X 2023

Épreuve de mathématiques B, MP & MPI, quatre heures

(corrigé)

Première partie

1. Soient $\rho > 0$ et $(f, g) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}))^2$. Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ les deux séries entières convergentes sur U_ρ et dont les sommes valent respectivement f et g. En tant que somme de séries convergentes, la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_n + b_n)t^n$ converge sur U_ρ et on a :

$$\forall t \in U_\rho, \quad (f+g)(t) = f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)t^n,$$

d'où le résultat : $f + g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. L'addition dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ et $\mathscr{D}_\rho(\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ se faisant coefficient par coefficient, la stabilité par somme de $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ implique celle de $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ et $\mathscr{D}_\rho(\mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{R}))$ pour tous entiers naturels m et n.

2. Soient $\rho > 0$ et $(f, g) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}))^2$. On reprend les notations $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ de la question précédente, et on note $\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ le produit de Cauchy de ces deux séries. Comme $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ sont de rayon de convergence supérieur ou égal à ρ, il en est de même de leur produit de Cauchy, et pour tout $t \in U_\rho$ on a :

$$f(t)g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n,$$

d'où le résultat : $f \cdot g \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$, et cet ensemble est stable par produit.

À présent, soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, et soit $(A, B) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})))^2$. On veut montrer : $A \cdot B \in \mathscr{D}_\rho(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$. Pour cela, notons :

$$\forall t \in U_\rho, \quad A(t) = ((f_{i,j}(t)))_{1\leqslant i,j\leqslant n}, \quad B(t) = ((g_{i,j}(t)))_{1\leqslant i,j\leqslant n}.$$

Les coefficients de A et B sont des fonctions développables en série entière sur U_ρ. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient (i, j) de AB est :

$$h_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} f_{i,k} \cdot g_{k,j}.$$

Or on a démontré ci-dessus la stabilité par produit dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$, donc : $\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3$, $f_{i,k} \cdot g_{k,j} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. Par la question précédente, une somme de fonctions de $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ est toujours dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$, donc $h_{i,j}$ est dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Ceci montre que $A \cdot B$ est dans $\mathscr{D}_\rho(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$: d'où le résultat. Cet ensemble est stable par produit.

3. Soit $(f, g) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}))^2$. On suppose : $f_{|U_r} = g_{|U_r}$. Comme dans les questions précédentes, on note $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ les deux séries entières dont les sommes donnent respectivement f et g. Par hypothèse, on a :

$$\forall t \in U_r, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n.$$

Puisque ces deux sommes de séries entières coïncident sur un voisinage de 0, on a par unicité des coefficients : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$. Ainsi $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ sont égales, et donc leurs sommes f et g le sont aussi. D'où le résultat : l'application $f \mapsto f_{|U_r}$ définie sur $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ est injective.

4. Notons que la première question confère bien à $\mathscr{D}_\rho$ une structure de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{U_\rho}$, la stabilité par multiplication externe étant évidente (de plus $\mathscr{D}_\rho$ contient évidemment l'application identiquement nulle).

L'application $\|\cdot\|_r$ est clairement positive, homogène par multiplicativité de la valeur absolue, et vérifie l'inégalité triangulaire grâce à cette dernière également. Seule la propriété de séparation nécessite quelques explications non triviales. Soit $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. On suppose : $\|f\|_r = 0$. Comme une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| r^n = 0$, et comme $r \neq 0$ ceci impose $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors : $\forall t \in]-\rho, \rho[$, $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n = 0$, c'est-à-dire : $f = 0$. Ceci montre que la propriété de séparation est également vérifiée, et donc $\|\cdot\|_r$ est bien une norme sur $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$.

Soit $(f, g) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}))^2$. Montrons : $\|fg\|_r \leqslant \|f\|_r \|g\|_r$. Encore une fois, soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n t^n$ les deux séries entières dont les sommes donnent respectivement f et g, et soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n t^n$ leur produit de Cauchy. On a :

$$\|fg\|_r = \sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| r^n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \, r^k \, |b_{n-k}| \, r^{n-k}.$$

On reconnaît le produit de Cauchy des séries numériques $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n| r^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} |b_n| r^n$, dont on sait qu'elles convergent puisque r est par hypothèse dans l'intervalle ouvert de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n t^n$. Donc :

$$\|fg\|_r \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \, r^n \times \sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| \, r^n = \|f\|_r \|g\|_r,$$

d'où le résultat.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in U_r$, on a par l'inégalité triangulaire :

$$|f_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} t^k \right| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} \right| \cdot |t|^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} \right| r^k = \|f_n\|_r,$$

et la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \|f_n\|_r$ converge par hypothèse. Comme la majoration ci-dessus est indépendante de t, le théorème de comparaison des séries à termes positifs permet bien de conclure que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[-r, r]$ (et donc sur U_r en particulier, ce qui répond à la question), donc uniformément aussi et la somme $f = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ existe. La majoration ci-dessus implique aussi par ailleurs que pour tout $t \in [-r, r]$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} t^k \right|$ converge, donc par le théorème de Fubini il en est de même de la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} t^k$ pour tout $t \in [-r, r]$, et on a :

$$\forall t \in [-r, r], \quad f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!} \right) t^k,$$

donc : $f \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R})$. Étudions à présent la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ pour la norme $\|\cdot\|_r$. On a, d'après l'égalité ci-dessus vérifiée par f :

$$\forall N \in \mathbb{N},\ \forall t \in [-r,r], \quad \sum_{n=0}^{N} f_n(t) - f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right) t^k,$$

donc :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \left\|\sum_{n=0}^{N} f_n - f\right\|_r = \sum_{k=0}^{+\infty}\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k.$$

Comme le terme général de cette double somme est positif, par le théorème de Fubini on peut écrire :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left\|\sum_{n=0}^{N} f_n - f\right\|_r \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}\right| r^k = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_r.$$

On reconnaît le reste de la série convergente $\sum_{n\geqslant 0} \|f_n\|_r$. Il converge vers 0. Par le théorème des gendarmes, on a donc bien : $\lim_{N\to+\infty} \left\|\sum_{n=0}^{N} f_n - f\right\|_r = 0$, ce qu'il fallait démontrer : la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|_r$.

6. **6a.** Supposons le résultat démontré pour tout $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ tel que $f(0) = 1$ **(H)**, et soit $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ tel que $f(0) \neq 0$. En notant $g = \dfrac{f}{f(0)}$, on remarque que $g(0) = 1$ et donc d'après **(H)** il existe $r \leqslant \rho$ tel que : $\dfrac{1}{g} \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R})$. Ainsi : $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{f(0)}\dfrac{1}{g}$ montre que $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R})$ (l'égalité précédente est sur U_r).

Ainsi, montrer **(H)** suffit à obtenir le cas général.

6b. Puisque les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ sont de rayons de convergence supérieur ou égal à r, leur produit de Cauchy $\sum_{n\geqslant 0} c_n t^n$ est également de rayon de convergence supérieur ou égal à r. De plus, pour tout $t \in U_r$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) = f(t)g(t) = 1.$$

Ainsi les fonctions développables en série entière $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$ et $t \mapsto 1$ coïncident au voisinage de 0, donc par unicité des coefficients l'égalité ci-dessus est vraie si et seulement si : $c_0 = 1$, et : $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $c_n = 0$. Or, par définition d'un produit de Cauchy, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

et donc les égalités $c_0 = 1$ et c_n pour tout entier $n \geqslant 1$ donnent, en isolant b_0 et b_n respectivement :

$$\begin{cases} b_0 = \dfrac{1}{a_0} = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}, \quad b_n = -\dfrac{1}{a_0}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = -\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}, \end{cases}$$

d'où le résultat.

6c. La série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à ρ. Par définition du rayon de convergence, pour tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r < \rho$ la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Prenons par exemple $r = \dfrac{\rho}{2} > 0$. Il existe alors $m \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leqslant m$. Pour $n = 0$, on a en particulier : $m \geqslant |a_0| = 1$. Puisque $m \geqslant 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $m \leqslant m^n$. On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $|a_n| \leqslant \left(\dfrac{m}{r}\right)^n$, et on remarque que l'inégalité reste valable pour $n = 0$. D'où le résultat en posant : $c = \dfrac{m}{r} > 0$.

6d. On montre le résultat voulu par récurrence forte sur n. Pour $n = 0$, cela découle du fait que : $|b_0| = |a_0| = 1 \leqslant (2\cdot 0)^0$, ce qui initialise la proposition. À présent, soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|b_k| \leqslant (2c)^k$. Alors, par l'égalité de la question **6b**, on a :

$$|b_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|\cdot|b_{n+1-k}| \leqslant \sum_{k=1}^{n+1} c^k\cdot(2c)^{n+1-k} = (2c)^{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k} \leqslant c^{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k} = (2c)^{n+1},$$

d'où le résultat au rang $n+1$. On a initialisé la proposition et démontré son hérédité, donc par principe de récurrence on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|b_n| \leqslant (2c)^n$.

6e. Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$. D'après la question précédente, R est supérieur ou égal au rayon de convergence de la série géométrique $\sum_{n\geqslant 0}(2ct)^n$, qui vaut $\dfrac{1}{2c} > 0$. Donc : $R > 0$. Posons : $r = \min(R, \rho) > 0$, et notons g la somme de cette série entière. D'après l'équivalence montrée dans la question **6b** (l'énoncé ne mentionne pas d'équivalence, mais la réciproque est mentionnée dans notre correction et facile à déduire de notre résolution), on a donc, pour tout $t \in U_r$: $f(t)g(t) = 1$, donc : $\forall t \in U_r$, $\dfrac{1}{f(t)} = g(t)$, ce qui démontre bien le résultat annoncé puisque $g \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R})$.

7. Soit $(f, g) \in (\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}))^2$. Comme d'habitude, $\sum_{n\geqslant 0} a_n t^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n$ désignent les séries entières dont les sommes donnent f et g respectivement. On suppose : $f\cdot g = 0$, et on veut montrer que $f = 0$ ou $g = 0$. Cela revient à démontrer que si $f \neq 0$, alors nécessairement $g = 0$. Supposons donc f non identiquement nulle, et notons k le plus petit entier naturel tel que $a_k \neq 0$. Un tel entier existe nécessairement, sinon f est identiquement nulle. Alors $h : t \mapsto \dfrac{f(t)}{t^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{k+n}t^n$ est non nulle en 0 et est dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. Par la question précédente, il existe $r < \rho$ tel que $\dfrac{1}{h}$ soit dans $\mathscr{D}_r(\mathbb{R})$. En multipliant l'égalité $fg = 0$ par $\dfrac{1}{h}$, on obtient : $\forall t \in U_r$, $t^k g(t) = 0$. Pour $t \neq 0$, on a donc : $\forall t \in U_r \setminus \{0\}$, $g(t) = 0$, et par continuité d'une fonction développable en série entière cela vaut aussi en $t = 0$. Ainsi g est nulle sur U_r, donc par la question **3** on a : $g = 0$. D'où le résultat : si $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$, donc $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ est intègre.

Deuxième partie

8. **8a.** La positivité, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire ne posent pas de souci : ces trois propriétés découlent du fait que $s > 0$ et que $\|\cdot\|_r$ soit une norme sur $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. Vérifions la propriété de séparation : soit $P = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$. On suppose : $\|P\|_{r,s} = 0$. Comme $\|f_i\|_r \cdot s^i$ est positif pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, et qu'une somme de réels positifs est nulle si et seulement si chaque terme de cette somme est nul, on en déduit : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\|f_i\|_r \cdot s^i = 0$. Or $s > 0$, donc : $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $\|f_i\|_r = 0$. Comme $\|\cdot\|_r$ est une norme, les égalités précédentes impliquent la nullité de tous les f_i, et donc aussi de P. Ainsi $\|\cdot\|$ vérifie également la propriété de séparation, et c'est bien une norme sur $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$.

8b. Soient $P \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ et $Q \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_m[X])$. Écrivons : $P = \sum_{i=0}^{n} f_i X^i$, et : $P = \sum_{j=0}^{m} g_j X^j$, où les f_i et les g_j sont dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ pour tous $i \in [\![0,n]\!]$ et $j \in [\![0,m]\!]$. Pour simplifier ce qui suit, on pose également, pour tous entiers i et j tels que $i > n$ et $j > m$: $f_i = 0$, $g_j = 0$. Alors :

$$PQ = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} \right) X^k.$$

Puisque $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ est un anneau, $\sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i}$ appartient à $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![0,m+n]\!]$, donc $PQ \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n+m}[X])$. De plus $\|\cdot\|_r$ vérifie l'inégalité triangulaire en tant que norme, donc :

$$\|PQ\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{m+n} \left\| \sum_{i=0}^{k} f_i g_{k-i} \right\|_r s^k \leqslant \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{k} \|f_i g_{k-i}\|_r s^k.$$

De la question **4**, il découle :

$$\|PQ\|_{r,s} \leqslant \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{i=0}^{k} \|f_i\|_r s^i \|g_{k-i}\|_r s^{k-i} = \left(\sum_{i=0}^{m} \|f_i\|_r s^i \right) \left(\sum_{j=0}^{n} \|g_j\|_r s^j \right) = \|P\|_{r,s} \|Q\|_{r,s},$$

d'où le résultat.

9. **9a.** L'énoncé ne précise pas le sens de l'appartenance $R \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ lorsque $d = 0$. Nous présumons que par convention, $\mathbb{R}_k[X] = \{0\}$ si $k < 0$. Avec cette convention, le résultat à démontrer est valable y compris si $n < d$ (il suffit dans ce cas de prendre $Q = 0$ et $R = A \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X]) \subseteq \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ pour avoir $A = BQ + R$ avec les conditions requises).

Nous allons imiter la démonstration de l'existence d'une division euclidienne sur $\mathbb{R}[X]$, au contexte de ce problème. On fixe B unitaire et de degré d, comme indiqué dans l'énoncé. Pour tout entier $n \geqslant d$, soit P_n la proposition suivante :

« Pour tout $A \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$, il existe $(Q,R) \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X]) \times \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ tel que : $A = BQ + R$. »

Démontrons que P_n est vraie pour tout entier $n \geqslant d$ par récurrence forte.

Supposons d'abord $n = d$. Soit $A \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_d[X])$, dont on note f_d le coefficient dominant. Il suffit alors de prendre $Q = f_d$ et $R = A - f_d B$ pour avoir $A = BQ + R$; avec ces définitions, on a bien $Q \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_0[X])$ et $R \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ comme espéré. D'où P_d.

Passons à l'hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier supérieur ou égal à d. Ou suppose que P_k est vraie pour tout $k \in [\![d,n]\!]$ (pour $k < d$ on sait déjà que c'est vrai d'après le début de cette résolution : ainsi, au moment d'utiliser l'hypothèse de récurrence ci-dessous, nous ne nous évertuerons pas à vérifier si l'on utilise bien P_k avec $k \geqslant d$). Soit $A \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n+1}[X])$. On peut l'écrire : $A = A_0 + f_{n+1} X^{n+1}$, avec $f_{n+1} \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ et $A_0 \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$. Alors le polynôme :

$$A - f_{n+1} X^{n+1-d} B$$

est de degré au plus n. En effet B est supposé unitaire, donc il est de la forme $B = X^d + B_0$ avec $B_0 \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$. Alors $X^{n+1-d} B_0$ est de degré au plus n, donc :

$$A - f_{n+1} X^{n+1-d} B = A_0 + f_{n+1} X^{n+1-d}(X^d - B) = A_0 - f_{n+1} X^{n+1-d} B_0$$

est la somme de deux polynômes de degré au plus n et est aussi de degré au plus n. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence : il existe $(Q_0, R_0) \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X]) \times \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ tel que : $A - f_{n+1}X^{n+1-d}B = BQ_0 + R_0$ (en principe, l'hypothèse de récurrence nous enseigne que $Q \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{k-d}[X])$ avec $k = \deg(A_0 - f_{n+1}X^{n+1-d}B_0)$, mais ce n'est pas un problème vu qu'on a l'inclusion $\mathbb{R}_{k-d}[X] \subseteq \mathbb{R}_{n-d}[X]$). Alors :

$$A = B(f_{n+1}X^{n+1-d} + Q_0) + R_0$$

et il suffit de poser $(Q, R) = (f_{n+1}X^{n+1-d} + Q_0, R_0)$ pour avoir le résultat voulu (on a bien $Q \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n+1-d}[X])$, puisque Q est la somme de deux polynômes dans cet anneau). D'où P_{n+1}.

Ayant montré l'initialisation et l'hérédité, par principe de récurrence on a le résultat pour tout entier $n \geqslant d$ (et même pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, comme nous l'avons expliqué au début de la résolution).

Montrons à présent l'unicité du couple (Q, R). Soit $A \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$ et soient (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) deux couples dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X]) \times \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])$ tels que : $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$. On a alors : $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Supposons : $Q_1 - Q_2 \neq 0$. En comparant les degrés, on doit avoir : $\deg(B(Q_1 - Q_2)) \leqslant d - 1$. Or, si l'on note $Q_1 - Q_2 = qX^\ell + Q_3$ avec $\ell = \deg(Q_1 - Q_2)$, $q \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, et $Q_3 \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{\ell-1}[X])$, alors on a :

$$B(Q_1 - Q_2) = (X^d + B_0)(qX^\ell + Q_3) = qX^{d+\ell} + \underbrace{(X^dQ_3 + qB_0X^\ell + B_0Q_3)}_{\deg \leqslant \ell+d-1},$$

ce qui montre que : $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = d + \ell$. Ainsi l'inégalité ci-dessus devient : $\ell \leqslant -1$, ce qui est absurde car $\ell \in \mathbb{N}$. Notre supposition $Q_1 - Q_2 \neq 0$ est donc absurde, et on a : $Q_1 - Q_2 = 0$. Partant de là et de l'égalité $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$, on déduit aisément : $(Q_1, R_1) = (Q_2, R_2)$. D'où le résultat : le couple à convenir est unique.

Remarque. On a montré que $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2)$ ci-dessus. Le fait que B soit unitaire a masqué une subtilité qui est nécessaire pour généraliser cette formule. Comme $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ est *intègre*, on a en fait $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ pour tous polynômes P et Q de $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}[X])$. Nous laissons le lecteur en exercice voir où cette hypothèse d'intégrité intervient.

9b. Suivant l'indication, commençons par traiter le cas où $B = X^d$ (qui vérifie trivialement $\left\|B - X^d\right\|_{r,s} < s^d$, puisque la norme d'un vecteur nul est nulle). On sait dans ce cas expliciter le quotient Q et le reste R de la division euclidienne de A par X^d. En effet, si A s'écrit : $A = \sum_{k=0}^{n} f_kX^k$, avec $f_k \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$A = X^d \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n-d} f_{k+d}X^k\right)}_{\in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{n-d}[X])} + \underbrace{\sum_{k=0}^{d-1} f_kX^k}_{\in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_{d-1}[X])},$$

donc, par unicité du couple (Q, R), on a : $Q = \sum_{k=0}^{n-d} f_{k+d}X^k$, et : $R = \sum_{k=0}^{d-1} f_kX^k$. On en déduit :

$$\|R\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{d-1} \|f_k\|_r \cdot s^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_r \cdot s^k = \|A\|_{r,s} = \frac{s^d \cdot \|A\|_{r,s}}{s^d},$$

et :

$$\|Q\|_{r,s} = \sum_{k=0}^{n-d} \|f_{k+d}\|_r \cdot s^k = \sum_{\ell=d}^{n} \|f_\ell\|_r \cdot s^{\ell-d} \leqslant s^{-d} \sum_{\ell=0}^{n} \|f_\ell\|_r s^\ell = \frac{\|A\|_{r,s}}{s^d}.$$

On a démontré les inégalités voulues dans le cas où $B = X^d$.
On revient au cas général, avec B unitaire de degré d. On a : $A = \left(B - X^d\right) Q + X^d Q + R$, et donc :

$$A - \left(B - X^d\right) Q = X^d Q + R.$$

On tient là la division euclidienne de $A - \left(B - X^d\right) Q$ par X^d : on s'est ramené au cas précédent, ce qui nous permet d'écrire :

$$s^d \|Q\|_{r,s} \leqslant \|A - \left(B - X^d\right) Q\|_{r,s}, \quad \text{et :} \quad \|R\|_{r,s} \leqslant \|A - \left(B - X^d\right) Q\|_{r,s}.$$

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de la question **8b** impliquent :

$$s^d \|Q\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} + \|B - X^d\|_{r,s} \|Q\|_{r,s}, \quad \text{et :} \quad \|R\|_{r,s} \leqslant \|A\|_{r,s} + \|B - X^d\|_{r,s} \|Q\|_{r,s}.$$

Regrouper les termes $\|Q\|_{r,s}$, dans la première inégalité, donne enfin :

$$\|Q\|_{r,s} \leqslant \frac{\|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}},$$

et réexploiter cette inégalité dans celle vérifiée ci-dessus par $\|R\|_{r,s}$ nous permet d'obtenir : $\|R\|_{r,s} \leqslant \dfrac{s^d \cdot \|A\|_{r,s}}{s^d - \|B - X^d\|_{r,s}}$, d'où le résultat.

10. Comme F est de degré d et R est de degré au plus $d-1$, il est manifeste que $F+R$ est de degré d, unitaire parce que F l'est. Montrons : $(F+R)_{|t=0} = X^d$. Comme : $F_{|t=0} = X^d$, il suffit de montrer que $R_{|t=0}$ est le polynôme nul. Or on sait que $P_{|t=0} = \sum\limits_{i=0}^{n} f_i(0) X^i = \sum\limits_{i=d}^{n} f_i(0) X^i = X^d \sum\limits_{i=0}^{n-d} f_{i+d}(0) X^i$ par hypothèse sur les f_i. Ainsi le reste dans la division euclidienne de $P_{|t=0}$ par $F_{|t=0} = X^d$ est nul, mais c'est aussi $R_{|t=0}$ (il suffit d'évaluer en $t=0$ la relation de division euclidienne entre P, F et R, puis de constater que la condition sur le degré du reste reste satisfaite). Par unicité, on a : $R_{|t=0} = 0$. D'où le résultat : $(F+R)_{|t=0} = F_{|t=0} + R_{|t=0} = X^d$.

11. Soient r et s deux réels strictement positifs. Informellement, on nous demande de montrer que pour r et s bien choisis, $\alpha_0 = s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{r,s}$, $\beta_0 = \|1 - Q_0\|_{r,s}$ et $\varepsilon_0 = s^{-d}\|R_0\|_{r,s}$ sont tous les trois « petits » simultanément. Cela nécessite notamment de comprendre pourquoi Q_0 serait proche de 1. On a l'égalité : $P = F_0 Q_0 + R_0$, avec : $F_0 = \sum\limits_{i=0}^{d} f_i X^i$. Notons : $Q_0 = \sum\limits_{i=0}^{n-d} q_i X^i$, où les q_i sont dans $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. En identifiant le coefficient de X^d dans cette égalité, on obtient, si l'on se souvient que R_0 est de degré au plus $d-1$:

$$f_d = \sum_{i=0}^{d} f_i q_{n-d}.$$

Or par hypothèse $f_d = 1$, et tous les f_i pour $i < d$ s'annulent en $t = 0$. Donc, après évaluation en 0, on a :

$$1 = f_d(0) q_0(0) = q_0(0).$$

Or :

$$\begin{aligned}\|1 - Q_0\|_{r,s} &= \|1 - q_0\|_r + \sum_{i=1}^{n-d} \left(\|q_i\|_r - |q_i(0)|\right) s^i + \sum_{i=1}^{n-d} |q_i(0)| s^i \\ &\leqslant \|1 - q_0\|_r + \max_{i \in [\![1, n-d]\!]} \left(\|q_i\|_r - |q_i(0)|\right) \sum_{i=1}^{n} s^i + \sum_{i=1}^{n-d} |q_i(0)| s^i.\end{aligned}$$

On a : $\lim_{s\to 0}\sum_{i=1}^{n} s^i = \lim_{s\to 0}\sum_{i=1}^{n-d} |q_i(0)|s^i = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varepsilon' > 0$ il existe $\eta_\varepsilon > 0$ et $\eta'_\varepsilon > 0$ tel que pour tout $s \in]0, \min(\eta_\varepsilon, \eta_{\varepsilon'})]$, on ait : $\sum_{i=1}^{n} s^i \leqslant \varepsilon$, et : $\sum_{i=1}^{n-d} |q_i(0)|s^i \leqslant \varepsilon'$. On FIXE désormais $s = \min(\eta_\varepsilon, \eta_{\varepsilon'})$ (nous réfléchirons plus tard aux choix de ε et ε' adéquats). Notons bien que ce choix de s ne dépend pas de r. La majoration ci-dessus devient donc, pour tout $r > 0$:

$$\|1 - Q_0\|_{r,s} \leqslant \|1 - q_0\|_r + \max_{i\in[\![1,n-d]\!]} (\|q_i\|_r - |q_i(0)|)\,\varepsilon + \varepsilon'.$$

Par définition de $\|\cdot\|_r$ et continuité en 0 des fonctions développables en série entière, on a de plus :

$$\lim_{r\to 0}\|1 - q_0\|_r = |1 - q_0(0)| = 0, \quad \text{ et : } \quad \forall i \in [\![1, n-d]\!],\ \lim_{r\to 0}(\|q_i\|_r - |q_i(0)|) = 0.$$

On en déduit que pour tous $\varepsilon'' > 0$ et $\varepsilon''' > 0$, il existe $\eta_{\varepsilon'',\varepsilon'''} > 0$ (quitte à diminuer sa valeur pour qu'il convienne pour toutes les quantités ci-dessus à la fois) tel que, pour tout $r \in]0, \eta_{\varepsilon'',\varepsilon'''}]$, on ait :

$$\|1 - q_0\|_r \leqslant \varepsilon'', \quad \max_{i\in[\![1,n-d]\!]} (\|q_i\|_r - |q_i(0)|) \leqslant \varepsilon'''.$$

On a alors, pour tous $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon''' > 0$ et r bien choisi :

$$\beta_0 = \|1 - Q_0\|_{r,s} \leqslant \varepsilon'' + \varepsilon'''\varepsilon + \varepsilon'.$$

Prenons par exemple : $\varepsilon' = \varepsilon'' = \varepsilon''' = \frac{1}{3\cdot 6}$, et : $\varepsilon = 1$ (donc s est fixé égal à $s = \min\left(\eta_1, \eta_{1/18}\right)$). On a donc :

$$\forall r \in \left]0, \eta_{1/18,1/18}\right], \quad \beta_0 \leqslant \frac{3}{3\cdot 6} = \frac{1}{6}.$$

Passons à la majoration de α_0 et ε_0. On a :

$$\alpha_0 = s^{-d}\|F_0 - X^d\|_{r,s} = s^{-d}\sum_{i=0}^{d-1}\|f_i\|_r s^i \leqslant s^{-d}\max_{i\in[\![0,d-1]\!]}(\|f_i\|_r)\sum_{i=0}^{n} s^i,$$

et comme : $\forall i \in [\![1, d-1]\!]$, $\lim_{r\to 0}\|f_i\|_r = |f_i(0)| = 0$, il existe $\eta > 0$ que l'on prend commun à tous les f_i, tel que pour tout $r \in]0, \eta]$ on ait : $\max_{i\in[\![0,d-1]\!]}(\|f_i\|_r) \leqslant \dfrac{1}{6s^{-d}\sum_{i=0}^{n} s^i}$. Alors :

$$\forall r \in]0, \eta], \quad \alpha_0 \leqslant \frac{1}{6}.$$

Enfin ε_0 se majore semblablement, étant donné que $R_{|t=0} = 0$ (le raisonnement est donc en tout point analogue à celui effectué avec $F_0 - X^d$, dont l'évaluation en $t = 0$ était aussi le polynôme nul). On en déduit l'existence de $\eta' > 0$ tel que :

$$\forall r \in]0, \eta'], \quad \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{12}.$$

Prenons à présent : $r = \min\left(\eta, \eta', \eta_{1/18,1/18}\right)$. Les inégalités ci-dessus impliquent :

$$\alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}, \quad \text{ et : } \quad \beta_0 + \varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{3},$$

ce qu'il fallait démontrer.

12. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a :
$$P = F_i Q_i + R_i = F_{i+1} Q_{i+1} + R_{i+1}.$$
On en déduit, pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$(Q_{i+1} - Q_i) F_{i+1} + R_{i+1} = P - Q_i F_{i+1} = F_i Q_i + R_i - Q_i F_{i+1} = Q_i (F_i - F_{i+1}) + R_i,$$
et par définition de la suite $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ on a : $\forall i \in \mathbb{N}$, $F_i - F_{i+1} = -R_i$. D'où :
$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad (Q_{i+1} - Q_i) F_{i+1} + R_{i+1} = (1 - Q_i) R_i,$$
ce qu'il fallait démontrer.

13. Soit $i \in \mathbb{N}$. On a : $F_{i+1} = F_i + R_i$, donc :
$$\alpha_{i+1} = s^{-d} \|F_{i+1} - X^d\|_{r,s} \leqslant s^{-d} \|F_i - X^d\|_{r,s} + s^{-d} \|R_i\|_{r,s} = \alpha_i + \varepsilon_i,$$
et de plus l'inégalité $\alpha_{i+1} < 1$ équivaut à : $\|F_{i+1} - X^d\|_{r,s} < s^d$, donc d'après la question **9b** (appliquée cette fois-ci à la division euclidienne de $(1 - Q_i) R_i$ par F_{i+1} : d'après la question précédente, le quotient est $Q_{i+1} - Q_i$ et le reste R_{i+1}, qui est bien de degré inférieur strictement à $\deg(Q_{i+1}) = \deg(Q_{i+1} - Q_i)$) on a :
$$\|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\|(1 - Q_i) R_i\|_{r,s}}{s^d - \|F_{i+1} - X^d\|_{r,s}}, \qquad \text{et :} \quad \|R_{i+1}\|_{r,s} \leqslant \frac{s^d \cdot \|(1 - Q_i) R_i\|_{r,s}}{s^d - \|F_{i+1} - X^d\|_{r,s}},$$
soit donc, par la question **8b** :
$$\|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\|1 - Q_i\|_{r,s} \|R_i\|_{r,s}}{s^d (1 - \alpha_{i+1})}, \qquad \text{et :} \quad s^d \varepsilon_{i+1} \leqslant \frac{s^d \|1 - Q_i\|_{r,s} \|R_i\|_{r,s}}{1 - \alpha_{i+1}}.$$
Comme : $s^d \|R_i\|_{r,s} = \varepsilon_i$, et : $\|1 - Q_i\|_{r,s} = \beta_i$, la seconde inégalité donne bien : $\varepsilon_{i+1} \leqslant \dfrac{\beta_i \varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}}$.
Pour la première, on utilise l'inégalité triangulaire renversée pour conclure :
$$\beta_{i+1} - \beta_i = \|Q_{i+1} - 1\|_{r,s} - \|Q_i - 1\|_{r,s} \leqslant \|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\|1 - Q_i\|_{r,s} \|R_i\|_{r,s}}{s^d (1 - \alpha_{i+1})} = \frac{\beta_i \varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}},$$
d'où le résultat.

14. Nous allons montrer ces trois majorations par récurrence sur i. Si $i = 0$, alors chaque inégalité est triviale et il y a même égalité. Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons :
$$\alpha_i \leqslant \alpha_0 + 2 \cdot \left(1 - 2^{-i}\right) \cdot \varepsilon_0, \qquad \beta_i \leqslant \beta_0 + \left(1 - 2^{-i}\right) \cdot \varepsilon_0, \qquad \varepsilon_i \leqslant 2^{-i} \cdot \varepsilon_0.$$
D'après la question précédente, on a donc :
$$\begin{aligned} \alpha_{i+1} \leqslant \alpha_0 + 2 \cdot \left(1 - 2^{-i}\right) \cdot \varepsilon_0 + 2^{-i} \cdot \varepsilon_0 &= \alpha_0 + 2 \left(1 - 2^{-i} - 2^{-i-1}\right) \varepsilon_0 \\ &\leqslant \alpha_0 + 2 \left(1 - 2^{-i-1}\right) \varepsilon_0. \end{aligned}$$
Cela donne la première majoration. On en déduit par ailleurs que $\alpha_{i+1} < 1$ puisque, en effet : $\alpha_{i+1} \leqslant \alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$. Donc, d'après la question précédente encore une fois, on a :
$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} \leqslant \frac{\beta_i \varepsilon_i}{1 - \alpha_{i+1}} \leqslant \frac{\left(\beta_0 + (1 - 2^{-i}) \cdot \varepsilon_0\right) 2^{-i} \cdot \varepsilon_0}{1 - \left(\alpha_0 + 2 \left(1 - 2^{-i}\right) \varepsilon_0\right)} &\leqslant \frac{(\beta_0 + \varepsilon_0)\, 2^{-i} \varepsilon_0}{1 - (\alpha_0 + 2\varepsilon_0)} \\ &\leqslant \frac{1}{3} \frac{2^{-i} \varepsilon_0}{1 - \frac{1}{3}} \qquad\qquad (q.\,\mathbf{11}) \\ &\leqslant 2^{-i-1} \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Il reste à majorer β_{i+1}, ce que l'on fait encore grâce à la question précédente, et en réutilisant l'inégalité $\dfrac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant 2^{-i-1}\varepsilon_0$ implicitement démontrée ci-dessus :

$$\beta_{i+1} \leqslant \beta_i + \frac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \beta_0 + (1-2^{-i})\varepsilon_0 + 2^{-i-1}\varepsilon_0 = \beta_0 + (1-2^{-i-1})\varepsilon_0,$$

ce qui achève de démontrer que les majorations au rang i entraînent ces mêmes majorations au rang $i+1$: la propriété a été initialisée et elle est héréditaire, donc par principe de récurrence on a le résultat pour tout entier $i \in \mathbb{N}$.

15. 15a. L'idée derrière la résolution proposée est la suivante : nous voudrions démontrer la convergence de la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ en passant par la convergence de la série télescopique $\sum\limits_{i\geqslant 0}(F_{i+1}-F_i)$. Ce genre d'idée est fructueuse lorsque la limite candidate F est inconnue, ou insuffisamment connue pour étudier $\|F-F_i\|_{r,s}$, tandis que les questions précédentes donnent une indication sur la taille de $\|F_{i+1}-F_i\|_{r,s}$, permettant de démontrer la convergence de $\sum\limits_{i\geqslant 0}\|F_{i+1}-F_i\|_{r,s}$. Mais il y a néanmoins un gros problème : puisque $\mathscr{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$ n'est pas un espace vectoriel de dimension finie, on ne peut pas *a priori* affirmer que la convergence de $\sum\limits_{i\geqslant 0}\|F_{i+1}-F_i\|_{r,s}$ implique celle de $\sum\limits_{i\geqslant 0}(F_{i+1}-F_i)$. Pour contourner cette difficulté, nous allons utiliser la question **5**, qui nous donne une relation entre la convergence pour $\|\cdot\|_r$ et la convergence normale (dont on sait entre autres qu'elle implique la convergence uniforme : ainsi elle permet l'implication que la norme $\|\cdot\|_{r,s}$ ne permet pas).

Faisons. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, notons :

$$F_i = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} f_{j,i}X^j, \qquad \text{avec :} \qquad (f_{j,i})_{0\leqslant j\leqslant d-1} \in (\mathscr{D}_r(\mathbb{R}))^d.$$

Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0,d-1]\!]$, on a :

$$\|f_{j,i+1}-f_{j,i}\|_r \leqslant s^{-j}\|F_{i+1}-F_i\|_{r,s} = s^{-j}\|R_i\|_{r,s} = s^{-d-j}\varepsilon_i \leqslant \frac{s^{-d-j}\varepsilon_0}{2^i},$$

or la série géométrique $\sum\limits_{i\geqslant 0}\dfrac{1}{2^i}$ converge parce que sa raison vérifie : $\dfrac{1}{2} \in]-1,1[$. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, pour tout $j \in [\![0,d-1]\!]$ la série $\sum\limits_{i\geqslant 0}\|f_{j,i+1}-f_{j,i}\|_r$ converge et donc, par la question **5**, la série $\sum\limits_{i\geqslant 0}(f_{j,i+1}-f_{j,i})$ converge normalement vers une fonction $f_j \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R})$, et cette convergence est aussi vraie pour la norme $\|\cdot\|_r$. Par le lien suite-série, on en déduit que pour tout $j \in [\![0,d-1]\!]$ la suite $(f_{j,i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers f_j pour la norme $\|\cdot\|_r$. Posons alors :

$$F = X^d + \sum_{j=0}^{d-1} f_jX^j \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}_d[X]).$$

Ce polynôme est bien unitaire de degré d et vérifie : $F_{|t=0} = X^d$, parce que la convergence normale implique la convergence simple, et $f_{j,i}(0) = 0$ pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0,d-1]\!]$ (puisque $F_{i|t=0} = X^d$ pour tout $i \in \mathbb{N}$). Il reste à vérifier que $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F pour la norme $\|\cdot\|_{r,s}$. Le plus dur a été fait ; on a en effet, pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\|F-F_i\|_{r,s} = \left\|\sum_{j=0}^{d-1}(f_j-f_{j,i})X^j\right\|_{r,s} = \sum_{j=0}^{d-1}\|f_j-f_{j,i}\|_r s^j,$$

et d'après ce qui précède chaque terme de cette somme converge vers 0. D'où :

$$\lim_{i\to+\infty} \|F - F_i\|_{r,s} = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.

15b. On a montré que $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers F (pour $\|\cdot\|_{r,s}$) dans la question précédente, et on en déduit que $(R_i)_{i\in\mathbb{N}} = (F_{i+1} - F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul. Il reste à justifier que la suite $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge, et le résultat demandé en découlera aisément. Pour cela, on imite la stratégie de démonstration de la question **15a**. On rappelle qu'on a démontré en passant, dans la question **13** :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad \|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s} \leqslant \frac{\beta_i \varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}},$$

l'inégalité $\alpha_{i+1} < 1$ étant effectivement vérifiée d'après la question **14** et la majoration $\alpha_0 + 2\varepsilon_0 \leqslant \frac{1}{3}$. Or, en regardant de plus près nos majorations de la question **14** encore une fois, on y a démontré : $\dfrac{\beta_i\varepsilon_i}{1-\alpha_{i+1}} \leqslant \dfrac{\varepsilon_0}{2^{i+1}}$, et la série géométrique $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \frac{1}{2^i}$ converge. Par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{i\geqslant 0} \|Q_{i+1} - Q_i\|_{r,s}$ converge et donc, en imitant le raisonnement de la question **15a**, on en déduit que la suite $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge, au sens de la norme $\|\cdot\|_{r,s}$, vers un polynôme $G \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$. Ainsi on a : $\forall i \in \mathbb{N}$, $P = F_iQ_i + R_i$, où chaque polyôme du membre de droite converge, respectivement vers F, G et 0. Par continuité de l'application bilinéaire $(A, B) \mapsto AB$ sur l'espace vectoriel normé $\mathscr{D}_r(\mathbb{R}_d[X]) \times \mathscr{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$, continuité qui provient de la question **8b**, on a : $\lim\limits_{i\to+\infty} F_iQ_i = FG$. Par conséquent, passer à la limite dans l'égalité ci-dessus donne : $P = FG$, ce qu'il fallait démontrer.

16. Les questions précédentes démontrent le théorème 1 dans le cas où $\lambda = 0$. À présent, si λ est un réel quelconque (qui soit racine de $P_{|t=0}$ avec multiplicité d), on note que $P(X + \lambda)$ est toujours un polynôme unitaire de $\mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$, et que 0 est racine de $P(X + \lambda)_{|t=0}$ d'ordre de multiplicité d. Par les questions précédentes, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r \leqslant \rho$, $F_0 \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}_d[X])$ et $G_0 \in \mathscr{D}_r(\mathbb{R}_{n-d}[X])$ unitaires tels que : $P(X + \lambda) = F_0G_0$, et : $F_{0|t=0} = X^d$. En composant par $X - \lambda$, on a donc : $P = F_0(X - \lambda)G_0(X - \lambda)$, d'où le théorème 1 en posant $F = F_0(X - \lambda)$ et $G = G_0(X - \lambda)$.

17. Posons : $P = X^2 - f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}_n[X])$. Alors $P_{|t=0}$ admet $\sqrt{f(0)}$ comme racine (simple, puisque $f(0) > 0$). Par le théorème 1, il existe $r \in]0, \rho]$ et $(F, G) \in (\mathscr{D}_r(\mathbb{R}_1[X]))^2$, avec F et G unitaires, tels que : $P = FG$, et : $F_{|t=0} = X - \sqrt{f(0)}$. Au vu du degré de F et G, il existe aussi $(f_0, g_0) \in (\mathscr{D}_r(\mathbb{R}))^2$ tel que : $F = X - f_0$, et : $G = X - g_0$. L'objectif est de montrer que l'une de ces deux fonctions est $\sqrt{f}$. Or l'égalité $P = FG$ implique :

$$X^2 - f = X - (f_0 + g_0)X + f_0g_0.$$

Quitte à passer par les évaluations en t, on se convainc qu'on peut identifier les coefficients des polynômes même quand ils sont dans $\mathscr{D}_r(\mathbb{R})$. On a donc :

$$f_0 + g_0 = 0, \quad f_0g_0 = -f.$$

Ceci mis ensemble, on en déduit : $(f_0)^2 = f$. Or $f(0) > 0$ et f est continue en 0 tant que fonction développable en série entière, donc il existe $\rho' \in]0, \rho]$ tel que f soit strictement positive sur $U_{\rho'}$. Ceci autorise à extraire la racine carrée dans l'égalité précédente. Posons :

$\rho_f = \min(\rho', r)$. D'après ce qui précède, il existe une fonction $\varepsilon : U_{\rho_f} \to \{-1, 1\}$ telle que pour tout $t \in U_{\rho_f}$, on ait : $f_0(t) = \varepsilon(t)\sqrt{f(t)}$. De plus ε est continue sur l'intervalle U_{ρ_f} (puisque ε est le quotient de f_0 et $\sqrt{f}$ qui sont continues), donc $\varepsilon(U_{\rho_f})$ est un intervalle inclus dans $\{-1, 1\}$: c'est soit $\{-1\}$, soit $\{1\}$. Le premier cas est exclu, puisque : $\varepsilon(0) = \dfrac{f_0(0)}{\sqrt{f(0)}} = 1$ (rappelons que $F_{|t=0} = X - f_0(0) = X - \sqrt{f(0)}$). Ainsi ε est identiquement constante et égale à 1, donc : $\sqrt{f} = f_0 \in \mathscr{D}_{\rho_f}(\mathbb{R})$. D'où le résultat.

Troisième partie

18. Comme $M_{|t=0}$ est symétrique réelle, par le théorème spectral cette matrice est diagonalisable et, en particulier, son polynôme caractéristique $\chi_{|t=0}$ est scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $M_{|t=0}$ admet une valeur propre réelle. D'où le résultat.

19. Sous l'hypothèse $d = n$, on a : $\chi_{|t=0} = (X - \lambda)^n$, donc le polynôme minimal (qu'on note π) de $M_{|t=0}$ divise $(X - \lambda)^n$ par le théorème de Cayley-Hamilton. Or π est non constant et à racines simples car $M_{|t=0}$ est diagonalisable d'après la question précédente, donc : $\pi = X - \lambda$. Comme π est un polynôme annulateur, on a montré : $M_{|t=0} = \lambda \mathrm{I}_n$.

Voyons comment en déduire l'existence de M_0. Notons : $M = ((m_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient $m_{i,j}$ est une fonction développable en série entière en 0, dont le coefficient constant est $\lambda\delta_{i,j}$ d'après l'égalité $M_{|t=0} = \lambda\mathrm{I}_n$ (la notation $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker). On en déduit que si l'on pose :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \forall t \in U_{\rho_1}, \quad n_{i,j}(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{m_{i,j}^{(k)}(0)}{k!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{m_{i,j}^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} t^k$$

(ces fonctions sont définies de sorte que : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\forall t \in U_{\rho_1}$, $m_{i,j}(t) = \lambda\delta_{i,j} + t n_{i,j}$), et :

$$M_0 = ((n_{i,j}))_{1\leqslant i,j\leqslant n},$$

alors : $\forall a \in U_{\rho_1}$, $M_{|t=a} = \lambda\mathrm{I}_n + aM_0$ d'après la relation donnée ci-dessus entre les $m_{i,j}$ et les $n_{i,j}$. De plus, M_0 appartient à $\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}))$ parce que les $n_{i,j}$ sont dans $\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathbb{R})$ et qu'on a : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j} = m_{j,i}$. D'où le résultat.

Remarque. Dans le cas $d = n$, l'existence de F et G est triviale et on a $\rho_1 = \rho$.

20. Soit $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme $M_{|t=0}$ est symétrique réelle, par le théorème spectral il existe une base orthonormée $(E_1, \ldots, E_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $M_{|t=0}$. Ordonnons-les de sorte à ce que $(E_1, \ldots, E_d)$ soit une base orthonormée de $\ker(M_{|t=0} - \lambda\mathrm{I}_n)$ (ce sous-espace propre est de dimension égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ, c'est-à-dire d). Posons alors : $U = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}((E_1, \ldots, E_d)) \in \mathrm{M}_{n,d}(\mathbb{R})$, et : $V = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}((E_{d+1}, \ldots, E_n)) \in \mathrm{M}_{n,n-d}(\mathbb{R})$. Montrons que ces deux matrices vérifient les trois propriétés requises. Avant cela, notons que grâce au théorème de Cayley-Hamilton, nous savons que nous avons : $A_0 \circ B_0 = \chi(M)_{|t=0} = 0$, donc :

$$\mathrm{im}(B_0) \subseteq \ker(A_0).$$

Cela nous donne une information dimensionnelle sur ces deux espaces vectoriels, dont nous aurons grand besoin ci-dessous. En effet :

$$\ker(A_0) = \ker((M_{|t=0} - \lambda\mathrm{I}_n)^d) \overset{(*)}{=} \ker(M_{|t=0} - \lambda\mathrm{I}_n),$$

où l'inclusion réciproque de $(*)$ est facile et l'inclusion directe conséquence du fait que $M_{|t=0}$ soit diagonalisable : on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu\in\mathrm{Sp}(M_{|t=0})} \ker((M_{|t=0} - \mu\mathrm{I}_n)^{d_\mu})$ par le théorème de Cayley-Hamilton et le lemme des noyaux (d_μ désigne l'ordre de multiplicité de μ) et $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\mu \in \mathrm{Sp}(M_{|t=0})} \ker(M_{|t=0} - \mu \mathrm{I}_n)$ car $M_{|t=0}$ est diagonalisable ; ces deux décompositions de $\mathbb{R}^n$ en somme directe, et les inclusions $\ker(M_{|t=0} - \mu \mathrm{I}_n) \subseteq \ker((M_{|t=0} - \mu \mathrm{I}_n)^{d_\mu})$, impliquent l'égalité de ces sous-espaces vectoriels par unicité de l'écriture des vecteurs dans une somme directe (ou en comparant les dimensions). Or, pour une matrice diagonalisable, les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux ordres de multiplicité des valeurs propres associées : on en déduit que $\ker(A_0)$ est de dimension d. Ainsi les deux inclusions ci-dessus impliquent :

$$\dim(\mathrm{im}(B_0)) \leqslant d.$$

On peut passer à la démonstration de ce qui est demandé.
L'égalité $\mathrm{im}(B_0 U) = \mathrm{im}(B_0)$. Les relations : $\mathrm{Vect}(B_0(E_1, \ldots, E_d)) \subseteq \mathrm{im}(B_0 U) \subseteq \mathrm{im}(B_0)$ sont triviales. On en déduit :

$$\dim(\mathrm{Vect}(B_0(E_1, \ldots, E_d))) \leqslant \dim(\mathrm{im}(B_0 U)) \leqslant \dim(\mathrm{im}(B_0)) \leqslant d.$$

Or nous allons démontrer que l'on a : $\dim(\mathrm{Vect}(B_0(E_1, \ldots, E_d))) = d$. Pour cela, il suffit de démontrer que la famille $(B_0 E_1, \ldots, B_0 E_d)$ est libre, étant donné qu'elle est déjà génératrice. Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que : $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i B_0 E_i = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme $B = G(M)$ et, pour tout $i \in [\![1, d]\!]$, E_i est un vecteur propre de $M_{t=0}$ associé à λ, l'égalité précédente équivaut à : $\sum_{i=1}^{d} \alpha_i G_{|t=0}(\lambda) E_i = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Comme la famille $(E_1, \ldots, E_d)$ est libre, on en déduit : $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_i G_{|t=0}(\lambda) = 0$. Or λ n'est pas racine de $G_{|t=0}$ (par définition de d, F et G), donc : $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\alpha_i = 0$, ce qui démontre que la famille $(B_0 E_1, \ldots, B_0 E_d)$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(B_0(E_1, \ldots, E_d))$, et les inégalités entre dimensions ci-dessus impliquent donc :

$$\dim(\mathrm{Vect}(B_0(E_1, \ldots, E_d))) = \dim(\mathrm{im}(B_0 U)) = \dim(\mathrm{im}(B_0)) = d.$$

Ayant l'inclusion directe et égalité des dimensions, on en déduit : $\mathrm{im}(B_0 U) = \mathrm{im}(B_0)$.
L'égalité $\mathrm{im}(A_0 V) = \mathrm{im}(A_0)$. Le raisonnement est analogue. On a facilement les inclusions : $\mathrm{Vect}(A_0(E_{d+1}, \ldots, E_n)) \subseteq \mathrm{im}(A_0 V) \subseteq \mathrm{im}(A_0)$, et ce dernier espace est de dimension $n - d$ grâce au théorème du rang. Montrons que la famille $(A_0 E_{d+1}, \ldots, A_0 E_n)$ est libre : soit $(\alpha_{d+1}, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n-d}$ tel que : $\sum_{i=d+1}^{n} \alpha_i A_0 E_i = 0_{\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$. Pour tout $i \in [\![d+1, n]\!]$, notons μ_i la valeur propre associée à E_i. Rappelons que, par définition de $E_1, \ldots, E_d$ qui forment une base de $\ker(M_{|t=0} - \lambda \mathrm{I}_n)$, les μ_i sont distincts de λ. En raisonnant comme ci-dessus, on montre qu'on a : $\forall i \in [\![d+1, n]\!]$, $\alpha_i F_{|t=0}(\mu_i) = 0$. Or les μ_i ne sont pas racines de $F_{|t=0} = (X - \lambda)^d$, donc : $\forall i \in [\![d+1, n]\!]$, $\alpha_i = 0$, ce qui démontre que la famille $(A_0 E_{d+1}, \ldots, A_0 E_n)$ est libre. C'est donc une base de $\mathrm{Vect}(A_0(E_{d+1}, \ldots, E_n))$. Par un argument dimensionnel analogue à celui ci-dessus, on a donc : $\dim(\mathrm{Vect}(A_0(E_{d+1}, \ldots, E_n))) = \dim(\mathrm{im}(A_0 V)) = \dim(\mathrm{im}(A_0)) = n - d$. Ayant l'inclusion directe et l'égalité des dimensions, on a : $\mathrm{im}(A_0 V) = \mathrm{im}(A_0)$.
L'inversibilité de la matrice $(B_0 U \mid A_0 V)$. Les deux égalités ci-dessus prouvent en passant que $(B_0 E_1, \ldots, B_0 E_d)$ et $(A_0 E_{d+1}, \ldots, A_0 E_n)$ sont respectivement des bases de $\ker(A_0)$ et $\mathrm{im}(A_0)$ (en tant que familles libres de cardinal maximal). Comme A_0 est une matrice symétrique réelle, ces deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, donc $(B_0 E_1, \ldots, B_0 E_d, A_0 E_{d+1}, \ldots, A_0 E_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, ce qui équivaut à l'inversibilité de la matrice $(B_0 U \mid A_0 V)$: d'où le résultat.

21. Posons : $\forall a \in U_{\rho_1}$, $f(a) = \det(Q_{|t=a})$. C'est une somme de produits de fonctions développables en série entière sur U_{ρ_1}, donc f est développable en série entière sur U_{ρ_1}. De plus : $f(0) =$

$\det((B_0U \mid A_0V)) \neq 0$, donc d'après la question **6** il existe $\rho_2 \leqslant \rho_1$ tel que l'on ait : $\dfrac{1}{f} \in \mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$. En particulier f ne s'annule pas sur U_{ρ_2}. On en déduit que $Q_{|t=a}$ est inversible pour tout $a \in U_{\rho_2}$, et :

$$\forall a \in U_{\rho_2}, \quad \left(Q_{|t=a}\right)^{-1} = \frac{1}{f(a)}\mathrm{Com}(Q_{|t=a})^{\mathrm{T}}.$$

Les coefficients de la comatrice de $Q_{|t=a}$ sont des cofacteurs de $Q_{|t=a}$, c'est-à-dire des sommes de produits de coefficients de $Q_{|t=a}$: en tant que somme de produits de fonctions développables en série entière sur U_{ρ_1}, les coefficients de $\mathrm{Com}(Q_{|t=a})^{\mathrm{T}}$ sont donc dans $\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathbb{R})$. C'est-à-dire : $\mathrm{Com}(Q)^{\mathrm{T}} \in \mathscr{D}_{\rho_1}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$.

En résumé, $\dfrac{1}{f}$ est dans $\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Com}(Q)^{\mathrm{T}}$ dans $\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$, donc par l'égalité ci-dessus Q^{-1} est dans $\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))\cap\mathscr{D}_{\rho_1}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) = \mathscr{D}_{\rho_2}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$, d'où le résultat : Q est dans $\mathrm{GL}_n\left(\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})\right)$.

22. 22a. Soit $Y \in \mathbb{R}^n$. Comme $Q_{|t=a}$ est inversible d'après la question précédente, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que : $Y = Q_{|t=a}X$. Or, si l'on note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$, avec $X_1 \in \mathbb{R}^d$ et $X_2 \in \mathbb{R}^{n-d}$, alors on a : $Y = Q_{|t=a}X = (B_aU \mid A_aV)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = B_aUX_1 + A_aVX_2$. Ainsi tout élément de $\mathbb{R}^n$ s'écrit comme somme d'un élément de $\mathrm{im}\,(B_aU)$ et d'un élément de $\mathrm{im}\,(A_aV)$, donc : $\mathrm{im}\,(B_aU) + \mathrm{im}\,(A_aV) = \mathbb{R}^n$. La somme est directe, parce que s'il existe $(Y_1, Y_2) \in \mathrm{im}\,(B_aU)\times\mathrm{im}\,(A_aV)$ tel que : $Y_1+Y_2 = 0$, alors, en notant X_1 et X_2 des antécédents de Y_1 et Y_2 par B_aU et A_aV respectivement, imiter les calculs ci-dessus donne : $Q_{|t=a}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = Y_1 + Y_2 = 0$. La matrice $Q_{|t=a}$ étant inversible, on en déduit : $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = 0$, et donc $Y_1 = B_aUX_1 = 0$, puis $Y_2 = A_aVX_2 = 0$. D'où le résultat : $\mathrm{im}\,(B_aU) \oplus \mathrm{im}\,(A_aV) = \mathbb{R}^n$.

22b. L'inclusion $\mathrm{im}(B_aU) \subseteq \mathrm{im}(B_a)$ est évidente (écrire : $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $B_aUX = B_a(UX) \in \mathrm{im}(B_a)$), tandis que l'inclusion $\mathrm{im}(B_a) \subseteq \ker(A_a)$ découle du théorème de Cayley-Hamilton :

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad A_a(B_aX) = (A_aB_a)X = (F(M)G(M))_{|t=a}X = \chi(M)_{|t=a}X = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

On montre de même les inclusions : $\mathrm{im}\,(A_aV) \subseteq \mathrm{im}\,(A_a) \subseteq \ker\,(B_a)$. Partant de ces inclusions, pour avoir l'égalité de ces sous-espaces vectoriels, il suffit de démontrer qu'ils sont de même dimension. Or ces deux suites d'inclusions et le théorème du rang impliquent :

$$\dim(\mathrm{im}(B_aU)) \leqslant \dim(\mathrm{im}(B_a)) \leqslant \dim(\ker(A_a)) = n-\dim(\mathrm{im}(A_a)) \leqslant n-\dim(\mathrm{im}(A_aV))$$

et de plus $\mathrm{im}(B_aU)$ et $\mathrm{im}(A_aV)$ sont supplémentaires d'après la question précédente, donc $n - \dim(\mathrm{im}(A_aV)) = \dim(\mathrm{im}(B_aU))$. On en déduit :

$$\dim(\mathrm{im}(B_aU)) \leqslant \dim(\mathrm{im}(B_a)) \leqslant \dim(\ker(A_a)) \leqslant \dim(\mathrm{im}(B_aU)).$$

Par symétrie de la relation d'ordre $\leqslant$, toutes ces dimensions sont égales. En résumé, on a montré :

$$\begin{cases} \mathrm{im}\,(B_aU) & \subseteq & \mathrm{im}\,(B_a) & \subseteq & \ker\,(A_a) \\ \dim(\mathrm{im}(B_aU)) & = & \dim(\mathrm{im}(B_a)) & = & \dim(\ker(A_a)) \end{cases}$$

donc : $\mathrm{im}\,(B_aU) = \mathrm{im}\,(B_a) = \ker\,(A_a)$. On montre de même : $\mathrm{im}\,(A_aV) = \mathrm{im}\,(A_a) = \ker\,(B_a)$, d'où le résultat.

23. Fixons $a \in U_{\rho_2}$ pour le moment. Soit $f : X \mapsto M_{|t=a}X$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M_{|t=a}$, et soient $\mathcal{B}_1$ la famille de $\mathbb{R}^n$ dont les d vecteurs sont les colonnes de B_aU, et $\mathcal{B}_2$ la famille de $\mathbb{R}^n$ dont les $n-d$ vecteurs sont les colonnes de A_aV ; comme $Q_{|t=a} = (B_aU \mid A_aV)$ est une matrice inversible, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^n$, dont on vérifie qu'elle est adaptée à la somme directe $\mathbb{R}^n = \mathrm{im}(B_aU) \oplus \mathrm{im}(A_aV)$ (en effet l'image de B_aU est engendrée par ses colonnes, c'est-à-dire les éléments de $\mathcal{B}_1$, et de plus $\mathcal{B}_1$ est libre en tant que famille extraite d'une base : $\mathcal{B}_1$ est donc une base de $\mathrm{im}(B_aU)$, et de même pour $\mathcal{B}_2$ et $\mathrm{im}(A_aV)$).

Nous allons montrer que la matrice de f dans cette base est de la forme $\mathrm{Diag}(M_{1,a}, M_{2,a})$ avec $M_{1,a} \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et $M_{2,a} \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{R})$; pour cela, il suffit de démontrer que $\mathrm{im}(B_aU)$ et $\mathrm{im}(A_aV)$ sont stables par f. Or : $\mathrm{im}(B_aU) = \mathrm{im}(B_a)$, et B_a commute avec $M_{|t=a}$ puisque, par définition, c'est un polynôme en $M_{|t=a}$; son image est donc stable par $f : X \mapsto M_{|t=a}X$; par le même argument $\mathrm{im}(A_aV) = \mathrm{im}(A_a)$ est stable par f. D'où le résultat : la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathrm{Diag}(M_{1,a}, M_{2,a})$ avec $M_{1,a} \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et $M_{2,a} \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{R})$. Il suffit alors d'appliquer la formule du changement de base, entre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}$, pour avoir : $Q_{|t=a}^{-1} \cdot M_{|t=a} \cdot Q_{|t=a} = \mathrm{Diag}\,(M_{1,a}, M_{2,a})$.

Définissons alors M_1 comme étant l'application $a \mapsto M_{1,a}$ et de même pour M_2. D'après ce qui précède, on a : $Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}\,(M_1, M_2)$, et on a bien $M_1 \in \mathscr{D}_{\rho_2}(\mathrm{M}_d(\mathbb{R}))$ et $M_2 \in \mathscr{D}_{\rho_2}(\mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{R}))$: en effet, les coefficients de ses deux matrices s'obtiennent par sommes et produits des coefficients des matrices de Q, M et Q^{-1}, qui appartiennent à l'anneau $\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$: d'où le résultat.

24. Soit $a \in U_{\rho_2}$. On rappelle que d'après la question précédente, on a : $\mathrm{im}(B_aU) = \mathrm{im}(B_a)$, et : $\mathrm{im}(A_aV) = \ker(B_a)$. Or B_a est une matrice symétrique réelle, donc son image et son noyau sont supplémentaires orthogonaux (pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$). D'où le résultat : $\mathrm{im}(B_aU)$ et $\mathrm{im}(A_aV)$ sont supplémentaires orthogonaux.

25. Par commodité de rédaction, nous omettons les évaluations en $t = a \in U_{\rho_3}$ dans la résolution de cette question, bien que ce soit nécessaire pour correctement invoquer les différentes notions de l'algèbre linéaire et euclidienne (orthonormalité, bases de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, etc.).

Nous allons utiliser l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, avec la base constituée des colonnes de $Q = (BU \mid AV)$. Notons $C_1, \ldots, C_d$ les colonnes de BU et $C_{d+1}, \ldots, C_n$ les colonnes de AV. Posons : $\mathcal{B} = (C_1, \ldots, C_n)$. On définit ensuite par récurrence :

$$D_1 = C_1, \quad \text{et :} \quad \forall i \in [\![2, d]\!],\ D_i = C_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{C_i^\top D_j}{\|D_j\|^2} D_j,$$

puis :

$$D_{d+1} = C_{d+1}, \quad \text{et :} \quad \forall i \in [\![d+2, n]\!],\ D_i = C_i - \sum_{j=d+1}^{i-1} \frac{C_i^\top D_j}{\|D_j\|^2} D_j.$$

Ici $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$.

D'après l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, les familles $\left(\frac{D_1}{\|D_1\|}, \ldots, \frac{D_d}{\|D_d\|}\right)$ et $\left(\frac{D_1}{\|D_{d+1}\|}, \ldots, \frac{D_n}{\|D_n\|}\right)$ sont des bases orthonormées de $\mathrm{im}(BU)$ et $\mathrm{im}(AV)$ pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, et comme ces deux sous-espaces sont supplémentaires orthogonaux on en déduit que la famille $\left(\frac{D_1}{\|D_1\|}, \ldots, \frac{D_n}{\|D_n\|}\right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Justifions qu'il existe $\rho_3 \leqslant \rho_2$ tel que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les coordonnées de D_i soient dans $\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$. On rappelle que les coordonnées de C_i sont dans l'anneau $\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$, donc c'est aussi le cas des coordonnées des D_i, puisque : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(D_1, \ldots, D_i) = \mathrm{Vect}(C_1, \ldots, C_i)$.

Donc pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\|D_i\|^2 = D_i^\top D_i$ est un élément de $\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R})$ également (pour être pleinement convaincant, il faudrait écrire une récurrence soignée, que j'épargne pour ne pas perdre de vue l'argument essentiel). Par la question **17**, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe $\rho_{2,i} \leqslant \rho_2$ tel que : $\|D_i\| = \sqrt{\|D_i\|^2} \in \mathscr{D}_{\rho_{2,i}}(\mathbb{R})$. Ensuite, par la question **6**, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ il existe $\rho'_{2,i} \leqslant \rho_{2,i}$ tel que : $\dfrac{1}{\|D_i\|} \in \mathscr{D}_{\rho'_{2,1}}(\mathbb{R})$ (les hypothèses de la question **6** sont bien vérifiées : $\|D_i(0)\|$ est non nul puisque les D_i sont obtenus en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à une base : on doit encore obtenir une base). Prenons alors : $\rho_3 = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \rho'_{2,i} \in]0,\rho_2]$. Les coordonnées des vecteurs de la famille $\left(\dfrac{D_1}{\|D_1\|},\dots,\dfrac{D_n}{\|D_n\|}\right)$ sont dans $\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})$ d'après tout ce qui précède.

En appliquant la formule du changement de base, entre la base canonique $\mathcal{B}_c$ (qui est orthonormée pour le produit scalaire usuel) et la base orthonormée $\mathcal{B}_{GS} = \left(\dfrac{D_1}{\|D_1\|},\dots,\dfrac{D_n}{\|D_n\|}\right)$, on a donc :

$$\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}_{GS}) = \mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}) \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{GS}) = Q \cdot \mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{GS}),$$

et $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}_{GS})$ est orthogonale puisqu'il s'agit de la matrice de passage entre deux bases orthonormées. Il reste à montrer que la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{GS})$ est bien de la forme : $\mathrm{Diag}\,(R_1,R_2)$, avec $R_1 \in \mathrm{GL}_d\,(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ et $R_2 \in \mathrm{GL}_{n-d}\,(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$. Pour cela, on constate que par construction des D_i, on a :

$$\forall i \in [\![1,d]\!],\ \frac{D_i}{\|D_i\|} \in \mathrm{Vect}(C_1,\dots,C_d), \quad \forall i \in [\![d+1,n]\!],\ \frac{D_i}{\|D_i\|} \in \mathrm{Vect}(C_{d+1},\dots,C_n),$$

donc $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{GS})$ est effectivement diagonale par blocs, de la forme : $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}_{GS}) = \mathrm{Diag}\,(R_1,R_2)$, et les matrices R_1 et R_2 sont de déterminant non nul puisqu'elles sont triangulaires (toujours au vu de la construction explicite des D_i) et de coefficients diagonaux non nuls (car égaux à $\dfrac{1}{\|D_1\|},\dots,\dfrac{1}{\|D_d\|},\dfrac{1}{\|D_{d+1}\|},\dots,\dfrac{1}{\|D_n\|}$). On en déduit, en imitant la résolution de la question **21** (et quitte à diminuer la valeur de ρ_3) que R_1 et R_2 sont dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ et $\mathrm{GL}_{n-d}(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ respectivement. D'où le résultat : on a montré l'existence de R_1 et R_2 telles que $Q \cdot \mathrm{Diag}(R_1,R_2)$ soit orthogonale (égale à $\mathrm{M}_{\mathcal{B}_c}(\mathcal{B}_{GS})$ avec les notations ci-dessus), avec R_1 et R_2 dans $\mathrm{GL}_d(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ et $\mathrm{GL}_{n-d}(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$.

26. On va démontrer le théorème 2 par récurrence forte. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, soit P_n la proposition :

« Pour toute matrice $M \in \mathscr{D}_\rho\,(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}))$, il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $r \leqslant \rho$ et une matrice orthogonale $P \in \mathscr{D}_r\,(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $P^{\mathrm{T}} \cdot M \cdot P$ soit diagonale. »

Alors P_1 est vraie parce qu'une matrice d'ordre 1 est toujours diagonale (il suffit alors de prendre $P = (1) \in \mathscr{D}_r(\mathrm{M}_1(\mathbb{R}))$ pour avoir le résultat voulu). D'où l'initialisation.

À présent, soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On suppose P_k vraie pour tout $k \leqslant n-1$. Soit $M \in \mathscr{D}_\rho\,(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}))$. La question **18** assure l'existence d'une valeur propre λ_0 de $M_{|t=0}$, d'ordre de multiplicité $d \in [\![1,n]\!]$.

Supposons d'abord : $d < n$. Les questions **20** à **23** montrent l'existence de $\rho_2 \in]0,\rho]$, de $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{D}_{\rho_2}(\mathbb{R}))$, et de $(M_1,M_2) \in \mathscr{D}_{\rho_2}\,(\mathrm{M}_d(\mathbb{R})) \times \mathscr{D}_{\rho_2}\,(\mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{R}))$ tels que : $Q^{-1}MQ = \mathrm{Diag}(M_1,M_2)$. Par la question **25**, il existe $\rho_3 \in]0,\rho_2]$ et $(R_1,R_2) \in \mathrm{GL}_d(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R})) \times \mathrm{GL}_{n-d}(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ tels que $O = Q\mathrm{Diag}(R_1,R_2)$ soit orthogonale. On en déduit :

$$O^{-1}MO = \mathrm{Diag}(R_1,R_2)^{-1}\mathrm{Diag}(M_1,M_2)\mathrm{Diag}(R_1,R_2) = \mathrm{Diag}(R_1^{-1}M_1R_1, R_2^{-1}M_2R_2),$$

et de plus la matrice $O^{-1}MO$ est symétrique parce que $O \in \mathrm{GL}_n(\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathbb{R}))$ est orthogonale et $M \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathrm{S}_n(\mathbb{R}))$ symétrique. En effet : $(O^{-1}MO)^\top = O^\top M^\top (O^{-1})^\top = O^{-1}MO$. On en déduit que $R_1^{-1}M_1R_1$ et $R_2^{-1}M_2R_2$ sont dans $\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathrm{S}_d(\mathbb{R}))$ et $\mathscr{D}_{\rho_3}(\mathrm{S}_{n-d}(\mathbb{R}))$ respectivement, et comme $d < n$ et $n - d < n$ par hypothèse, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $R_1^{-1}M_1R_1$ et $R_2^{-1}M_2R_2$. Il existe donc $P_1 \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathrm{M}_d(\mathbb{R}))$ et $P_2 \in \mathscr{D}_{\rho_3}(\mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{R}))$ orthogonales telles que $D_1 = P_1^{\mathrm{T}}\left(R_1^{-1}M_1R_1\right)P_1$ et $D_2 = P_2^{\mathrm{T}}\left(R_2^{-1}M_1R_2\right)P_2$ soient diagonales. On a alors :

$$(O\mathrm{Diag}(P_1,P_2))^{\mathrm{T}}\, M\, (O\mathrm{Diag}(P_1,P_2)) = \mathrm{Diag}(D_1,D_2),$$

et $O\mathrm{Diag}(P_1,P_2)$ est orthogonale en tant que produit de matrices orthogonales, ce qui démontre P_n dans le cas où $d < n$ (avec $r = \rho_3$).

Traitons à présent le cas où $d = n$. Nous allons nous inspirer de la résolution de la question **19** pour le traiter. Remarquons d'abord que $a \mapsto M_{|t=a}$ est de classe C^∞ sur U_ρ puisque toutes ses composantes le sont (en tant que fonctions développables en série entière), et la « série de Taylor » $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}\left(M^{(k)}\right)_{|t=0} t^n$ converge pour tout $t \in U_\rho$ puisque c'est le cas composante par composante. On a de plus : $\forall a \in U_\rho,\ M_{|t=a} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(M^{(k)}\right)_{|t=0} a^n$. Posons alors :

$$\ell = \min\left\{k \in \mathbb{N} \mid \text{ la famille } \left(\left(M^{(k)}\right)_{|t=0}, \mathrm{I}_n\right) \text{ est libre}\right\},$$

avec $\ell = +\infty$ si $\left(M^{(k)}\right)_{|t=0}$ est proportionnelle à I_n pour tout $k \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire si l'ensemble est vide). Notons que $\ell \geqslant 1$ car $M_{|t=0}$ est proportionnelle à I_n d'après la question **19**.

Si $\ell = +\infty$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tel que : $\left(M^{(k)}\right)_{|t=0} = \lambda_k \mathrm{I}_n$. On a alors :

$$\forall a \in U_\rho, \quad M_{|t=a} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_k \mathrm{I}_n a^n = \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_k a^n\right)\mathrm{I}_n,$$

donc en notant f l'application $t \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\lambda_k t^n$ on a : $M = f\cdot \mathrm{I}_n$ avec $f \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R})$. Puisque M est diagonale, P_n est évidemment vraie avec $r = \rho$ et $P = \mathrm{I}_n$.

Si $\ell \neq +\infty$, alors il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_{\ell-1}) \in \mathbb{R}^\ell$ tel que :

$$\forall a \in U_\rho, \quad M_{|t=a} = \left(\sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{1}{k!}\lambda_k a^n\right)\mathrm{I}_n + \sum_{k=\ell}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(M^{(k)}\right)_{|t=0} a^n.$$

En posant :

$$\forall a \in U_\rho, \quad f(a) = \sum_{k=0}^{\ell-1}\frac{1}{k!}\lambda_k a^n \in \mathscr{D}_\rho(\mathbb{R}), \quad (M_\ell)_{|t=a} = \sum_{k=\ell}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(M^{(k)}\right)_{|t=0} a^{n-\ell} \in \mathscr{D}_\rho(\mathrm{S}_n(\mathbb{R})),$$

on a donc : $\forall a \in U_\rho,\ M_{|t=a} = f(a)\cdot \mathrm{I}_n + a^\ell M_\ell$. De plus $(M_\ell)_{|t=0}$ admet une valeur propre d'ordre de multiplicité strictement inférieur à n : en effet, si ce n'est pas le cas, alors d'après la question **19** il existe $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ tel que : $(M_\ell)_{|t=0} = \lambda_\ell \mathrm{I}_n$, ce qui contredit la définition de ℓ. Puisque $(M_\ell)_{|t=0}$ admet une valeur propre d'ordre de multiplicité strictement inférieur à n, on peut lui appliquer P_n dans le cas déjà démontré plus haut, et on en déduit qu'il existe $r \in]0,\rho]$ et $P \in \mathscr{D}_r(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ orthogonale telle que $P^{\mathrm{T}}M_\ell P$ soit diagonale. Alors : $P^{\mathrm{T}}MP = f\mathrm{I}_n + t^\ell P^{\mathrm{T}}M_\ell P$ est aussi diagonale, ce qui démontre P_n.

On a ainsi démontré P_n dans tous les cas, ce qui clôt l'hérédité.

Par le principe de récurrence, on a démontré P_n pour tout entier $n \geqslant 1$, donc le théorème 2 est démontré.