

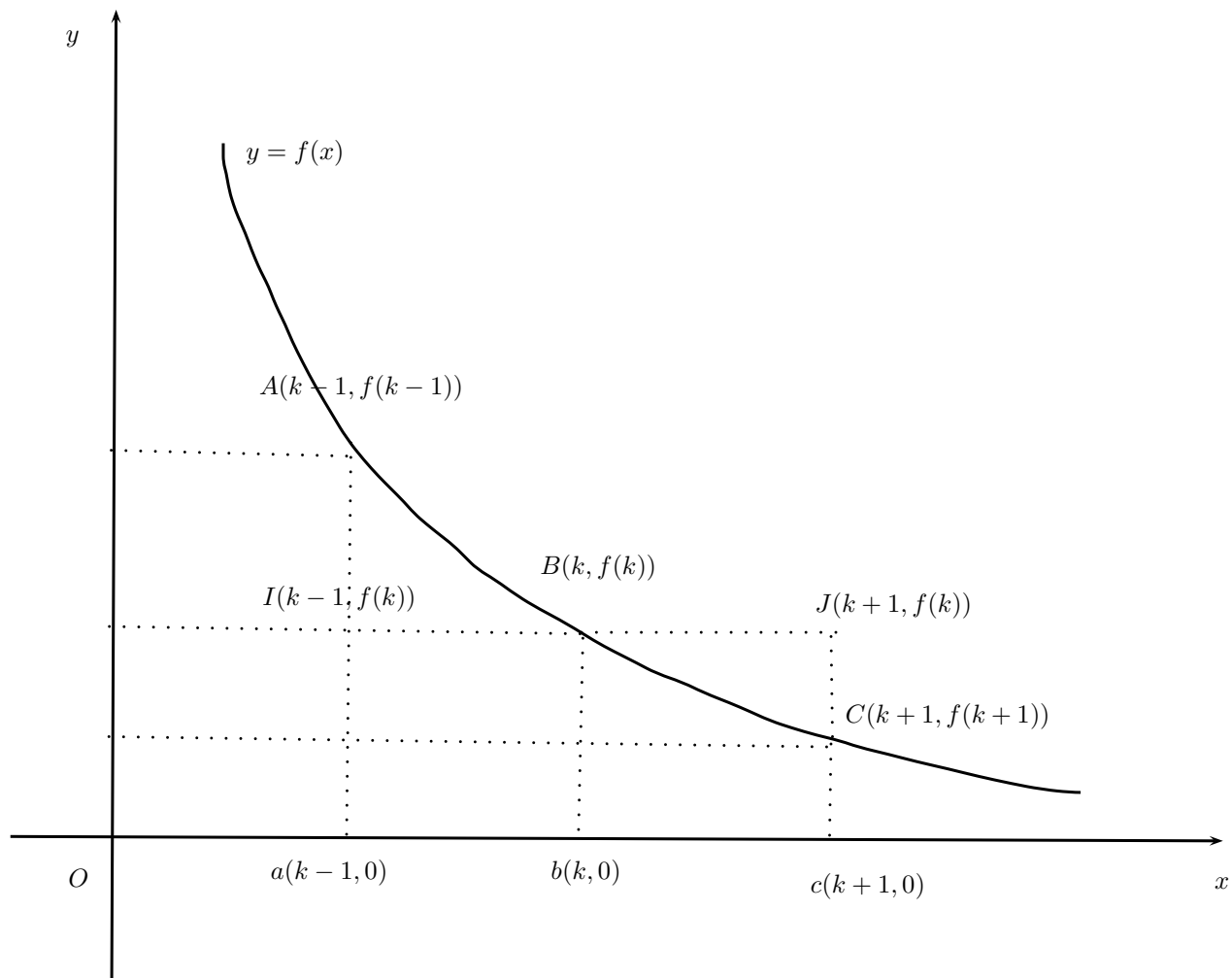
Corrigé

Préliminaire

Soit n_0 un entier naturel non nul et f une fonction à valeurs positives, continue par morceaux (hypothèse oubliée par l'énoncé), décroissante sur $[n_0, +\infty[$.

- a. Soit k entier naturel tel que $k \geq n_0 + 1$. f étant décroissante, $\begin{cases} \forall t \in [k, k+1] & f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \\ \forall t \in [k-1, k] & f(k) \leq f(t) \leq f(k-1) \end{cases}$. D'où :

$$\boxed{\int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt}$$



La double inégalité demandée traduit le fait que l'aire sous la courbe délimitée par $bcBC$ est inférieure ou égale à l'aire du rectangle $bcBJ$ et que l'aire sous la courbe délimitée par $abAB$ est supérieure ou égale à l'aire du rectangle $abBI$; les deux rectangles ont des côtés de longueur 1 et $f(k)$.

- b. Soit $n \geq n_0 + 1$.

$$\boxed{\forall n \geq n_0 + 1, \int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt = \sum_{k=n_0+1}^n \int_k^{k+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^n f(k) \leq \sum_{k=n_0+1}^n \int_{k-1}^k f(t) dt = \int_{n_0}^n f(t) dt}$$

- c. Rappelons des résultats du cours :

La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ est une série positive. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles définies

par :

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k)$$

est majorée et dans ce cas la somme de la série est : $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} f(n) = \sup_{n \geq n_0} S_n$.

L'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ de la fonction positive f est convergente si et seulement si la fonction F définie par :

$$\forall x \geq n_0, F(x) = \int_{n_0}^x f(t) dt$$

est majorée et dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \geq n_0} F(x)$.

On va montrer que la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

– Supposons que l'intégrale généralisée converge. Comme dans ce cas : $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt = \sup_{x \geq n_0} F(x)$, la deuxième inégalité du b donne :

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^n f(k) = \sum_{k=n_0+1}^n f(k) + f(n_0) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt + f(n_0)$$

La série positive converge puisque la suite de ses sommes partielles est majorée.

– Supposons que la série converge. La première inégalité du b donne alors pour tout $n \geq n_0 + 1$: $\int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$.

D'où :

$$\forall n \geq n_0 + 1, F(n+1) = \int_{n_0}^{n+1} f(t) dt = \int_{n_0}^{n_0+1} f(t) dt + \int_{n_0+1}^{n+1} f(t) dt \leq \int_{n_0}^{n_0+1} f(t) dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Quel que soit $x \geq n_0$, soit $[x]$ la partie entière de x définie comme l'entier vérifiant $[x] \leq x < [x] + 1$. Alors , comme F est croissante, car f est positive :

$$\forall x \geq n_0, F(x) \leq F([x] + 1) \leq \int_{n_0}^{n_0+1} f(t) dt + \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k)$$

Et, comme F est majorée, l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge.

On a bien montré la série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt$ converge,

et en cas de convergence, en passant à la limite pour $n \rightarrow +\infty$ dans l' inégalité du b :

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{+\infty} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} f(k) \leq \int_{n_0}^{+\infty} f(t) dt}$$

Partie A

1)

a. La fonction f définie sur $[e, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e, +\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.

Bien sûr, nul besoin de calculer f' pour le sens de variation : f est décroissante sur $[e, +\infty[$ puisque f est l'inverse d'une fonction croissante positive : mais puisque l'énoncé le demande :

$$\boxed{\forall x \geq e, f'(x) = -\frac{1}{t^2(\ln t)^3}(\ln t + 2)}$$

- b. f décroît sur $[e, +\infty[$ de $\frac{1}{e}$ à 0. L'axe Ox est asymptote.
 c.
 d. Une primitive sur $[e, +\infty[$ de f , continue sur cet intervalle est F définie par :

$$\forall x \geq e, F(x) = -\frac{1}{\ln x}$$

Donc $\forall x \geq e, \int_e^x \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = \left[-\frac{1}{\ln t} \right]_e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$

L'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt$ converge donc et $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t(\ln t)^2} dt = 1.$

- e. D'après le préliminaire, puisque f est cpm et décroissante sur $[e, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 2} f(n) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

2)

- a. La fonction g définie sur $[e, +\infty[$ par $g(t) = \frac{1}{t^2(\ln t)^2}$ est C^∞ sur $[e, +\infty[$, car quotient de fonctions C^∞ sur $[e, +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas.
 Bien sûr, dans cette question aussi, nul besoin de calculer g' pour le sens de variation : g est décroissante sur $[e, +\infty[$ puisque g est l'inverse d'une fonction croissante positive : mais puisque l'énoncé le demande :

$$\forall t \geq e, g'(t) = -2 \frac{\ln t + 1}{t^3(\ln t)^3}$$

- b. g décroît sur $[e, +\infty[$ de $\frac{1}{e^2}$ à 0. L'axe Ox est asymptote.
 c.
 d.

$$\forall t \geq e, 0 \leq g(t) \leq \frac{1}{t^2}$$

Or l'intégrale de Riemman $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge car l'exposant de t au dénominateur est strictement supérieur à 1.

Par comparaison par inégalité des intégrales généralisées des fonctions positives, l'intégrale généralisée $\int_e^{+\infty} \frac{1}{t^2(\ln t)^2} dt$ converge aussi.

- e. D'après le préliminaire, puisque g est cpm et décroissante sur $[e, +\infty[$, la série $\sum_{n \geq 2} g(n) = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^2(\ln n)^2}$ converge.

3)

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par : $u_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2.$

- a.

$$\forall n \geq 1, I_n = \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_n^{n+1} = \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)$$

- b. La fonction h définie sur $[e, +\infty[$ par $h(t) = \frac{\ln t}{t}$ est décroissante sur $[e, +\infty[$, puisque :

$$\forall t \in [e, +\infty[, h'(t) = \frac{1 - \ln t}{t^2} \leq 0$$

Etudions les variations de la suite (u_n) :

$$\forall n \geq 3, u_{n+1} - u_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2) \underset{\text{cf 3-a}}{=} \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \int_n^{n+1} \left(\frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln t}{t} \right) dt \underset{h \searrow}{\leq} 0$$

La suite $(u_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.

c.

$$\forall n \geq 3, u_n = \frac{\ln 2}{2} + \sum_{p=3}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \stackrel{\text{Préliminaire b}}{\geq} \frac{\ln 2}{2} + \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt - \frac{1}{2}(\ln n)^2$$

$$\text{Or } \int_3^{n+1} \frac{\ln t}{t} dt = \left[\frac{(\ln t)^2}{2} \right]_3^{n+1} = \frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2). \text{ Donc :}$$

$$\forall n \geq 3, u_n \geq \frac{\ln 2}{2} - \frac{(\ln 3)^2}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}((\ln(n+1))^2 - (\ln n)^2)}_{\geq 0}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall n \geq 3, u_n \geq \frac{\ln 2 - (\ln 3)^2}{2}}$$

Remarque : l'énoncé indiquait à tort de démontrer cette propriété pour $n \geq 1$.

d. La suite (u_n) est décroissante et minorée : elle converge donc.

e.

$$\forall n \geq 2, u_n = \sum_{p=1}^n \frac{\ln p}{p} - \frac{1}{2}(\ln n)^2 \implies \forall n \geq 2, \frac{u_n}{\ln n} = \sum_{p=1}^n \underbrace{\frac{\ln p}{\ln n}}_{\leq 1} \frac{1}{p} - \frac{\ln n}{2}$$

D'où :

$$\boxed{\forall n \geq 2, \frac{u_n}{\ln n} + \frac{\ln n}{2} \leq \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}}$$

Comme la suite (u_n) converge, le premier membre de l'inégalité tend vers $+\infty$ pour n tendant vers l'infini. Ainsi :

$$\boxed{H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty}$$

La série harmonique de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

4)

On considère la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ définie par : $H_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p}$.

a. On applique le préliminaire b à la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t}$ et en prenant $n_0 = 1$:

$$\forall n \geq 2, 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq H_n = 1 + \sum_{p=2}^n \frac{1}{p} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \geq 1, \ln(n+1) \leq \ln(n+1) + \underbrace{(1 - \ln 2)}_{\geq 0} \leq H_n \leq 1 + \ln n}$$

Il est effectivement facile de vérifier que la formule est vraie pour $n = 1$.

b. Posons : $\forall n \geq 1, \gamma_n = H_n - \ln n$. D'après le a, $\forall n \geq 1, 0 \leq \ln(n+1) - \ln n \leq \gamma_n \leq 1$.

La suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, d'après le a. Etudions les variations de cette suite.

$$\forall n \geq 1, \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n+1} - (\ln(n+1) - \ln n)$$

Soit la fonction φ définie par : $\forall x > 0, \varphi(x) = \frac{1}{x+1} - (\ln(x+1) - \ln x)$.

$$\forall x > 0, \varphi'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x+1)^2} \geq 0$$

Donc φ est croissante sur $]0, +\infty[$. Or $\varphi(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\forall x > 0, \varphi(x) \leq 0$.

Ainsi $\forall n \geq 1, \gamma_{n+1} - \gamma_n = \varphi(n) \leq 0$.

La suite (γ_n) est décroissante et minorée par 0. Elle converge donc. Comme la suite (γ_n) est majorée par 1 et minorée par 0, sa limite, notée l vérifie $0 \leq l \leq 1$.

c. Formons un développement généralisé en l'infini de $\gamma_{n+1} - \gamma_n$:

$$\forall n \geq 1, \gamma_{n+1} - \gamma_n = \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \varepsilon(n) \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \right) = -\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} \varepsilon(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Comme la série de référence de terme général $\frac{1}{n^2}$, par comparaison par équivalence des séries de signe constant, on en déduit que la série de terme général $\gamma_{n+1} - \gamma_n$ converge. Notons Γ sa somme. Alors :

$$\Gamma_{n-1} = \sum_{p=1}^{n-1} (\gamma_{p+1} - \gamma_p) = \gamma_n - \gamma_1 = \gamma_n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma \implies \gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma + 1 = l$$

On retrouve le résultat du b : la suite de terme général $\gamma_n = H_n - \ln n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} - \ln n$ est convergente.

d.

$$\sum_{p=2}^n \left(\frac{1}{p} - \ln \frac{p}{p-1} \right) = \sum_{p=2}^n (H_p - H_{p-1} - (\ln p - \ln(p-1))) = \sum_{p=2}^n (\gamma_p - \gamma_{p-1}) = \Gamma_{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Gamma = l - 1$$

Donc :

$$\sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p} - \ln \frac{p}{p-1} \right) = l - 1$$

e. Bien sûr, $\forall n \geq 1, \gamma_n = \gamma_1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\gamma_k - \gamma_{k-1})$. Donc, d'après le d :

$$\forall n \geq 1, \gamma_n - l = 1 + \sum_{k=2}^{n-1} (\gamma_k - \gamma_{k-1}) - \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right) + 1 \right) = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right) - \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k}{k-1} \right)$$

Ainsi :

$$\forall n \geq 1, \gamma_n - l = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$$

f. Formons un développement généralisé en l'infini :

$$\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} = -\ln \left(1 - \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{k}} = -\left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} + \frac{1}{k^3} \varepsilon(k) \right) - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \varepsilon(k) \right)$$

$$\text{D'où } \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} = -\frac{1}{6k^3} + \frac{1}{k^3} \varepsilon(k) = \frac{1}{k^2} \varepsilon(k). \text{ Ainsi :}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 0, \forall k \geq n_0, \left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{k^2}$$

g. Comme la série de Riemann de terme général $\frac{1}{k^2}$ converge, la série de terme général $\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)}$ converge absolument et donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 0, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

- h. En fait, si on considère la fonction définie par $f(t) = \frac{1}{t^2}$, si on applique la deuxième inégalité de la fin du corrigé du préliminaire à cette fonction, en remplaçant n_0 par n , comme $\int_n^{+\infty} f(t) dt = \frac{1}{n}$, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 0, \forall n \geq n_0, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \frac{1}{n}$$

Comme $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k(k-1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{2n}$, on peut écrire :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n_0 \neq 0, \forall n \geq n_0, \left| H_n - l - \ln n - \frac{1}{2n} \right| = \left| \gamma_n - l - \frac{1}{2n} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\ln \frac{k}{k-1} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2k(k-1)} \right) \right| \leq \varepsilon \frac{1}{n}$$

Et donc, non seulement comme l'énoncé le demande, on a :

$$H_n - l - \ln n - \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Mais de plus, on obtient un développement asymptotique de H_n :

$$H_n = \ln n + l + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \varepsilon(n)$$

Partie B

Soient h et β deux réels, avec $h > 0$.

1)

Comme la puissance l'emporte sur le logarithme :

$$\frac{1}{t^h (\ln t)^\beta} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

2)

La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^h (\ln t)^\beta}$ est positive sur $]0, +\infty[$; n'oublions pas que $(\ln t)^\beta = e^{\beta \ln t}$!

D'après la question précédente, il existe $t_0 > 0$, tel que, pour tout $t \geq t_0$: $0 < \frac{1}{t^h (\ln t)^\beta} < 1$.

3)

Posons $\alpha = 1 + 2h$. Comme $\frac{t^{1+h}}{t^\alpha (\ln t)^\beta} = \frac{1}{t^h (\ln t)^\beta}$, la question précédente montre que :

$$\forall t \geq t_0, 0 < \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} < \frac{1}{t^{1+h}}$$

4)

Montrons la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$, avec $t_0 > 0$ et $\alpha > 1$.

Tout d'abord, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue par morceaux, car continue sur $[t_0, +\infty[$. D'autre part, en

posant $\alpha = 1 + 2h$, $h > 0$, l'intégrale de Riemann $\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{t^{1+h} > 1} dt$ converge.

La question précédente montre, par comparaison par inégalité des intégrales généralisées des fonctions positives que, quel que soit $\alpha > 1$, l'intégrale généralisée $\int_{t_0 > 0}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ converge.

5)

Soit $\alpha > 1$. La fonction f de la question précédente vérifie sur $[2, +\infty[$ les hypothèses du préliminaire ; en particulier, f est décroissante car c'est l'inverse d'une fonction positive croissante.

Donc, l'intégrale généralisée $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} dt$ convergeant, il en est de même de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

Partie C

a. Il est clair que, quel que soit $p > 0$, $\ln(n+p) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

En effet $\frac{\ln(n+p)}{\ln n} = \frac{\ln n + \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{p}{n}\right)}{\ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donc $\frac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\ln n)^2}{\ln n \ln n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Ainsi :

$$v_n = 1 - \frac{[\ln(n+1)]^2}{\ln n \ln(n+2)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Comme $\ln(n+p) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{p}{n}\right) = \ln n \left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{p}{n}\right)}{\ln n}\right)$, on peut écrire :

$$\forall n \geq 2, v_n = 1 - \frac{\left(1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^2}{1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)}{\ln n}}$$

b. On fait un développement asymptotique au voisinage de l'infini :

$$v_n = 1 - \frac{\left[1 + \frac{1}{\ln n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)\right]^2}{1 + \frac{1}{\ln n} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^2}\varepsilon(n)\right)}$$

Rappelons qu'au voisinage de 0 : $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$. D'où :

$$v_n = 1 - \left[1 + \frac{2}{\ln n} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) + \frac{1}{n^2(\ln n)^2} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2}\varepsilon(n)\right] \left[1 - \frac{1}{\ln n} \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}\right) + \frac{4}{n^2(\ln n)^2} + \frac{1}{n^2(\ln n)^2}\varepsilon(n)\right]$$

Il existe donc k réel tels que : $v_n = -\frac{1}{n^2 \ln n} + \frac{k}{n^2 (\ln n)^2} + \frac{1}{n^2 (\ln n)^2} \varepsilon(n)$.

Donc $\left|v_n + \frac{1}{n^2 \ln n}\right| = \frac{1}{n^2 (\ln n)^2} |k + \varepsilon(n)|$. Comme $\varepsilon(n)$ est bornée, puisque $\varepsilon(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, il existe donc $a = -1$ et b réel tel que, lorsque n tend vers l'infini :

$$\left|v_n - \frac{a}{n^2 \ln n}\right| \leq \frac{b}{n^2 (\ln n)^2}$$

Or :

$$|v_n| = \left|\left(v_n - \frac{a}{n^2 \ln n}\right) + \frac{a}{n^2 \ln n}\right| \leq \left|v_n - \frac{b}{n^2 (\ln n)^2}\right| + \frac{|a|}{n^2 \ln n} \leq \frac{b}{n^2 (\ln n)^2} + \frac{|a|}{n^2 \ln n} = t_n$$

La série de terme général t_n converge comme somme de deux séries convergentes, d'après la deuxième partie.

Par comparaison par inégalité des séries positives, on en déduit que la série de terme général v_n converge absolument.