

Centrale 2007, filière PC, première épreuve

• Partie I.

A.1) La fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et négligeable en $\pm\infty$ devant $x \mapsto 1/x^2$; elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}$.

$$A.2) m_1 = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{+\infty} = 0.$$

A.3) On intègre par parties : $x^{n-1} \xrightarrow{D} (n-1)x^{n-2}$, $xf(x) \xrightarrow{P} -f(x)$ et $x^{n-1}f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$, d'où $m_n = (n-1)m_{n-2}$.

À partir de $m_0 = 1$ et $m_1 = 0$, on en déduit par récurrence : $\forall p \in \mathbb{N}$, $m_{2p} = \frac{(2p)!}{2^p p!}$ et $m_{2p+1} = 0$.

B. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-tx}f(x) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o}(e^{-|x|})$, d'où la convergence absolue de l'intégrale envisagée. Ensuite :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-tx-x^2/2} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+t)^2/2} dx = \frac{e^{t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2} dy = e^{t^2/2}.$$

C.1) $S_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-tx} f(x)$ d'après le développement en série entière de l'exponentielle.

C.2) $|S_n(x)| \leq \sum_{k=0}^n \frac{|tx|^k}{k!} f(x) \leq e^{|tx|} f(x)$. La fonction $x \mapsto e^{|tx|} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour la même raison qu'au B., donc le théorème de convergence dominée s'applique, et donne :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} S_n(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k t^k}{k!} m_k.$$

$$C.3) \text{ Avec C.2) et A.3) : } \int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x) dx = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} m_{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^{2p}}{(2p)!} \cdot \frac{(2p)!}{2^p p!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(t^2/2)^p}{p!} = e^{t^2/2}.$$

• Partie II.

A. On vérifie que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possédant f .

- $f \in E$, d'après la définition de E , avec $M(f) = \lambda = 1$.

- Soient $(g, h) \in E^2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Avec des notations évidentes, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|\alpha g(x) + \beta h(x)| \leq |\alpha| |g(x)| + |\beta| |h(x)| \leq |\alpha| M(g) f(\lambda x) + |\beta| M(h) f(\mu x).$$

Posons alors $M = |\alpha| M(g) + |\beta| M(h)$ et $\rho = \min(\lambda, \mu)$; il vient $|\alpha g(x) + \beta h(x)| \leq M f(\rho x)$, donc $\alpha g + \beta h \in E$.

B.1) x étant fixé dans $\mathbb{R}$, notons $\varphi(t) = u(t) v(x-t)$. φ est continue sur $\mathbb{R}$ et, toujours avec des notations évidentes :

$$|\varphi(t)| = |u(t)| |v(x-t)| \leq M(u) M(v) f(\lambda t) f(\mu(x-t)) \leq \frac{M(u) M(v)}{\sqrt{2\pi}} f(\lambda t) = \underset{t \rightarrow \pm\infty}{o}(e^{-|t|}).$$

Cela assure l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}$, et donc aussi la bonne définition de $u * v$ au point x .

B.2) Il suffit d'effectuer le changement de variable $s = x - t$ dans l'intégrale qui définit $(u * v)(x)$.

$$B.3) (f * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x-t)^2/2} dt = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xt} f(t\sqrt{2}) dt = \frac{e^{-x^2/2}}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{xu/\sqrt{2}} f(u) du.$$

$$\text{D'après I-B., } \int_{\mathbb{R}} e^{xu/\sqrt{2}} f(u) du = e^{x^2/4}, \text{ donc } (f * f)(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{2\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2}} f\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right).$$

B.4) - Remarquons d'abord que toutes les fonctions de E sont bornées (car f l'est) et intégrables sur $\mathbb{R}$ (par exemple par comparaison avec $x \mapsto e^{-|x|}$ en $\pm\infty$).

Posons alors, pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, t) = u(t) v(x-t)$.

$\varphi(\cdot, t)$ est continue puisque v l'est et $|\varphi(x, t)| \leq N_{\infty}(v) |u(t)|$, fonction indépendante de x et intégrable sur $\mathbb{R}$.

Par théorème, $u * v$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- Avec les notations du B.1), et en posant de nouveau $\rho = \min(\lambda, \mu)$, il vient ensuite :

$$|\varphi(x, t)| = |u(t)| |v(x-t)| \leq M(u)M(v)f(\lambda t)f(\mu(x-t)) \leq M(u)M(v)f(\rho t)f(\rho(x-t)) \text{ d'où, en intégrant sur } \mathbb{R} :$$

$$|(u * v)(x)| \leq M(u)M(v) \int_{\mathbb{R}} f(\rho t) f(\rho(x-t)) dt = \frac{M(u)M(v)}{\rho} \int_{\mathbb{R}} f(s) f(\rho x - s) ds = \frac{M(u)M(v)}{\rho} (f * f)(\rho x).$$

La question précédente donne alors $|(u * v)(x)| \leq \frac{M(u)M(v)}{\rho\sqrt{2}} f\left(\frac{\rho x}{\sqrt{2}}\right)$, ce qui montre que $u * v$ appartient à E .

C.1) Comme u appartient à E on a encore, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-tx}u(x) = \underset{x \rightarrow \pm\infty}{o}(e^{-|x|})$, d'où l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^{-tx}u(x)$. $\hat{u}$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ entier.

C.2) Pour $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, posons $\varphi(t, x) = e^{-tx}u(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot, x)$ est de classe C^2 , avec $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = -xe^{-tx}u(x)$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) = x^2e^{-tx}u(x)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \cdot)$ et $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, \cdot)$ sont continues, car u l'est.

Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $(t, x) \in [-A, A] \times \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) \right| \leq |x|e^{A|x|}|u(x)|$ et $\left| \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}(t, x) \right| \leq x^2e^{A|x|}|u(x)|$.

Comme u appartient à E , les deux fonctions majorantes, indépendantes de t , sont négligeables à l'infini devant $x \mapsto e^{-|x|}$ et elles sont donc intégrables sur $\mathbb{R}$.

Par le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, appliqué deux fois, $\hat{u}$ est de classe C^2 sur $[-A, A]$, avec :

$$(\hat{u})'(t) = - \int_{\mathbb{R}} x e^{-tx} u(x) dx \text{ et } (\hat{u})''(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-tx} u(x) dx.$$

Ce résultat étant valable pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$, il est encore valable sur $\mathbb{R}$ entier.

D.1) Pour $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ posons $q(x, t) = t^2 + (x-t)^2$. q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$, évidemment définie positive ; $\sqrt{q}$ est donc une norme (euclidienne) sur $\mathbb{R}^2$, qui est équivalente à la norme euclidienne canonique, puisque $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$, $\sqrt{q(x, t)} = \sqrt{t^2 + (x-t)^2} \geq \alpha \sqrt{t^2 + x^2}$. En prenant $a = \alpha^2$, on obtient l'inégalité souhaitée.

D.2) - $u * v$ est bien intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après la question B.4), dont on conserve par ailleurs toutes les notations.

- La fonction $\varphi : (x, t) \mapsto u(t)v(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, puisque u et v sont continues sur $\mathbb{R}$.

$$|\varphi(x, t)| \leq M(u)M(v)f(\rho t)f(\rho(x-t)) = \frac{M(u)M(v)}{2\pi} \exp\left(\frac{-\rho^2}{2}(t^2 + (x-t)^2)\right).$$

Il vient alors, d'après la question précédente : $|\varphi(x, t)| \leq \frac{M(u)M(v)}{2\pi} \exp\left(\frac{-a\rho^2}{2}(x^2 + t^2)\right) = h_1(x)h_2(t)$, avec

$$\text{par exemple } h_1(x) = \frac{M(u)}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\rho^2 x^2/2} = M(u)f(\rho\sqrt{a}x) \text{ et } h_2(t) = \frac{M(v)}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\rho^2 t^2/2} = M(v)f(\rho\sqrt{a}t).$$

Les fonctions h_1 et h_2 sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}$ (elles appartiennent à E).

- On peut donc appliquer à φ le résultat admis dans l'énoncé, ce qui donne :

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t) dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t) dx \right) dt = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(x-t) dx \right) dt.$$

On pose alors $y = x - t$ dans l'intégrale intérieure, pour obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} (u * v)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} u(t) \left(\int_{\mathbb{R}} v(y) dy \right) dt = \int_{\mathbb{R}} u(t) dt \cdot \int_{\mathbb{R}} v(y) dy = \int_{\mathbb{R}} u(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} v(x) dx.$$

D.3) On remarque que la question précédente correspond au cas particulier $\theta = 0$.

θ étant maintenant fixé dans $\mathbb{R}$, posons $U(x) = e^{-\theta x}u(x)$ et $V(x) = e^{-\theta x}v(x)$. U et V sont continues ; de plus :

$|U(x)| \leq e^{-\theta x}M(u)f(\lambda x) = M(u)e^{-\theta x}e^{-\lambda^2 x^2/4}f(\lambda x/\sqrt{2})$. La fonction $T : x \mapsto e^{-\theta x}e^{-\lambda^2 x^2/4} = e^{-\theta x - \lambda^2 x^2/4}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers 0 en $\pm\infty$, elle est par conséquent bornée, donc $|U(x)| \leq M(u)N_{\infty}(T)f(\lambda x/\sqrt{2})$.

Cela prouve que U appartient encore à E , et il en est de même pour V . L'application de D.2.) à U et V donne :

$$\int_{\mathbb{R}} (U * V)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} U(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} V(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}u(x) dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x}v(x) dx = \hat{u}(\theta)\hat{v}(\theta).$$

Mais par ailleurs :

$$(U * V)(x) = \int_{\mathbb{R}} U(t)V(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta t} u(t) e^{-\theta(x-t)} v(x-t) dt = e^{-\theta x} \int_{\mathbb{R}} u(t)v(x-t) dt = e^{-\theta x} (u * v)(x).$$

Par suite, $\int_{\mathbb{R}} (U * V)(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\theta x} (u * v)(x) dx = (\widehat{u * v})(\theta)$. Le résultat demandé en découle.

• Partie III.

A.1) Démonstration immédiate par récurrence, compte tenu de **II-B.4**) et **II-D.2**).

A.2) $\widehat{h_n}(x) = (\widehat{h}(x))^n$ d'après **II-D.3**), par récurrence évidente.

B.1) $f_2 = f * f$. D'après **II-B.3**), $f_2(x) = K_2 e^{-x^2/4}$ avec $K_2 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$.

B.2) Par récurrence (déjà initialisée), supposons que $f_n(x) = K_n \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right)$ pour une certaine constante K_n .

$$f_{n+1}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_n(t)f(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} K_n \exp\left(-\frac{t^2}{2n}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dt = K_n e^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{xt} f\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} t\right) dt.$$

$$f_{n+1}(x) = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{-x^2/2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}} xu\right) f(u) du = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{-x^2/2} \widehat{f}\left(-\sqrt{\frac{n}{n+1}} x\right).$$

Le résultat du **I-B.** donne alors :

$$f_{n+1}(x) = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}} e^{-x^2/2} \exp\left(\frac{nx^2}{2(n+1)}\right) = K_{n+1} \exp\left(-\frac{x^2}{2(n+1)}\right), \text{ où } K_{n+1} = K_n \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Enfin, à partir de $K_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, une récurrence évidente donne $K_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$.

B.3) $\widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\widehat{f}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$ d'où, en utilisant encore **I-B.**, $\widehat{f_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \left(\exp\left(\frac{t^2}{2n}\right)\right)^n = e^{t^2/2}$.

La suite étudiée est constante, de valeur (et de limite) $e^{t^2/2}$.

C.1) - g est clairement continue, puisque $\cos(\pi/2) = \cos(-\pi/2) = 0$.

- Pour $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $|g(x)| \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2f(\pi/2)} f(\pi/2) \leq \frac{1}{2f(\pi/2)} f(x)$.

Cette majoration est encore valable pour $|x| > \frac{\pi}{2}$, puisqu'alors $g(x) = 0$. Cela montre que g appartient à E .

- Enfin, $\int_{\mathbb{R}} g(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t dt = 1$, donc g appartient à E_1 .

C.2) Par parité de g : $(g * g)(-x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)g(-x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(-t)g(x+t) dt = \int_{\mathbb{R}} g(u)g(x-u) du = (g * g)(x)$.

La fonction $g * g$ est donc paire ; on peut remarquer que le même calcul montre plus généralement que si u et v sont deux fonctions paires de E , alors $u * v$ est aussi paire.

On suppose maintenant que $x \in \mathbb{R}_+$. $(g * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)g(x-t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t g(x-t) dt$.

- Si $x > \pi$: $\forall t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $x-t > \pi/2$, donc $g(x-t) = 0$. Par conséquent, $(g * g)(x) = 0$.

- Si $x \leq \pi$: $(g * g)(x) = \frac{1}{4} \int_{x-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cos(x-t) dt = \frac{1}{8} \int_{x-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2t-x) + \cos x) dt$.

Un calcul facile conduit alors à $(g * g)(x) = \frac{\sin x + (\pi-x) \cos x}{8}$.

C.3) Montrons par récurrence sur n (déjà initialisée) que g_n est nulle hors de $[-n\pi/2, n\pi/2]$. Comme les g_n sont toutes paires d'après la remarque faite au C.2), il suffit de prouver que g_n est nulle sur $]n\pi/2, +\infty[$.

Supposons donc ce résultat acquis au rang n et considérons un réel $x > (n+1)\pi/2$.

- Si $t \notin [-n\pi/2, n\pi/2]$, $g_n(t) = 0$ par hypothèse de récurrence.

- Si $t \in [-n\pi/2, n\pi/2]$, $x-t > \pi/2$, donc $g(x-t) = 0$.

La fonction $t \mapsto g_n(t)g(x-t)$ est donc identiquement nulle sur $\mathbb{R}$, par conséquent $g_{n+1}(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \text{C.4) } \widehat{g}(t) &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-tx} \cos x \, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{(-t+i)x} \, dx \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\left[\frac{e^{(-t+i)x}}{-t+i} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-\pi t/2} i + e^{\pi t/2} i}{-t+i} \right) \\ \widehat{g}(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{(-t-i) \cdot 2i \operatorname{ch}(\pi t/2)}{t^2+1} \right) = \frac{\operatorname{ch}(\pi t/2)}{t^2+1}. \end{aligned}$$

$$\text{C.5) } \widehat{g}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left(\widehat{g} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 + \frac{t^2}{n} \right)^{-n} \left(\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\sqrt{n}} \right)^n.$$

$$\text{- Classiquement, } \left(1 + \frac{t^2}{n} \right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-t^2}.$$

$$\text{- } \ln \left(\left(\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\sqrt{n}} \right)^n \right) = n \ln \left(\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\sqrt{n}} \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \left(\operatorname{ch} \frac{\pi t}{2\sqrt{n}} - 1 \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \frac{\pi^2 t^2}{8n} = \frac{\pi^2 t^2}{8}.$$

$$\text{- On en conclut que } \widehat{g}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{(\pi^2/8 - 1)t^2}.$$

• Partie IV.

A.1) On sait d'après **II-C.2)** que $\widehat{h}_n$ est de classe C^2 avec :

$$(\widehat{h}_n)'(0) = - \int_{\mathbb{R}} x h_n(x) \, dx = -M_{1,n} \text{ et } (\widehat{h}_n)''(0) = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x) \, dx = M_{2,n}.$$

De plus, on a ici $\widehat{h}_n(0) = \int_{\mathbb{R}} h_n(x) \, dx = 1$, puisque $h_n \in E_1$ selon **III-A.1)**.

Par théorème $\widehat{h}_n$ admet en 0 un développement limité d'ordre 2, donné par la formule de Taylor-Young :

$$\widehat{h}_n(t) = 1 - M_{1,n} t + \frac{M_{2,n}}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

A.2) La question précédente donne en particulier, pour $n = 1$: $\widehat{h}(t) = 1 - M_{1,1} t + \frac{M_{2,1}}{2} t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$.

Mais $\widehat{h}_n = (\widehat{h})^n$ d'après **III-A.2)** donc, par produit de développements limités :

$$\widehat{h}_n(t) = 1 - n M_{1,1} t + \left(\frac{n(n-1)}{2} M_{1,1}^2 + \frac{n}{2} M_{2,1} \right) t^2 + o_{t \rightarrow 0}(t^2).$$

L'unicité du développement limité donne alors $M_{1,n} = n M_{1,1}$ et $M_{2,n} = n(n-1) M_{1,1}^2 + n M_{2,1}$, d'où aussi ;

$$V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2 = n(n-1) M_{1,1}^2 + n M_{2,1} - n^2 M_{1,1}^2 = n(M_{2,1} - M_{1,1}^2) = n V_1.$$

B. On fixe maintenant t dans $\mathbb{R}$. Compte tenu du développement limité de $\widehat{h}$ et de l'hypothèse $M_{1,1} = 0$, il vient :

$$\widehat{h}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) = \left(\widehat{h} \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right)^n = \left(1 + \frac{M_{2,1}}{2n} t^2 + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right)^n.$$

Cette égalité montre que $\widehat{h}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) > 0$ pour n assez grand, ce qui permet d'écrire :

$$\ln \left(\widehat{h}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right) = n \ln \left(1 + \frac{M_{2,1}}{2n} t^2 + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right) = n \left(\frac{M_{2,1}}{2n} t^2 + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{M_{2,1}}{2} t^2.$$

$$\text{En conclusion : } \widehat{h}_n \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{M_{2,1}}{2} t^2 \right).$$