1]\!]$, $c_k = \dfrac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2n}$.

Et la décomposition en éléments simples de F est : $\boxed{F = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{e^{i\frac{k\pi}{n}}}{2n(X-z_k)}}$.

Partie II :

6. Si f est une homothétie vectorielle, $f = \lambda\,.I_E$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$.
Donc f est solution de l'équation (e') : $(f + I_E)^{2n} - I_E = \theta$ ssi $[(\lambda+1)^{2n} - 1].I_E = \theta$.
Comme E n'est pas réduit au vecteur nul, I_E n'est pas l'application nulle.
Donc f est solution de l'équation (e') ssi $(\lambda+1)^{2n} - 1 = 0$.
Donc, d'après la première partie, λ est une racine de A.

Donc les homothéties solutions de (e') sont les applications $z_k\,.I_E$ où $k\in[\![0, 2n-1]\!]$ et où les z_k sont les racines du polynôme A trouvées dans la partie I.

7. On a, d'après la formule du binôme : $(1+1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p} + \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1} = 2^{2n}$

et $(1-1)^{2n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p} - \sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1} = 0$.

D'où : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1} = \sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p} = 2^{2n-1}$.

8. Si s est une symétrie, on sait que $s \circ s = I_E$ donc : $\forall k\in\mathbb{N}$, $s^{2k} = I_E$ et $s^{2k+1} = s$.
De plus, s et I_E commutent, on peut donc appliquer la formule du binôme.
$(s + I_E)^{2n} - I_E = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}s^k - I_E = \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k}.I_E + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.s = (2^{2n-1}-1).I_E + 2^{2n-1}.s$.
Donc s est solution de (e') ssi $(2^{2n-1}-1).I_E + 2^{2n-1}.s = \theta$.
En appliquant s à cette dernière équation, on obtient : $(2^{2n-1}-1).\,s + 2^{2n-1}.I_E = \theta$.

Puis la différence des deux donne $s = I_E$; mais en reportant dans (e'), on obtient $2^{2n} - 1 = 0$ ce qui est impossible. $\boxed{\text{Donc il n'y a pas de symétrie solution de (e').}}$

<u>Partie III</u> :

9. $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$, $M_{a,b} = a\,I + b\,J$ où $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc G = Vec (I, J).

$\boxed{\text{Donc G est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$

De plus, $I \neq O$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $J \neq \lambda .I$. Donc (I, J) forme une famille libre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

Mais, le couple (I, J) engendre G.

Donc $\boxed{\text{(I, J) est une base de G et G est de dimension 2.}}$

Soient $M_{a,b}$ et $M_{a',b'}$ deux éléments de G.

On a : $M_{a,b} \times M_{a',b'} = (a\,I + b\,J) \times (a'\,I + b'\,J) = a\,a'\,I + (a\,b' + a'\,b)\,J + b\,b'\,J^2$.

Or, en calculant J^2, on obtient : $J^2 = 2\,I + J$.

Donc : $M_{a,b} \times M_{a',b'} = (a\,a' + 2\,b\,b')\,I + (ab' + a'\,b + b\,b')\,J \in G$.

$\boxed{\text{Donc G est stable pour le produit matriciel.}}$

10. $e'_1 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 \in E_1$ ssi $u(e'_1) - (a + 2\,b)\,e'_1 = 0_E$ ssi $\begin{cases} -2\,b\,x + b\,y + b\,z = 0 \\ b\,x - 2\,b\,y + b\,z = 0 \\ b\,x + b\,y - 2\,b\,z = 0 \end{cases}$

La somme des deux dernières équations donne l'opposée de la première. Donc

$e'_1 \in E_1$ ssi $\begin{cases} b\,x - 2\,b\,y + b\,z = 0 \\ b\,x + b\,y - 2\,b\,z = 0 \end{cases}$ ssi $x = y = z$ (car $b \neq 0$).

$\boxed{\text{Donc } E_1 \text{ est bien une droite vectorielle et on choisit } e'_1 \text{ de coordonnées (1, 1, 1) dans la base } \mathsf{B}.}$

11. $e'_2 = x\,e_1 + y\,e_2 + z\,e_3 \in E_2$ ssi $u(e'_2) - (a - b)\,e'_2 = 0_E$ ssi $\begin{cases} b\,x + b\,y + b\,z = 0 \\ b\,x + b\,y + b\,z = 0 \\ b\,x + b\,y + b\,z = 0 \end{cases}$

ssi $x + y + z = 0$ (car $b \neq 0$).

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Donc } E_2 \text{ est bien un plan vectoriel et on peut choisir } e'_2 \text{ de coordonnées (1, 0, – 1) et } e'_3 \text{ de coordonnées} \\ \text{(0, 1, – 1) dans la base } \mathsf{B}\text{, pour former une base de } E_2.\end{array}}$

12. $\det_{\mathsf{B}}(e'_1, e'_2, e'_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$.

$\boxed{\text{Donc } (e'_1, e'_2, e'_3) \text{ est une base de E notée } \mathsf{B}'.}$

13. On a : $u(e'_1) = (a + 2\,b)\,e'_1$, $u(e'_2) = (a - b)\,e'_2$ et $u(e'_3) = (a - b)\,e'_3$.

Donc, on a : $\boxed{D = M(u;\mathsf{B}') = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{pmatrix}.}$

14. On a : $P = P_{\mathsf{B}}^{\mathsf{B}'}$. Donc $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$.

On calcule P^{-1} par la méthode du pivot.

On pose la tableau : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On effectue les transformations suivantes $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et on obtient : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Puis on effectue $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ pour avoir : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, on effectue : $L_2 \leftarrow 3L_2 + L_3$ puis $L_1 \leftarrow 3L_1 + L_2$ pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

En divisant L_1 par 3 et L_2 et L_3 par -3, la partie droite du tableau donne $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$.

15. D'après le théorème sur les formules de changement de bases, on sait que :
$M(u;\mathsf{B}) = P_{\mathsf{B}}^{\mathsf{B}'} \times M(u;\mathsf{B}') \times P_{\mathsf{B}'}^{\mathsf{B}}$. On obtient donc : $\boxed{M = P\,D\,P^{-1}}$.

16. M est solution de (*) ssi $(M+I)^{2n} - I = O \iff (P\,D\,P^{-1} + I)^{2n} = I$
$\iff (P(D+I)P^{-1})^{2n} = I$

On montre alors, par récurrence sur k, que : $\forall k \in \mathbb{N}, \forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), (P\,M\,P^{-1})^k = P\,M^k\,P^{-1}$.

D'où : M est solution de (*) $\iff P(D+I)^{2n}P^{-1} = I$
$\iff (D+I)^{2n} = I$ après multiplication à droite par P et à gauche par P^{-1}.

$\boxed{\text{Donc M est solution de (*) ssi D est solution de (*).}}$

17. Comme D + I est une matrice diagonale, on peut calculer facilement sa puissance $2n$.

On a : $(D+I)^{2n} = \begin{pmatrix} (a+2b+1)^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (a-b+1)^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & (a-b+1)^{2n} \end{pmatrix}$.

Donc D est solution de (*) ssi $\begin{cases} (a+2b+1)^{2n} = 1 \\ (a-b+1)^{2n} = 1 \end{cases}$.

On a donc $a + 2b$ et $a - b$ racines du polynôme A de la première partie. Comme $b \neq 0$, ces racines sont distinctes.

Donc D est solution de (*) $\Leftrightarrow$ $\exists\,(k, p) \in [\![0, 2n-1]\!] \times [\![0, 2n-1]\!]$, $\begin{cases} a + 2b = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1 \\ a - b = e^{i\frac{p\pi}{n}} - 1 \end{cases}$ et $k \neq p$.

D est solution de (*) $\Leftrightarrow$ $\exists\,(k, p) \in [\![0, 2n-1]\!] \times [\![0, 2n-1]\!]$, $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} + 2e^{i\frac{p\pi}{n}} - 3) \\ b = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{p\pi}{n}}) \end{cases}$ et $k \neq p$.

18. D'après ce qui précède, si $b \neq 0$, M est solution de (*) ssi $\exists(k, p) \in [\![0, 2n-1]\!] \times [\![0, 2n-1]\!]$,

$k \neq p$ et $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} + 2e^{i\frac{p\pi}{n}} - 3) \\ b = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{p\pi}{n}}) \end{cases}$.

Si $b = 0$, M $= a$.I ; donc M est solution de (*) ssi a est une racine du polynôme A c'est-à-dire :

$\exists k \in [\![0, 2n-1]\!]$, $a = e^{i\frac{k\pi}{n}} - 1$. On retrouve le cas précédent dans le cas où $k = p$.

Donc : M $\in$ G est solution de (*) ssi $\exists(k, p) \in [\![0, 2n-1]\!] \times [\![0, 2n-1]\!]$, $\begin{cases} a = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} + 2e^{i\frac{p\pi}{n}} - 3) \\ b = \frac{1}{3}(e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{p\pi}{n}}) \end{cases}$.