

## Corrigé PT 2017, épreuve A.

### Partie 1.

1. La matrice  $A$  est symétrique réelle, donc diagonalisable.
2. On calcule le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$\begin{aligned} \chi_A(t) &= \begin{vmatrix} t-1 & 1 & 1 \\ 1 & t-1 & 1 \\ 1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ t+1 & t-1 & 1 \\ t+1 & 1 & t-1 \end{vmatrix} \\ &\stackrel{\substack{C_2 \leftarrow C_2 - C_1 \\ C_3 \leftarrow C_3 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} t+1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} \\ &= (t+1)(t-2)^2 \text{(déterminant triangulaire)} \end{aligned}$$

Ainsi, les valeurs propres de  $A$  sont  $-1$  et  $2$ , qui sont de multiplicités respectives  $1$  et  $2$ . Puisque  $A$  est diagonalisable, la dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée, d'une part, et, d'autre part, puisque  $A$  est symétrique réelle, les sous-espaces propres sont orthogonaux entre eux.

Or, on vérifie immédiatement que le vecteur  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  est un vecteur propre associé à  $-1$  (ce qui est suggéré par le fait que toutes les lignes de  $A$  ont la même somme), et on trouve alors comme base du sous-espace propre associé à  $2$  :  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  par orthogonalité.

En définitive, le sous-espace propre associé à  $-1$  est la droite vectorielle engendrée par  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , et le sous-espace propre associé à  $2$  est le plan vectoriel engendré par  $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

3. Un calcul direct montre l'égalité  $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ , ce dont on déduit la relation :

$$A^2 = A + 2I_3.$$

En multipliant cette relation par  $A^{n-1}$  pour  $n \geq 1$ , on obtient  $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$ .

**Remarque :** les polynômes annulateurs sont hors-programme, mais on vient de prouver que le polynôme  $P(X) = X^2 - X - 2$  annule  $A$ . Or, les racines de ce polynôme sont  $-1$  et  $2$ . En fait on peut prouver que si un polynôme annule une matrice alors les valeurs propres de la matrices sont des racines du polynôme (mais la réciproque est fautive : il peut y avoir d'autres racines).

4. Posons  $u_0 = 1, v_0 = 0, u_1 = 1, v_1 = -1$ . Ainsi la relation :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

est satisfaite aux rangs  $n = 0$  et  $n = 1$ .

Supposons maintenant que pour un certain entier  $n \geq 1$ , les matrices  $A^{n-1}$  et  $A^n$  soient de la forme attendue pour certains scalaires  $u_{n-1}, v_{n-1}, u_n$  et  $v_n$ . Alors, en utilisant la relation de la question précédente :

$$A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1} = \begin{pmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{pmatrix},$$

et donc  $A^{n+1}$  est bien de la forme attendue, avec :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1}. \end{cases}$$

Ainsi, d'après le principe de récurrence de pas 2, pour tout entier  $n$ , il existe deux scalaires  $u_n$  et  $v_n$  tels que :

$$A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}.$$

On admet le fait que de l'existence pour tout  $n$  des scalaires  $u_n$  et  $v_n$ , on peut déduire l'existence des suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$ . Et les suites satisfont bien les relations de récurrence attendues d'après le calcul précédent.

**5.** Les relations de récurrence satisfaites par  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont linéaires de pas 2. Le polynôme caractéristique associé est  $X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$  (comme par hasard ...). On en déduit l'existence de scalaires  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  tels que pour tout  $n$  :

$$u_n = \alpha(-1)^n + \beta 2^n, \quad v_n = \gamma(-1)^n + \delta 2^n.$$

On utilise les valeurs aux rangs 0 et 1 pour évaluer ces constantes :

$$\begin{cases} 1 = u_0 = \alpha + \beta \\ 1 = u_1 = -\alpha + 2\beta \end{cases}, \quad \begin{cases} 0 = v_0 = \gamma + \delta \\ -1 = v_1 = -\gamma + 2\delta \end{cases},$$

ce qui amène après résolution à  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = \frac{2}{3}$ ,  $\gamma = \frac{1}{3}$ ,  $\delta = -\frac{1}{3}$ . Ainsi, pour tout  $n$  :

$$u_n = \frac{1}{3}((-1)^n + 2^{n+1}), \quad v_n = \frac{1}{3}((-1)^n - 2^n).$$

## Partie 2.

**1.** On multiplie l'égalité (1) par  $\mu$  et on soustrait l'égalité (2) au résultat, ce qui amène  $\mu A - A^2 = \lambda \mu U - \lambda^2 U = \lambda(\mu - \lambda)U$ . Or  $\lambda \mu \neq 0$  par hypothèse, donc  $\lambda \neq 0$ , et  $\lambda \neq \mu$ , donc  $\mu - \lambda \neq 0$ , et ainsi :

$$U = \frac{\mu}{\lambda(\mu - \lambda)}A - \frac{1}{\lambda(\mu - \lambda)}A^2.$$

En procédant de manière analogue, on obtient :

$$V = \frac{\lambda}{\mu(\lambda - \mu)}A - \frac{1}{\mu(\lambda - \mu)}A^2.$$

En substituant dans l'expression de  $A^3$  :

$$\begin{aligned} A^3 &= \lambda^3 U + \mu^3 V \\ &= \frac{\lambda^2 \mu}{\mu - \lambda}A - \frac{\lambda^2}{\mu - \lambda}A^2 + \frac{\mu^2 \lambda}{\lambda - \mu}A - \frac{\mu^2}{\lambda - \mu}A^2 \\ &= \frac{\lambda \mu (\lambda - \mu)}{\mu - \lambda}A + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{\lambda - \mu}A^2 \\ &= -\lambda \mu A + (\lambda + \mu)A^2. \end{aligned}$$

**2.** La relation  $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$  est vraie aux rangs 1, 2 et 3 par hypothèse. On va procéder par récurrence de pas 2 pour montrer qu'elle est vraie pour tout entier  $p \geq 1$ . L'initialisation aux rangs 1 et 2 est déjà faite. Supposons que pour un certain entier  $p \geq 1$ , la relation soit vraie aux rangs  $p$  et  $p + 1$ . Alors :

$$\begin{aligned} A^{p+2} &= A^{p-1}A^3 = A^{p-1}[(\lambda + \mu)A^2 - \lambda \mu A] \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= (\lambda + \mu)A^{p+1} - \lambda \mu A^p \\ &= (\lambda + \mu)(\lambda^{p+1}U + \mu^{p+1}V) - \lambda \mu(\lambda^p U + \mu^p V) \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \\ &= (\lambda^{p+2} + \mu \lambda^{p+1} - \mu \lambda^{p+1})U + (\lambda \mu^{p+1} + \mu^{p+2} - \lambda \mu^{p+1})V \\ &= \lambda^{p+2}U + \mu^{p+2}V. \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence (de pas 2), la relation  $A^p = \lambda^p U + \mu^p V$  est bien satisfaite pour tout entier  $p \geq 1$ .

**3. (a)** Soit  $x \in \ker(f)$ . Alors  $f(x) = 0$ , donc, par linéarité de  $f^{p-1}$ ,  $f^{p-1}(f(x)) = 0$ , donc  $f^p(x) = 0$ , donc  $x \in \ker(f^p)$ . Ceci prouve bien l'inclusion  $\ker(f) \subset \ker f^p$ .

**(b)** L'égalité demandée est équivalente à l'annulation de l'endomorphisme  $f^{p+1} - (\lambda + \mu)f^p + \lambda\mu f^{p-1}$ , qu'on note  $u$ . Or, puisque  $A$  représente l'endomorphisme  $f$  dans la base canonique, pour tout  $k$ , la matrice  $A^k$  représente l'endomorphisme  $f^k$ , et donc, la matrice  $A^{p+1} - (\lambda + \mu)A^p + \lambda\mu A^{p-1}$  représente l'endomorphisme  $u$ . Or, il suffit de multiplier la relation de la question 1 par  $A^{p-2}$  (dans le cas  $p \geq 2$ ) pour obtenir l'annulation de cette matrice, donc celle de l'endomorphisme  $u$ , et donc la relation  $f^{p+1}(x) - (\lambda + \mu)f^p(x) + \lambda\mu f^{p-1}(x) = 0$  pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$ .

Dans le cas  $p = 1$ , par la même interprétation matricielle, l'égalité attendue est équivalente à  $A^2 - (\lambda + \mu)A + \lambda\mu I_n = 0$ , ce qui, par substitution de  $A^2$  et  $A$  par leurs expressions en fonction de  $U$  et  $V$ , et après simplification, est équivalent à  $\lambda\mu(I_n - (U + V)) = 0$ , soit, après simplification par les facteurs non nuls  $\lambda\mu$ ,  $U + V = I_n$ . Cette égalité peut tomber en défaut, par exemple pour  $A = U = V = 0$ , et  $\lambda$  et  $\mu$  deux réels quelconques non nuls.

**(c)** On suppose  $f^p(x) = 0$  pour  $p \geq 2$ . Alors, par linéarité de  $f$ ,  $f^{p+1}(0) = f(f^p(x)) = 0$ , et donc, par substitution dans l'égalité précédente,  $f^{p-1}(x) = 0$ . En procédant par récurrence ascendante, on en déduit que si  $f^p(x) = 0$  pour un certain entier  $p \geq 2$ , alors  $f^{p-i}(x) = 0$  pour tout  $i$  entier compris entre 1 et  $p - 1$ , et donc en particulier  $f(x) = 0$ . Ainsi,  $\ker f^p \subset \ker f$ .

**Remarque :** cela donne un autre éclairage sur le fait que l'égalité de la question précédente est fautive en général pour  $p = 1$ . Si elle était encore vraie pour  $p = 1$ , on pourrait aller un cran plus loin dans le raisonnement précédent, et en déduire  $f^0(x) = x = 0$ , et le noyau de  $f$  serait alors trivial. En somme, l'obstruction au résultat de la question 3(b) provient de l'éventuelle non injectivité de  $f$  (et on pourrait aussi faire un lien avec les valeurs propres : la relation  $A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A$  permet de montrer que les seules valeurs propres éventuelles de  $A$  sont 0,  $\lambda$  et  $\mu$ , et on a l'impression que le concepteur a oublié que 0 peut être valeur propre).

**(d)** Des questions (a) et (c) on déduit l'égalité  $\ker f = \ker f^p$ . Par la formule du rang, on en déduit que  $f$  et  $f^p$  ont même rang, et puisqu'elles sont représentées respectivement par les matrices  $A$  et  $A^p$ , ces matrices-ci ont aussi même rang.

### Partie 3.

**1.** La matrice  ${}^tV$  est une matrice ligne (de taille  $(1, n)$ ) et la matrice  $U$  est une matrice colonne (de taille  $(n, 1)$ ). Par définition du produit matriciel, le produit  ${}^tVU$  est donc bien défini, et il s'agit d'une matrice de taille  $(1, 1)$ , qu'on peut donc identifier à son unique coefficient :  ${}^tVU$  est bien un réel. Toujours par définition du produit matriciel :

$${}^tVU = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

**2.** Notons  $k = {}^tVU$  qui est un réel d'après la question précédente. Alors, par associativité du produit matriciel :

$$(U{}^tV)^2 = U({}^tVU)U = kU{}^tV.$$

Ainsi, en utilisant la formule du binôme de Newton, puisque la matrice  $I_n$  commute avec toute matrice donc en particulier avec  $U{}^tV$  :

$$A^2 = a^2 I_n + 2aU{}^tV + (U{}^tV)^2 = a^2 I_n + (2a + k)U{}^tV = (2a + k)A + (a^2 - a(2a + k))I_n = (2a + k)A - a(a + k)I_n,$$

ce qui est le résultat attendu avec  $\alpha = 2a + k$  et  $\beta = -a(a + k)$ .

**3.** Par définition du produit matriciel, pour tous indices  $i$  et  $j$  compris entre 1 et  $n$ , le coefficient de  $U{}^tV$  en position  $(i, j)$  est  $u_i v_j$ , et donc :

$$a_{i,j} = \begin{cases} u_i v_j + a & \text{si } i = j \\ u_i v_j & \text{sinon.} \end{cases}$$

La trace étant la somme des coefficients diagonaux :

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = na + \sum_{i=1}^n u_i v_i \stackrel{Q1}{=} na + {}^tVU.$$

4. Puisque  $k = {}^tVU$  (question 2), la relation de la question 3 s'écrit encore  $k = \text{tr}(A) - na$ , et par substitution dans les expressions de  $\alpha$  et  $\beta$  obtenues à la question 2 :

$$\alpha = (2 - n)a + \text{tr}(A), \quad \beta = -a((1 - n)a + \text{tr}(A)).$$

5. Puisque  $\lambda$  est une valeur propre de  $A$ , il existe un vecteur propre  $X$  associé. Alors  $AX = \lambda X$ , et donc  $A^2X = A \times AX = A \times \lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$ . Or,  $X$  est non nul en tant que vecteur propre de  $A$ , donc  $\lambda^2$  est bien valeur propre de  $A$  (et  $X$  est un vecteur propre associé).

Toujours avec le même vecteur  $X$ , la relation  $A^2 = \alpha A + \beta I_n$  (question 2) implique  $A^2X = \alpha AX + \beta X$ , et donc  $(\lambda^2 - \lambda\alpha - \beta)X = 0$ , et à nouveau par non nullité de  $X$  (puisque c'est un vecteur propre), on en déduit  $\lambda^2 - \lambda\alpha - \beta = 0$ .

6. Considérons le trinôme  $P(T) = T^2 - \alpha T - \beta$ . Son discriminant est :

$$\begin{aligned} \alpha^2 + 4\beta &\stackrel{Q4}{=} [(2 - n)a + \text{tr}(A)]^2 - 4a((1 - n)a + \text{tr}(A)) \\ &= (n - 2)^2 a^2 - 2a \text{tr}(A)(n - 2) + \text{tr}(A)^2 + 4a^2(n - 1) - 4a \text{tr}(A) \\ &= [(n - 2)^2 + 4(n - 1)] a^2 - 2a \text{tr}(A)(n - 2 + 2) + \text{tr}(A)^2 \\ &= n^2 a^2 - 2a n \text{tr}(A) + \text{tr}(A)^2 \\ &= [na - \text{tr}(A)]^2, \end{aligned}$$

et donc ses deux racines réelles sont :

$$\lambda_1 = \frac{\alpha + na - \text{tr}(A)}{2} \stackrel{Q4}{=} a, \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{\alpha - (na - \text{tr}(A))}{2} \stackrel{Q4}{=} \text{tr}(A) - (n - 1)a.$$

D'après la question 5, les valeurs propres de  $A$  sont des racines du trinôme  $P(T)$ , et donc les seules valeurs propres possibles de  $A$  sont bien les réels  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ci-dessus.

7. (a) Exploitions d'abord l'hypothèse sur  $\text{tr}(U^tV)$ . Les coefficients diagonaux de la matrice  $U^tV$  sont les  $u_i v_i$ , pour  $1 \leq i \leq n$  (comme à la question 3), donc  $\text{tr}(U^tV) = \sum_{i=1}^n u_i v_i \stackrel{Q1}{=} {}^tVU$ . L'hypothèse de non nullité implique donc d'après la relation de la question 3 que  $\text{tr}(A) \neq na$ , et donc,  $\lambda_2 = \text{tr}(A) - na + a \neq a = \lambda_1$ .

Si l'un des deux sous-espaces  $E_i$  est réduit au vecteur nul (trivial), l'égalité est évidente (le vecteur nul appartenant toujours à un sous-espace vectoriel). S'ils sont tous deux non triviaux, ce sont deux sous-espaces propres de  $A$  associés à des valeurs propres distinctes (d'après ce qui précède), et ils sont donc en somme directe, donc  $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ .

(b) **Analyse.** Soit  $X$  un vecteur colonne. Soit  $X_1 \in E_1$  et  $X_2 \in E_2$  tels que  $X = X_1 + X_2$ . Alors  $AX = AX_1 + AX_2 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$ . En formant la différence entre cette égalité et l'égalité précédente multipliée par  $\lambda_2$ , on obtient  $(\lambda_1 - \lambda_2)X_1 = AX - \lambda_2 X$ , et de même  $(\lambda_2 - \lambda_1)X_2 = AX - \lambda_1 X$ , soit encore, puisque  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont distincts :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(AX - \lambda_2 X) \\ X_2 = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(AX - \lambda_1 X) \end{cases}$$

Ceci termine la partie analyse (en particulier, on peut en déduire l'unicité si existence de l'écriture  $X = X_1 + X_2$  avec  $X_i \in E_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ , mais cette unicité se déduisait déjà du (a)).

**Synthèse.** On pose maintenant  $X_1$  et  $X_2$  donnés par les relations de la question précédente, et on vérifie  $X_i \in E_i$  pour  $i \in \{1, 2\}$ , et  $X_1 + X_2 = X$ . Cette dernière vérification est immédiate. Calculons  $AX_1$ , en utilisant les relations coefficients racines dans le trinôme de la question 5 pour obtenir  $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 = -\beta$  :

$$\begin{aligned} AX_1 &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(A^2X - \lambda_2 AX) \\ &\stackrel{Q2}{=} \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\alpha AX + \beta X - \lambda_2 AX) \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[(\alpha - \lambda_2)AX + \beta X] \\ &= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}[\lambda_1 AX - \lambda_1 \lambda_2 X] \\ &= \lambda_1 X_1, \end{aligned}$$

donc  $X_1 \in E_1$ . La relation  $X_2 \in E_2$  peut être établie par un calcul analogue. Ceci conclut la synthèse, et on a bien ainsi établi que pour tout vecteur colonne  $X$ , il existe  $X_1 \in E_1$  et  $X_2 \in E_2$  tels que  $X = X_1 + X_2$ .

(c) Les questions (a) et (b) permettent de prouver que la somme directe des sous-espaces propres de  $A$  est égale à l'espace des matrices colonnes. La matrice  $A$  est donc diagonalisable.

8. Choisissons  $U$  le vecteur colonne de taille 3 dont tous les coefficients valent 1, et  $V = -U$ . Alors  $U^tV$  est la matrice carrée de taille 3 dont tous les coefficients valent  $-1$ , et la matrice  $A$  de la première partie vaut  $A = 2I_n + U^tV$ . On peut aussi vérifier que  $\text{tr}(U^tV)$  vaut  $-3$  donc est non nul.

## Exercice de probabilités.

1. (a) L'événement  $(X > n)$  s'écrit comme la réunion des événements deux à deux incompatibles  $(X = k)$  pour  $k$  entier supérieur ou égal à  $n + 1$ . Par  $\sigma$ -additivité (qui assure en particulier la convergence de la série considérée) :

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n,$$

où a été utilisée la formule pour la somme d'une série géométrique.

(b) On considère l'événement  $(T = n)$ , pour  $n \in \mathbf{N}^*$ . Par définition de  $T$ , cet événement s'écrit encore  $(X_n = 1) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} (X_k = 0)$ , et donc, par indépendance (mutuelle) des  $X_k$  :

$$P(T = n) = P(X_n = 1) \prod_{k=1}^{n-1} P(X_k = 0) = p(1-p)^{n-1},$$

ce qui montre bien que  $T$  a même loi que  $X$ .

2. (a) Par définition d'une fonction génératrice, pour  $t$  tel que la série converge :

$$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n = \frac{pt}{1-(1-p)t},$$

en utilisant la somme d'une série géométrique là encore. Une série géométrique étant convergente si et seulement si le module de sa raison est strictement inférieur à 1, le rayon de convergence de  $G_X$  est  $\frac{1}{1-p}$ . Puisque  $Y$  a même loi que  $X$ , elle a même série génératrice, et par indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = \frac{p^2t^2}{(1-(1-p)t)^2},$$

et là encore le rayon de convergence vaut  $\frac{1}{1-p}$ .

(b) L'énoncé semble suggérer de redévelopper la série ainsi obtenue. Il me semble tout de même moins pénible de procéder par produit de Cauchy (pour  $t$  dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\begin{aligned} G_{X+Y}(t) &= G_X(t)G_Y(t) = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \right) \left( \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n \right) \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} p(1-p)^{k-1}t^k p(1-p)^{n-k-1}t^{n-k} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} p^2(1-p)^{n-2} \left( \sum_{k=1}^{n-1} 1 \right) t^n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} p^2(n-1)(1-p)^{n-2}t^n, \end{aligned}$$

et donc, par définition d'une série génératrice et unicité du développement en série entière, la loi de  $X + Y$  est bien donnée par :

$$\forall n \geq 2, P(X + Y = n) = p^2(n-1)(1-p)^{n-2}.$$

(c) Puisque  $Y$  est à valeurs supérieures ou égales à 1, l'événement  $(X = k) \cap (X + Y = n)$  est impossible pour tout  $k$  entier supérieur ou égal à  $n$ . On se place donc dans le cas  $1 \leq k \leq n - 1$ , et on utilise la définition d'une probabilité conditionnelle, puis l'indépendance de  $X$  et  $Y$  :

$$\begin{aligned} P_{(X+Y=n)}(X = k) &= \frac{P((X = k) \cap (X + Y = n))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P((X = k) \cap (Y = n - k))}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{P(X = k)P(Y = n - k)}{P(X + Y = n)} \\ &= \frac{p(1-p)^{k-1}p(1-p)^{n-k-1}}{p^2(n-1)(1-p)^{n-2}} \\ &= \frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, la loi de  $X$  conditionnée par l'événement  $(X + Y = n)$  est la loi uniforme à valeurs parmi les entiers compris entre 1 et  $n - 1$ .

**3. (a)** Si  $X \geq Y$ , alors  $Z = X$  et  $T = Y$ , donc  $X + Y = Z + T$ , et il en est de même si  $X < Y$ . Donc  $X + Y = Z + T$ . Par la même disjonction de cas, on prouve  $|X - Y| = T - Z$ .

(b) On décompose l'événement  $(X = Y)$  comme la réunion  $\bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = k) \cap (Y = k)$  (réunion d'événements deux à deux incompatibles), et par  $\sigma$ -additivité (qui assure la convergence de la série considérée), puis indépendance de  $X$  et  $Y$ , et enfin la formule pour la somme d'une série géométrique convergente :

$$P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p^2}{1 - (1-p)^2} = \frac{p^2}{2p - p^2} = \frac{p}{2-p} = \frac{p}{1+q}.$$

(c) Puisque  $Z = \min(X, Y)$  et que  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ , il en est de même de  $Z$ . De plus, pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ , l'événement  $(Z > n)$  s'écrit encore comme l'intersection  $(X > n) \cap (Y > n)$ , et donc, par indépendance de  $X$  et  $Y$  et le résultat de la question 1(a) :

$$P(Z > n) = P(X > n)P(Y > n) = (1-p)^{2n}.$$

Cette égalité est encore vraie pour  $n = 0$ , les deux membres valant 1. Ainsi, à nouveau pour  $n \in \mathbf{N}^*$ , au vu de l'égalité d'événements  $(Z = n) = (Z > n - 1) - (Z > n)$  (notation pour une différence ensembliste) :

$$P(Z = n) = P(Z > n - 1) - P(Z > n) = (1-p)^{2n-2} - (1-p)^{2n} = (1 - (1-p)^2)(1-p)^{2n-2},$$

et  $Z$  suit donc la loi géométrique de paramètre  $1 - (1-p)^2 = 1 - q^2$ .

(d) On procède de manière analogue à la question précédente : la variable  $T$  est à valeurs dans  $\mathbf{N}^*$ , et, pour tout  $n$ , l'événement  $(T \leq n)$  s'écrit encore  $(X \leq n) \cap (Y \leq n)$ . Par indépendance :

$$P(T \leq n) = P(X \leq n)P(Y \leq n).$$

Or, par passage au complémentaire :  $P(X \leq n) = 1 - P(X > n) = 1 - (1-p)^n$  en utilisant la question 1a, et de même pour  $P(Y \leq n)$ . Ainsi :

$$P(T \leq n) = (1 - (1-p)^n)^2.$$

Là aussi, cette relation reste vraie au rang  $n = 0$ . Mais alors, pour  $n \geq 1$ , on a l'égalité d'événements  $(T = n) = (T \leq n) - (T \leq n - 1)$ , et donc :

$$\begin{aligned} P(T = n) &= P(T \leq n) - P(T \leq n - 1) = (1 - (1-p)^n)^2 - (1 - (1-p)^{n-1})^2 \\ &= (2 - (1-p)^{n-1}(2-p))((1-p)^{n-1}(1 - (1-p))) \\ &= p(1-p)^{n-1}(2 - (2-p)(1-p)^{n-1}), \end{aligned}$$

ce qui détermine la loi de  $T$ .