

Partie I –

1 Noyaux et images de deux matrices :

- a Remarque préliminaire : les colonnes de la matrices M vérifient : $C_1 = C_2 = C_3$ et puisque le rang de M est le rang de ses vecteurs colonnes, $\text{rg}(M) = \text{rg}(C_1, C_4)$; or ces deux colonnes ne sont pas proportionnelles : $\text{rg}(M) = 2 = \text{rg}({}^tM)$.

En appliquant la formule du rang, on obtient alors : $\dim(\text{Ker}(M)) = \dim(\text{Ker}({}^tM))$. Intérêt pratique : il suffira d'en connaître une famille libre de deux vecteurs pour en connaître une base.

$$\text{Soit } X = {}^t(x, y, z, t) ; X \in \text{Ker}(M) \Leftrightarrow MX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z - 2t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad \text{Il reste à}$$

présent à déterminer une base de $\text{Ker}(M)$;

- i Soit on utilise la remarque du départ : la famille des deux vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

est une famille libre de deux vecteurs de $\text{Ker}(M)$; c'est donc une base de $\text{Ker}(M)$.

- ii Soit : on écrit une coordonnée en fonction des autres en utilisant la 1^o équation :

$$X \in \text{Ker}(M) \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x - y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \text{ la famille des colonnes } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est}$$

une famille libre et génératrice de $\text{Ker}(M)$; c'est une base de $\text{Ker}(M)$.

On fait ensuite de même pour déterminer $\text{Ker}({}^tM)$:

$$X \in \text{Ker}({}^tM) \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \\ x - y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Cette famille de deux vecteurs}$$

est une base de $\text{Ker}({}^tM)$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, élément de $\text{Ker}(M)$, ne vérifie pas la deuxième équation caractérisant

$\text{Ker}({}^tM)$; il n'appartient pas à $\text{Ker}({}^tM)$, ce qui signifie que $\text{Ker}(M) \not\subset \text{Ker}({}^tM)$.

De même le vecteur ${}^t(0, 1, 0, -1)$, élément de $\text{Ker}({}^tM)$, ne vérifie pas l'équation : $t = 0$, donc n'appartient pas à $\text{Ker}(M)$. Conclusion : $\text{Ker}({}^tM) \not\subset \text{Ker}(M)$.

- b $\text{Im}(M)$ est de dimension 2 et est engendré par la famille des colonnes de M ; comme $\text{rg}(M) = \dim(\text{Im}(M)) = 2$ et que les trois premières colonnes de M sont égales : $\text{Im}(M)$ a pour base la

famille des deux vecteurs colonnes : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ (on peut aussi diviser le dernier vecteur par 2).

De même $\text{Im}({}^tM)$ a pour base la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, vecteur de $\text{Im}(M)$, appartenait à $\text{Im}({}^tM)$, alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a et b étant

deux réels ; on aurait alors : $1 = a$, $0 = a$: inutile d'écrire les autres équations. C'est impossible.
Conclusion : $\text{Im}(M) \not\subset \text{Im}({}^tM)$.

Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur de $\text{Im}({}^tM)$, était élément de $\text{Im}(M)$, il s'écrirait : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$; en

particulier : $a = 0$ (3^o équation), $b = 0$ (2^o équation) et $1 = 2b$: impossible.

On peut alors conclure : $\text{Im}({}^tM) \not\subset \text{Im}(M)$.

2 Noyau et image de tAA et $A{}^tA$:

- a Soit $X \in \text{Ker}(A)$; alors $AX = 0$ et ${}^tAAX = {}^tA0 = 0$: $X \in \text{Ker}({}^tAA)$;
on a ainsi prouvé : $\text{Ker}(A) \subset \text{Ker}({}^tAA)$.

Réciproquement, soit $X \in \text{Ker}({}^tAA)$; alors ${}^tAAX = 0$, ce qui entraîne : ${}^tX{}^tAAX = 0$ soit $\|AX\|^2 = 0$ (norme euclidienne sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$: $AX = 0$ et $X \in \text{Ker}(A)$. Soit : $\text{Ker}({}^tAA) \subset \text{Ker}(A)$.

Conclusion : $\text{Ker}({}^tAA) = \text{Ker}(A)$

En remplaçant A par tA , tA est remplacée par ${}^t({}^tA) = A$, ce qui donne : $\text{Ker}(A{}^tA) = \text{Ker}({}^tA)$.

- b Par définition : $\text{rg}({}^tAA) = \dim(\text{Im}({}^tAA))$; puisque tAA est une matrice carrée de taille p , c'est la matrice d'un endomorphisme de \mathbb{R}^p dans lui-même ; la formule du rang permet d'écrire :

$$\text{rg}({}^tAA) = p - \dim(\text{Ker}({}^tAA)) = p - \dim(\text{Ker}(A))$$

Or A est une matrice de taille (n, p) : c'est la matrice d'une application linéaire de \mathbb{R}^p dans \mathbb{R}^n ; l'espace vectoriel de départ est de dimension p et (formule du rang) : $p - \dim(\text{Ker}(A)) = \dim(\text{Im}(A))$. Finalement : $\text{rg}({}^tAA) = \text{rg}(A)$.

De même, en remplaçant A par tA : $\text{rg}(A{}^tA) = \text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$.

- c La question b indique que $\text{Im}({}^tAA)$ et $\text{Im}({}^tA)$ ont même dimension ; soit $X \in \text{Im}({}^tAA)$; alors $\exists Y \in M_{p,1}(\mathbb{R}) / X = {}^tAAY = {}^tA(A Y) \in \text{Im}({}^tA)$: $\text{Im}({}^tAA) \subset \text{Im}({}^tA)$; puisque ces deux espaces vectoriels ont même dimension (finie) ils sont égaux. $\text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA)$. De même, en remplaçant A par tA : $\text{Im}(A{}^tA) = \text{Im}(A)$.

3 Propriétés de la matrice G :

- a La base (e_1, \dots, e_r) étant orthonormale, $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^r b_{k,i} b_{k,j} = g_{i,j}$

En utilisant la formule donnant le produit de deux matrices : $({}^tB B)_{i,j} = \sum_{k=1}^r ({}^tB)_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^r b_{k,i} b_{k,j}$

les deux matrices G et tBB ont même taille (carrées de taille q) et mêmes coefficients ; elles sont égales. On utilise alors la question I2b pour $A = B$: $\text{rg}(G) = \text{rg}({}^tBB) = \text{rg}(B)$; le rang de B est égal au rang de ses vecteurs colonnes, qui est le rang du système S : $\boxed{\text{rg}(G) = \text{rg}(S) = r}$.

- b La matrice G est réelle, symétrique car ${}^tG = {}^tB {}^t({}^tB) = {}^tBB = G$, donc diagonalisable (plus précisément, il existe une matrice P orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice D diagonale telles que $G = PDP^{-1}$). Soit a une valeur propre de G , X un vecteur propre associé (ce qui implique : $X \neq 0$) ; alors

$GX = aX = {}^tB BX$; on multiplie à gauche par ${}^tX : a \| X \|^2 = {}^tX {}^tB BX = {}^t(BX) BX = \| BX \|^2 \geq 0$
 Puisque le vecteur X est non nul, $\| X \|^2 > 0$ et $a \geq 0$. Conclusion : les valeurs propres de G sont positives.

- c En reprenant les notations de la question b : $G = PD.P^{-1}$; G et D sont semblables : $\det(G) = \det(D)$; mais D est diagonale ; son déterminant est le produit de ses termes diagonaux, qui sont les valeurs propres de G , positives : $\det(G) = \det(D) = \gamma(x_1, \dots, x_q) \geq 0$
 $\gamma(x_1, \dots, x_q) = 0 \Leftrightarrow G$ non inversible $\Leftrightarrow \text{rg}(G) = r < q \Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_q\}$ est liée.

- d Dans le cas $q = 2$, la matrice G est $G = \begin{pmatrix} \|x_1\|^2 & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \|x_2\|^2 \end{pmatrix}$

$\det(G) = \|x_1\|^2 \cdot \|x_2\|^2 - \langle x_1, x_2 \rangle^2 \leq 0$, soit $|\langle x_1, x_2 \rangle| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz) et il y a égalité si et seulement si $\det(G) = 0$ ie (question c) $\{x_1, x_2\}$ est liée (cas d'égalité)

- 4 Quitte à répéter l'opération plusieurs fois, on se ramène au cas où l'on ajoute à l'un des vecteurs x_i un multiple d'un autre, par exemple (les vecteurs jouent des rôles symétriques) : $x_1 \leftarrow x_1 + ax_2$. La nouvelle matrice G' diffère de G par ses premières ligne et colonne soit :

$$G' = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle + 2a \langle x_1, x_2 \rangle + a^2 \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle + a \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle + a \langle x_2, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle + a \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_3 \rangle + a \langle x_2, x_3 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle + a \langle x_2, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} \quad \text{On}$$

calcule $\det(G')$ en effectuant l'opération élémentaire suivante sur les lignes : $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$:

$$\det(G') = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle + a \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle + a \langle x_2, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_3 \rangle + a \langle x_2, x_3 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle + a \langle x_2, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} \quad \text{puis } C_1 \leftarrow C_1 - aC_2 :$$

$$\det(G') = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2, x_n \rangle \\ \langle x_1, x_3 \rangle & \langle x_2, x_3 \rangle & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \cdots & \langle x_n, x_n \rangle \end{pmatrix} = \det(G) : \text{le déterminant n'est pas modifié.}$$

Conclusion : $\gamma(x_1, \dots, x_q)$ reste inchangé en ajoutant à un vecteur une combinaison linéaire des autres.

- 5 On suppose $q \geq 2$:

- a Puisque $p_L(x_1)$ appartient à L , il est combinaison linéaire des vecteurs x_2, \dots, x_q ; on peut appliquer le résultat précédent en enlevant à x_1 le vecteur $p_L(x_1)$, combinaison linéaire des autres vecteurs : $\gamma(x_1, \dots, x_q) = \gamma(x_1 - p_L(x_1), \dots, x_q) = \gamma(h_1, \dots, x_q)$ Par construction (la projection est orthogonale) le vecteur h_1 est orthogonal à tout vecteur de L : $\langle h_1, x_k \rangle = 0$ pour $k \geq 2$; on note G' la matrice obtenue en supprimant la 1^o ligne et la 1^o colonne de G ;

$$\gamma(h_1, \dots, x_q) = \begin{vmatrix} \langle h_1, h_1 \rangle & O_{1,q-1} \\ O_{q-1,1} & G' \end{vmatrix} = \|h_1\|^2 \det(G') = \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_q).$$

- b On suppose $r = q$, ie la famille $\{x_1, \dots, x_q\}$ est libre.

- i Puisque h_1 est la projection orthogonale de x_1 sur L^\perp : $\|h_1\| \leq \|x_1\|$ ce qui entraîne :

$$\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \|h_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_q)$$

Il y a égalité si et seulement si $\|h_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_q) = \|x_1\|^2 \gamma(x_2, \dots, x_q)$. Puisque $\{x_1, \dots, x_n\}$ est libre, la famille extraite $\{x_2, \dots, x_n\}$ l'est aussi et (question I3c) $\gamma(x_2, \dots, x_q) \neq 0$. Il y a

donc égalité si et seulement si $\|h_1\|^2 = \|x_1\|^2$ soit (théorème de Pythagore : $\|h_1\|^2 + \|p_L(x_1)\|^2 = \|x_1\|^2$) $p_L(x_1) = 0$: équivalent à x_1 est orthogonal à L .

ii Se fait en montrant par une récurrence immédiate sur $k \leq r$:

$$\gamma(x_1, \dots, x_q) \leq \gamma(x_1) \dots \gamma(x_k) \gamma(x_{k+1}, \dots, x_q) \quad (\text{remarque : } \gamma(x) = \|x\|^2)$$

Il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans chacune des inégalités précédentes:

(1) x_1 est orthogonal à x_2, \dots, x_q ,

(2) x_2 est orthogonal à x_3, \dots, x_q

(3) ...

(4) x_{q-1} orthogonal à x_q

ie les x_i sont deux à deux orthogonaux.

6 Majoration d'un déterminant :

a Soit $S = \{C_1, \dots, C_n\}$, où C_i est la i° colonne de A . Puisque A est inversible, $\text{rg}(S) = \text{rg}(A) = n$. Soit G la matrice carrée de taille n définie par : $g_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle$; alors (question I3a) $G = {}^tBB$, où B est la matrice définie dans cette question. Mais puisque B est la matrice des vecteurs colonnes de A dans la base orthonormale (e_1, \dots, e_n) $A = PBP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base (e_1, e_2, \dots, e_n) . A et B sont semblables, donc ont même déterminant.

Comme $G = {}^tBB$, $\det(G) = \det(B^2) = \det(A)^2 = \gamma(C_1, \dots, C_q) \leq \gamma(C_1) \dots \gamma(C_n) = \prod_{k=1}^n \|C_k\|^2$, ce qui

donne l'inégalité demandée.

Il y a égalité si et seulement si $\gamma(C_1, \dots, C_q) \leq \gamma(C_1) \dots \gamma(C_n)$ ie les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux (on peut appliquer la question précédente car la famille $\{C_1, \dots, C_n\}$ est libre.

b $\|C_k\|^2 = \sum_{i=1}^n a_{i,k}^2 \leq n$ et $|\det(A)| \leq (\sqrt{n})^n = n^{n/2}$.

Il y a égalité si et seulement si il y a égalité dans toutes les inégalités utilisées, ie tous les vecteurs colonnes ont pour norme \sqrt{n} et les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux. Soit : pour chaque i et k variant de 1 à n $a_{i,k}^2 = 1$ (A est une matrice à coefficients dans $\{-1, 1\}$) et les vecteurs colonnes sont deux à deux orthogonaux.

Partie II –

1 Il y a 4 possibilités pour la 1° colonne :

a Si $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a$, alors $C_2 = \pm b$, avec $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b De même si $C_1 = -a$, $C_2 = \pm b$

c Et si $C_1 = \pm b$, $C_2 = \pm a$.

Il y a en tout 8 matrices éléments de H_2 (4 possibilités pour C_1 , 2 pour C_2 une fois C_1 choisie)

2 Propriétés des matrices de H_n :

a Soit $A \in H_n$; alors $({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j}$ (cf calcul de la question I3) ie $({}^tAA)_{i,j} = \langle C_i, C_j \rangle$

i Si $i \neq j$, les colonnes C_i et C_j sont orthogonales et $({}^tAA)_{i,j} = 0$: la matrice tAA est diagonale.

ii Si $i = j$, $({}^tAA)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 = n$ ($a_{k,i}^2 = 1$)

Conclusion: $\boxed{{}^tAA = n I_n}$

b La matrice $A = \sqrt{n} I_n$ vérifie cette dernière propriété mais n'est pas dans H_n (ses coefficients sont 0 et \sqrt{n})

- c Si A vérifie ${}^tAA = nI_n$ alors pour tous i et j compris entre 1 et n $\langle C_i, C_j \rangle = n \delta_{i,j}$; en particulier lorsque i et j sont distincts, les colonnes C_i et C_j sont orthogonales et A appartient à H_n puisque ses coefficients sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

Remarque : l'égalité : ${}^tAA = nI_n$ est équivalente à ${}^t(A/\sqrt{n})(A/\sqrt{n}) = I_n$ ie A/\sqrt{n} est une matrice orthogonale.

3 Etude de quelques produits :

a $({}^tP^{(\sigma)} A)_{i,j} = \sum_{k=1}^n ({}^tP^{(\sigma)})_{i,k} (A)_{k,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{k,\sigma(i)} a_{k,j}$; or $\delta_{k,\sigma(i)} = 0$ lorsque $k \neq \sigma(i)$. Il ne reste dans la

somme que le terme correspondant à $k = \sigma(i)$, ce qui donne : $({}^tP^{(\sigma)} A)_{i,j} = a_{\sigma(i),j}$.

Conclusion : la ligne i de la matrice ${}^tP^{(\sigma)}A$ est la ligne $\sigma(i)$ de la matrice A.

b De la même manière $(AP^{(\sigma)})_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} \delta_{k,\sigma(j)} = a_{i,\sigma(j)}$: la colonne j de $AP^{(\sigma)}$ est la colonne $\sigma(j)$ de

la matrice A.

c Soit A appartenant à H_n .

i Puisque A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$, il en est de même de tA . De plus : ${}^tAA = nI_n$ entraîne ${}^tA = nA^{-1}$ et ${}^t({}^tA) {}^tA = A. {}^tA = A(nA^{-1}) = nI_n$. En utilisant II 2c : ${}^tA \in H_n$.

ii La matrice ${}^tP^{(\sigma)} A$ est obtenue en permutant des lignes de la matrice A ; elle est à coefficients dans $\{-1, 1\}$. De plus permuter des lignes de la matrice A revient en fait à écrire les vecteurs-colonnes de A : C_1, \dots, C_n dans la base $\{e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}\}$. Les colonnes de ${}^tP^{(\sigma)} A$ sont donc deux à deux orthogonales. On peut conclure : ${}^tP^{(\sigma)} A \in H_n$.

Autre méthode : par un calcul direct. ${}^t({}^tP^{(\sigma)} A) {}^tP^{(\sigma)} A = {}^tA P^{(\sigma)} {}^tP^{(\sigma)} A$. On est amené à

calculer la matrice $Q = P^{(\sigma)} {}^tP^{(\sigma)}$; par définition $q_{i,j} = \sum_{k=1}^n \delta_{i,\sigma(k)} \delta_{j,\sigma(k)} = \delta_{i,j}$ (car le seul terme

$\delta_{j,\sigma(k)}$ non nul est obtenu pour $\sigma(k) = j$. Conséquence : $P^{(\sigma)} {}^tP^{(\sigma)} = I_n$ et ${}^t({}^tP^{(\sigma)} A) {}^tP^{(\sigma)} A = {}^tAA = nI_n$. On retrouve le résultat précédent.

iii La matrice $AP^{(\sigma)}$ est obtenue en permutant des colonnes de A ; ses coefficients sont à valeur dans $\{-1, 1\}$. Et puisque les colonnes de la matrice A sont deux à deux orthogonales, celles de $AP^{(\sigma)}$ également . Conséquence : $AP^{(\sigma)} \in H_n$

Remarque : on peut aussi calculer ${}^t(AP^{(\sigma)})AP^{(\sigma)} = {}^tP^{(\sigma)} {}^tAA P^{(\sigma)} = nI_n$

iv Soit Δ matrice diagonale dont les coefficients sont les termes d_i , éléments de $\{-1, 1\}$. Soient a et δ les endomorphismes de matrices respectives A et Δ relativement à la base canonique (e_1, e_2, \dots, e_n) de R^n . Alors $(a\delta)(e_i) = a(\delta(e_i)) = a(d_i e_i) = d_i a(e_i)$; la matrice $A\Delta$ de l'endomorphisme $a\delta$ est obtenue en multipliant chaque colonne C_i de A par d_i . Puisque $d_i = \pm 1$, les coefficients de $A\Delta$ sont à valeur dans $\{-1, 1\}$ et les colonnes restent orthogonales deux à deux. $A\Delta \in H_n$.

v De même $(\delta a)(e_j) = \delta\left(\sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i\right) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} d_i e_i$: chaque i° ligne C_i de ΔA (matrice de

l'endomorphisme ΔA) est obtenue en multipliant la ligne C_i correspondante de A par d_i . Les coefficients de ΔA sont à valeur dans $\{-1, 1\}$; de plus

$$\langle C_i', C_j' \rangle = \sum_{k=1}^n (d_k a_{k,i})(d_k a_{k,j}) = \sum_{k=1}^n a_{k,i} a_{k,j} \text{ (car } d_k = \pm 1) \text{ soit } \langle C_i', C_j' \rangle = \langle C_i, C_j \rangle = 0 :$$

les colonnes sont deux à deux orthogonales : $\Delta A \in H_n$.

4 Construction de matrices de H_{2n} :

a On effectue le produit par blocs :

$${}^t(A \otimes B) (A \otimes B) = \begin{pmatrix} a_{1,1} {}^tB & a_{2,1} {}^tB \\ a_{1,2} {}^tB & a_{2,2} {}^tB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} B & a_{1,2} B \\ a_{2,1} B & a_{2,2} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2) {}^tBB & (a_{1,2} a_{1,1} + a_{2,2} a_{2,1}) {}^tBB \\ (a_{1,2} a_{1,1} + a_{2,2} a_{2,1}) {}^tBB & (a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2) {}^tBB \end{pmatrix}$$

Or $a_{1,2}a_{1,1} + a_{2,2}a_{2,1}$ est le produit scalaire des deux colonnes de A , donc vaut 0 ; de plus $a_{1,1}^2 = a_{2,2}^2 = 1$, ce qui donne : ${}^t(A \otimes B)(A \otimes B) = \begin{pmatrix} 2{}^tBB & O \\ O & 2{}^tBB \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} nI_n & O \\ O & nI_n \end{pmatrix} = 2nI_{2n} : A \otimes B \in H_{2n}$.

b H_2 est non vide ; soit $n \geq 1$ tel que $E_{2^n} \neq \emptyset$; en utilisant le procédé de la question a, $E_{2^{n+1}} \neq \emptyset$.

Conclusion : pour tout $n \geq 1 : E_{2^n} \neq \emptyset$ ie E contient toutes les puissances de 2 (y compris pour $n = 0$, dans ce cas $A = (1)$ appartient à H_1).

c Le problème est de construire un élément de H_4 qui ne soit pas de cette forme ; on commence avec les deux premières colonnes de cette matrice, de sorte que les deux matrices extraites de taille 2 ne

soient pas proportionnelles, par exemple $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & x & a \\ 1 & -1 & y & b \\ \hline 1 & -1 & z & c \\ 1 & 1 & t & d \end{array} \right)$ La 3^o colonne doit vérifier :

$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases}$; par exemple $x = z = 1, y = t = -1$; ainsi $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ \hline 1 & -1 & 1 & c \\ 1 & 1 & -1 & d \end{array} \right)$. Il ne reste plus

qu'à trouver la 4^o colonne : $\begin{cases} a + b + c + d = 0 \\ a - b - c + d = 0 \\ a - b + c - d = 0 \end{cases}$ et par exemple $a = b = 1, c = d = -1$. Une matrice

élément de H_4 non construite d'après le procédé de la question est $A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right)$

5 Choix d'éléments de H_n .

a Soit $A \in H_n$. Si on multiplie une ou plusieurs lignes de A par -1 , la nouvelle matrice appartient encore à H_n (cf II3c ; c'est ΔA , avec tous les coefficients diagonaux de Δ égaux à 1 pour les lignes non modifiées et $d_i = -1$ pour les autres). On multiplie alors par -1 , chaque ligne dont le premier terme est -1 . La nouvelle matrice obtenue est élément H_n , et tous les termes de la 1^o colonne sont alors égaux à 1.

Soit p le nombre de 1 (un) dans la colonne 2 et q le nombre de -1 dans cette même colonne. Alors $p+q = n$ (nombre de termes de la colonne) et $\langle C_1, C_2 \rangle = p - q = 0 : p = q$ et $n = 2p : \boxed{n \text{ est pair}}$.

b Lorsqu'on permute des lignes de la matrice A , la nouvelle matrice est encore élément de H_n . On permute alors les lignes de sorte que les m premiers termes de la colonne 2 soient égaux à 1, les autres sont alors -1 . Les termes de la colonne 1 sont toujours égaux à 1 (il n'y avait que 1 sur cette colonne). On note p_1 et p_2 le nombre de 1 et -1 sur les m premiers termes de la colonne 3 (leur somme vaut m), et p_3 et p_4 le nombre de 1 et -1 sur les m derniers termes de la colonne 3 (id)

Alors $\langle C_1, C_3 \rangle = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 = 0$

$\langle C_2, C_3 \rangle = p_1 - p_2 - p_3 + p_4 = 0$

En faisant la somme : $p_1 = p_2$; puis $p_3 = p_4$

De plus $p_1 + p_2 = m = p_3 + p_4 = 2p_1$; m est pair et $\boxed{n \text{ est multiple de 4}}$.

Partie III –

1 Soit a une valeur propre de s , X un vecteur propre associé à cette valeur propre ; alors ${}^tXSX = {}^tX(aX) = a \cdot \|X\|^2 > 0 ; \|X\|^2 > 0$ (X non nul) et $a > 0$.

Réciproquement, on suppose que toutes les valeurs propres de S sont strictement positives. Puisque S est symétrique réelle, il existe D diagonale et P orthogonale telles que $S = PDP^{-1}$, les coefficients diagonaux d_i de D étant les valeurs propres de S (S et D sont semblables). Les nombres d_i sont donc strictement positifs. Pour $X \neq 0$ ${}^tXSX = {}^tXPDP^{-1}X = {}^tYDY$ avec $Y = P^{-1}X = {}^tPX$ (P orthogonale).

On note $Y = (y_1, \dots, y_n)$; ${}^tXSX = \sum_{i=1}^n d_i y_i^2 \geq 0$ car tous les termes d_i sont positifs. De plus, Y est non nul (car X non nul et P inversible); il existe i tel que $y_i \neq 0$ et $d_i y_i^2 > 0$: ${}^tXSX > 0$. L'équivalence est ainsi prouvée.

2 Existence de la décomposition :

a ${}^t({}^tMM) = {}^tM({}^tM) = {}^tMM$: M est symétrique.

Soit $X \neq 0$; ${}^tX {}^tM MX = \|MX\|^2 > 0$ car M est inversible et X non nul : ${}^tM.M$ est définie positive.

b Etant symétrique réelle, il existe D diagonale et P orthogonale telles que ${}^tMM = PDP^{-1}$, les coefficients diagonaux d_i de D étant strictement positifs. On pose alors $\delta_i = \sqrt{d_i} > 0$ et Δ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont les nombres δ_i . Alors $\Delta^2 = D$ et si on pose $S = P\Delta P^{-1}$:

$$S^2 = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = {}^tMM.$$

S est symétrique (car P orthogonale : $P^{-1} = {}^tP$ et Δ diagonale), définie positive car ses valeurs propres sont les nombres $\delta_i > 0$ (S et Δ sont semblables).

c 0 n'est pas valeur propre de S (ses valeurs propres sont > 0): S est inversible.

$$\text{Enfin } (MS^{-1})MS^{-1} = S^{-1} {}^tM M S^{-1} \quad (S \text{ est symétrique})$$

$$= S^{-1} S^2 S^{-1} = I_n: Q = MS^{-1} \text{ est orthogonale}$$

d Soit $M = Q.S$, où Q est orthogonale et S symétrique.

3 Recherche d'une borne supérieure.

a Les deux matrices Σ et D sont semblables, donc ont même trace : $\text{tr}(\Sigma) = \text{tr}(D) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$.

b Σ étant symétrique réelle, il existe P orthogonale telle que : $\Sigma = PDP^{-1}$.

$\text{tr}(Q\Sigma) = \text{tr}(QPD P^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}QPD)$ car $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$, et $P^{-1}QP$, produit de matrices orthogonales, est une matrice orthogonale Q_1 . On note $Q_1 = (q_{i,j})$ et $D = (d_{i,j})$

$$\text{tr}(Q_1 D) = \sum_{i=1}^n (Q_1 D)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n q_{i,k} \underbrace{d_{k,i}}_{=0 \text{ si } k \neq i} = \sum_{i=1}^n q_{i,i} d_i$$

Puisque Q_1 est orthogonale, ses colonnes sont normées, ce qui entraîne que chaque coefficient de la colonne est en valeur absolue majoré par 1 ; puisque $d_i \geq 0$ pour tout i:

$$\text{tr}(Q_1 D) \leq \sum_{i=1}^n d_i = \text{tr}(D) = \text{tr}(\Sigma). \quad \text{Conclusion : } \text{tr}(Q\Sigma) \leq \text{tr}(\Sigma) \text{ pour } Q \text{ orthogonale.}$$

c L'ensemble $\text{sup}\{ \text{tr}(Q\Sigma), Q \in O_n(\mathbb{R}) \}$ est un ensemble non vide de \mathbb{R} (car $O_n(\mathbb{R})$ est non vide), majoré par $\text{tr}(\Sigma)$, donc admet une borne supérieure a telle que $a \leq \text{tr}(\Sigma)$.

Mais I_n est orthogonale, donc $\text{tr}(I_n \Sigma) = \text{tr}(\Sigma) \in \{ \text{tr}(Q\Sigma), Q \in O_n(\mathbb{R}) \}$

Conclusion : $\boxed{\text{sup}\{ \text{tr}(Q\Sigma), Q \in O_n(\mathbb{R}) \} = \text{tr}(\Sigma)}$ (et cette borne supérieure est en fait un maximum).

4 Une majoration :

a Pour tout (i,j) $a_{i,j} \leq 1$: $f(A) \leq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$ (il y a autant de 1 que de termes sur et au-dessus

de la diagonale principale de A) L'application f est bornée, donc admet une borne supérieure.

Remarque : l'ensemble H_n est fini ($\text{card}(H_n) \leq 2^n$) : car pour chaque coefficient de $A \in H_n$ il y a deux possibilités au plus 1 et -1 ; cette borne supérieure est en fait un maximum et la valeur de ce maximum est un entier.

$$b \quad \text{tr}(AT) = \sum_{i=1}^n (AT)_{i,i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k} \underbrace{t_{k,i}}_{=0 \text{ si } k < i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=i}^n a_{i,k} \cdot 1 = f(A).$$

c $f(A) = \text{tr}(ARS)$ or (cf remarque de la partie II) A/\sqrt{n} est orthogonale, ie $A = \sqrt{n} P$, où P est une matrice orthogonale : $f(A) = \sqrt{n} \cdot \text{tr}(PRS)$; PR , produit de deux matrices orthogonales, est une matrice orthogonale, ce qui entraîne (question III3b) : $f(A) \leq \sqrt{n} \text{tr}(S)$.

Conclusion : $\alpha_n = \sup\{ f(A), A \in H_n \} \leq \sqrt{n} \cdot \text{tr}(S)$.

d Dans le cas $n = 2$, $\alpha_2 \leq n(n+1)/2 = 3$; soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; A appartient à H_2 et $f(A) = 3$.

Conclusion : $\alpha_2 = 3$.

On applique le procédé de la question III2 pour déterminer S : $T = RS$, donc $S^2 = {}^t T T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Le

polynôme caractéristique de S^2 est $P(x) = (2-x)(1-x) - 1 = x^2 - 3x + 1$ de racines

$$a = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(6 + \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})^2 \quad \text{et} \quad b = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}(1 - \sqrt{5})^2$$

$$\text{tr}(S) = \sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \boxed{\sqrt{2} \cdot \text{tr}(S) = \sqrt{10}} > 3 = \alpha_2.$$