

Indice de rotation d'une courbe simple

Première Partie

1. Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$, soit f un relèvement de u , supposé dérivable. Alors $u' = if' e^{if} = if' u$, donc $f' = -i \frac{u'}{u} = -i \bar{u} u'$ puisque $u \bar{u} = |u|^2 = 1$.

Soit $u \in \mathcal{F}_T^1$, soit α un réel tel que $e^{i\alpha} = u(0)$. Posons $f(x) = \alpha - i \int_0^x \bar{u}(t) u'(t) dt$. La fonction f est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, c'est une primitive de $-i \bar{u} u'$, et elle est à valeurs réelles car, en dérivant la relation $|u|^2 = u \bar{u} = 1$, on obtient $u' \bar{u} + u \bar{u}' = 0$, donc $\operatorname{Re}(\bar{u} u') = 0$ et $\bar{u} u' \in i\mathbb{R}$. Posons alors $v = e^{if}$; on a $v(0) = e^{if(0)} = e^{i\alpha} = u(0)$ et

$$\left(\frac{v}{u}\right)' = \frac{v'u - u'v}{u^2} = \frac{if' e^{if} u - u' e^{if}}{u^2} = \frac{\bar{u} u' u e^{if} - u' e^{if}}{u^2} = 0$$

car $u \bar{u} = 1$, donc la fonction $\frac{v}{u}$ est constante et $v = u$, autrement dit f est bien un relèvement de u .

2. L'application $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue et $e^{i(f+g)} = e^{if} e^{ig} = uv$.
 3. Notons $x = \operatorname{Re}(z)$ et $y = \operatorname{Im}(z)$. Alors $x \geq 0$ et $x^2 + y^2 = 1$, donc $x = \sqrt{1 - y^2}$, puis

$$\begin{aligned} e^{i \arcsin y} &= \cos(\arcsin y) + i \sin(\arcsin y) \\ &= \sqrt{1 - y^2} + i y = x + i y = z. \end{aligned}$$

Si $u \in \mathcal{F}_T$ vérifie $\|u - 1\|_\infty \leq \sqrt{2}$, alors pour tout t réel, on a $u(t) \in \mathcal{U}$ et $\operatorname{Re}(u(t)) \geq 0$, donc $u(t) = e^{if(t)}$, avec $f : t \mapsto \arcsin(\operatorname{Im}(u(t)))$. Cette fonction f , continue, à valeurs réelles, est un relèvement de u , à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

4. Il y a manifestement ici une erreur d'énoncé.

Comme $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et T -périodique, on peut l'approcher uniformément par des polynômes trigonométriques T -périodiques (deuxième théorème de Weierstrass) : notamment, il existe une fonction w de la forme $w : t \mapsto \sum_{k=-n}^n c_k e^{i\omega k t}$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$, telle que

$\|u - w\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Cette fonction w est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$, T -périodique et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (mais pas à valeurs dans $\mathcal{U}$, donc n'appartient pas à $\mathcal{F}_T^1$).

On a $|w| \geq |u| - |u - w| \geq |u| - |u - w| \geq 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, donc w ne s'annule pas et, en posant

$$v = \frac{w}{|w|}, \text{ on a } v \in \mathcal{F}_T^1. \text{ Par ailleurs, on a aussi } |w| \leq |u| + |u - w| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ensuite, $|v - w| = \left| \frac{w}{|w|} - w \right| = \left| \frac{w}{|w|} (1 - |w|) \right| = |1 - |w||$ et, de $1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq |w(t)| \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,

on tire $|v(t) - w(t)| = |1 - |w(t)|| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout t réel, soit $\|v - w\|_\infty \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $|v| = 1$, on a $\left| \frac{u}{v} - 1 \right| = |u - v| \leq |u - w| + |w - v| \leq \sqrt{2}$, donc $\|u - v\|_\infty \leq \sqrt{2}$ et $\frac{u}{v}$ admet un relèvement f d'après la question 3. Comme v admet un relèvement g d'après la question 1., la fonction $u = \frac{u}{v} v$ admet pour relèvement $f + g$ d'après la question 2.

5. Si $e^{if} = e^{ig} = u$, alors l'application $f - g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $2\pi \mathbb{Z}$ puisque $e^{i(f-g)} = 1$, il résulte alors du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle est nécessairement constante.

Si $u \in \mathcal{F}_T^1$, alors u admet un relèvement f_0 qui est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question 1. donc tout relèvement f de u est de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'il est de la forme $f = f_0 + C$ avec $C \in 2\pi \mathbf{Z}$.

Deuxième Partie

6. Si on choisit f relèvement de u et a réel, alors $e^{if(a+T)} = u(a+T) = u(a) = e^{if(a)}$, donc le réel $f(a+T) - f(a)$ est multiple de 2π ; si g est un autre relèvement de u , on a $g - f$ constant, donc $g(a+T) - g(a) = f(a+T) - f(a)$; enfin, l'application $x \mapsto f(x+T) - f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $2\pi \mathbf{Z}$, donc est constante. Il résulte de tout cela que $d_T(u)$ est un entier relatif indépendant du réel a et du choix du relèvement f de u .

7. Soit θ un réel tel que $e^{i\theta} = z_0$, soit f un relèvement de u . Alors

$$u(t) = z_0 \iff e^{if(t)} = e^{i\theta} \iff f(t) = \theta + 2m\pi \quad (m \in \mathbf{Z}).$$

Or, $|f(a+T) - f(a)| \geq 2k\pi$, et $f([a, a+T[)$ est un intervalle (*théorème des valeurs intermédiaires*) contenant $f(a)$ et admettant $f(a+T)$ comme point adhérent, donc contenant l'intervalle J , avec $J = [f(a), f(a+T)[$ ou $J =]f(a+T), f(a)]$. L'intervalle J , de longueur au moins égale à $2k\pi$, contient au moins k points distincts de la forme $\theta + 2m\pi$ avec $m \in \mathbf{Z}$, chacun de ces points admettant au moins un antécédent t dans $[a, a+T[$ qui est solution de $u(t) = z_0$. Cette dernière équation a donc au moins k solutions distinctes dans $[a, a+T[$.

8. De la question précédente, on déduit que, si $|d_T(u)| \geq 1$, alors u est surjective. Si u n'est pas surjective, on a donc $d_T(u) = 0$.

9. Soient f un relèvement de u et g un relèvement de v , alors $f + g$ est un relèvement de uv , donc, avec $a \in \mathbb{R}$ quelconque,

$$d_T(uv) = \frac{1}{2\pi} ((f+g)(a+T) - (f+g)(a)) = d_T(u) + d_T(v).$$

De même, $f - g$ est un relèvement de $\frac{u}{v}$ et $d_T\left(\frac{u}{v}\right) = d_T(u) - d_T(v)$.

10. Si $\|u - v\|_\infty < 2$, alors $v(t) \neq -u(t)$ pour tout t , et l'application $\frac{u}{v} \in \mathcal{F}_T$ ne prend pas la valeur -1 , donc n'est pas surjective. Donc $d_T\left(\frac{u}{v}\right) = 0$ et $d_T(u) = d_T(v)$.

11. *Remarque. Il est connu que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a la relation $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t) dt$ pour tout couple $(a, b) \in I^2$. Cela peut s'étendre au cas où f est seulement continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, en utilisant une subdivision $(a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ de $[a, b]$ telle que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ et en décomposant l'intégrale par la relation de Chasles ; évidemment, la fonction dérivée f' n'est pas définie en les points x_i de la subdivision, mais il n'y a aucune difficulté pour donner un sens à l'intégrale $\int_a^b f'(t) dt$.*

La fonction $u \in \mathcal{F}_T$ admet un relèvement f et, d'après les questions 1. et 5., ce relèvement f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle où u est de classe $\mathcal{C}^1$ avec pour dérivée $-i u' \bar{u}$, donc f est continu et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, puis

$$d_T(u) = \frac{1}{2\pi} (f(a+T) - f(a)) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+T} f'(t) dt = -\frac{1}{2\pi} \int_a^{a+T} i u'(t) \overline{u(t)} dt.$$

12. De la formule de Parseval, par polarisation, on déduit que, si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \overline{c_n(f)} c_n(g) = (f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Comme u est 2π -périodique, continue, et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on a $c_n(u') = in c_n(u)$, donc

$$d_{2\pi}(u) = (iu|u') = \sum_{n \in \mathbf{Z}} c_n(iu) c_n(u') = \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-i) \overline{c_n(u)} in c_n(u) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} n |c_n(u)|^2.$$

13. Soit θ un réel tel que $z = e^{i\theta}$.

Soit $F = \{t \in [a, a + T[\mid u(t) = z\} = \{t \in [a, a + T[\mid f(t) \in \theta + 2\pi\mathbf{Z}\}$. On suppose $F = \{t_1, \dots, t_n\}$, avec $a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n < a + T$ et $n = p + q$.

Pour tout $k \in \mathbf{Z}$, soit l'intervalle $I_k =]\theta + 2k\pi, \theta + 2(k+1)\pi[$.

Supposons d'abord $t_1 > a$, c'est-à-dire $u(a) \neq z$, et posons $t_0 = a$, $t_{n+1} = a + T$. Du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit que, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, il existe un unique entier relatif k_i tel que $f([t_i, t_{i+1}[) \subset I_{k_i}$. De plus, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, si $f'(t_i) > 0$, alors $k_i = k_{i-1} + 1$ tandis que, si $f'(t_i) < 0$, alors $k_i = k_{i-1} - 1$ (je n'ai pas envie de détailler). On a finalement $k_n = k_0 + p - q$, et comme $f(a)$ et $f(a + T)$ ne sont pas dans $\theta + 2\pi\mathbf{Z}$, on a $f(a) \in I_{k_0}$ et $f(a + T) \in I_{k_n}$ avec $f(a + T) - f(a)$ multiple de 2π , ce qui entraîne $f(a + T) - f(a) = 2\pi(k_n - k_0)$, puis $d_T(u) = k_n - k_0 = p - q$.

Si $t_1 = a$, c'est-à-dire $a \in F$, il suffit de changer de point a et d'en prendre un qui n'appartient pas à F : en effet, l'expression (1) de l'énoncé définissant $d_T(u)$ ne dépend pas du choix de ce point a (question 6.), pas plus que le nombre de solutions de $u(t) = z$ sur un intervalle de la forme $[a, a + T[$ puisque u est T -périodique, pas plus que les nombres p et q puisque f vérifie $f(t + T) = f(t) + 2\pi C$, où C est un entier relatif fixé.

Troisième Partie

14. Il suffit en fait de supposer φ lipschitzienne par rapport à la première variable, c'est-à-dire vérifiant

$$\exists k > 0 \quad \forall (\lambda, \mu) \in [0, 1]^2 \quad \forall t \in [a, a + T] \quad |\varphi_\lambda(t) - \varphi_\mu(t)| \leq k |\lambda - \mu|.$$

L'inégalité ci-dessus restera alors vérifiée pour tout t réel grâce à la T -périodicité des applications partielles φ_λ (condition (i)) et s'écrit alors $\|\varphi_\lambda - \varphi_\mu\|_\infty \leq k |\lambda - \mu|$; il en résulte alors la condition (ii) de façon évidente.

15. Soit $\lambda_0 \in [0, 1]$; d'après la condition (ii), il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in [0, 1] \quad |\lambda - \lambda_0| < \alpha \implies \|\varphi_\lambda - \varphi_{\lambda_0}\|_\infty < 2.$$

Pour $\lambda \in [0, 1]$ tel que $|\lambda - \lambda_0| < \alpha$, on a donc $d_T(\varphi_\lambda) = d_T(\varphi_{\lambda_0})$ d'après la question 10. L'application $\lambda \mapsto d_T(\varphi_\lambda)$ est donc continue (en fait, "localement constante") sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbf{Z}$, elle est donc constante, d'où $d_T(v) = d_T(\varphi_1) = d_T(\varphi_0) = d_T(u)$.

16. • $|\bar{z}e^{it}| = |z| < 1$, donc M_z est bien définie sur $\mathbb{R}$, continue et 2π -périodique. De plus,

$$\overline{z - e^{it}} = \bar{z} - e^{-it} = -e^{-it} (1 - \bar{z}e^{it}), \quad \text{donc} \quad |z - e^{it}| = |1 - \bar{z}e^{it}|$$

et M_z est à valeurs dans $\mathcal{U}$. On a donc $M_z \in \mathcal{F}_{2\pi}$.

- Pour $(\lambda, t) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$, posons $\varphi_\lambda(t) = M_{\lambda z}(t) = \frac{\lambda z - e^{it}}{1 - \lambda \bar{z} e^{it}}$. Alors $\varphi_0(t) = M_0(t) = -e^{it} = e^{i(t+\pi)}$, et $\varphi_1(t) = M_z(t)$. L'application φ est manifestement continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$, chaque application partielle $\varphi_\lambda = M_{\lambda z}$ appartient à $\mathcal{F}_{2\pi}$ puisque $|\lambda z| < 1$ (cf. ci-dessus), il ne reste donc plus qu'à montrer la condition (ii) pour prouver que φ est une homotopie entre M_0 et M_z , mais pour cela il suffit de montrer que φ est lipschitzienne par rapport à la première variable (question 14.). Or,

$$\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t) = \frac{(\mu - \lambda)z + (\lambda - \mu)\bar{z}e^{2it}}{(1 - \mu\bar{z}e^{it})(1 - \lambda\bar{z}e^{it})}$$

et on obtient facilement $|\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t)| \leq \frac{2}{(1 - |z|)^2} |\mu - \lambda|$, ce qui donne la conclusion.

Ainsi, l'application M_z est homotope à $M_0 : t \mapsto e^{i(t+\pi)}$. On a clairement $d_{2\pi}(M_0) = 1$, donc $d_{2\pi}(M_z) = 1$ d'après la question 15.

17. Soit f un relèvement de u ; alors f est T -périodique puisque $d_T(u) = 0$. Posons $\varphi_\lambda(t) = e^{i\lambda f(t)}$, alors $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ est continue, $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = u$, chaque application partielle φ_λ appartient à $\mathcal{F}_T$. Enfin,

$$|\varphi_\mu(t) - \varphi_\lambda(t)| = |e^{i\mu f(t)} - e^{i\lambda f(t)}| \leq \|f\|_\infty |\mu - \lambda|$$

(en utilisant $|e^{is} - e^{it}| \leq |s - t|$, conséquence des inégalités d'accroissements finis) et cela garantit la condition (ii). Donc φ est une homotopie entre 1 et u .

18. On a vu que, si u et v sont homotopes, alors $d_T(u) = d_T(v)$. Réciproquement, si $d_T(u) = d_T(v)$, alors $d_T\left(\frac{v}{u}\right) = 0$, donc $\frac{v}{u}$ est homotope à 1 ; il existe donc une homotopie $\varphi : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{U}$ entre 1 et $\frac{v}{u}$. En posant $\psi_\lambda(t) = u(t) \varphi_\lambda(t)$, on construit une homotopie entre u et v .

Quatrième Partie

19. Avec $\Gamma_n(t) = e^{int}$, on a bien $\Gamma_n \in \mathcal{A}_{2\pi}$, $\Gamma'_n(t) = i n e^{int}$, donc $\vec{T}_{\Gamma_n}(t) = i e^{int} = e^{if(t)}$ avec $f(t) = nt + \frac{\pi}{2}$. Donc

$$i_{2\pi}(\Gamma_n) = d_{2\pi}(\vec{T}_{\Gamma_n}) = \frac{1}{2\pi} (f(2\pi) - f(0)) = n.$$

20. Je pense qu'il y a une (petite) erreur d'énoncé. Avec $\Gamma(t) = \cos(t) + i \sin(2t)$, on a $\Gamma \in \mathcal{A}_{2\pi}$, $\vec{T}_\Gamma(t) = \frac{-\sin t + 2i \cos(2t)}{\sqrt{\sin^2 t + 4 \cos^2(2t)}}$. Comme $|\vec{T}_\Gamma(t)| = 1$, on a les équivalences

$$\vec{T}_\Gamma(t) = -i \iff \begin{cases} \operatorname{Re}(\Gamma'(t)) = 0 \\ \operatorname{Im}(\Gamma'(t)) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sin t = 0 \\ \cos(2t) < 0 \end{cases},$$

ce qui ne se produit jamais puisque $\sin t = 0 \implies t \in \pi \mathbf{Z} \implies \cos(2t) = 1$. On a donc $\vec{T}_\Gamma(t) \neq -i$ pour tout t réel. L'application $\vec{T}_\Gamma \in \mathcal{F}_{2\pi}$ n'est donc pas surjective, d'où $d_{2\pi}(\vec{T}_\Gamma) = 0$ d'après la question 8., soit $i_{2\pi}(\Gamma) = 0$.

- 21.** Si $\Gamma \in \mathcal{A}_T$ est paramétré par l'abscisse curviligne (paramétrage normal, la courbe est alors de longueur T), on a $|\Gamma'(t)| = 1$ pour tout t , donc $\vec{T}_\Gamma = \Gamma' \in \mathcal{F}_T^1$ admet un relèvement $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ (que l'on peut interpréter comme une détermination de l'angle orienté des vecteurs $\vec{e}_1 = (1, 0)$ et $\vec{T}_\Gamma$), et la courbure est $c = \alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$. Donc

$$2\pi i_T(\Gamma) = 2\pi d_T(\Gamma') = 2\pi \frac{1}{2\pi} (\alpha(T) - \alpha(0)) = \int_0^T c(t) dt .$$

- 22.** L'application S_Γ est bien définie sur $\mathbb{R}^2$, elle ne s'annule pas si $x - y \notin T\mathbb{Z}$ car l'arc Γ est simple, elle ne s'annule pas non plus si $x - y \in T\mathbb{Z}$ car l'arc est régulier. La relation $S_\Gamma(y, x) = S_\Gamma(x, y)$ est claire si $x - y \notin T\mathbb{Z}$, et elle résulte de la T -périodicité de Γ (et donc de Γ') si $x - y \in T\mathbb{Z}$. Si $x - y \notin T\mathbb{Z}$, alors

$$S_\Gamma(x + T, y) = \frac{\Gamma(x + T) - \Gamma(y)}{\sin\left(\frac{\pi}{T}(x + T - y)\right)} = \frac{\Gamma(x) - \Gamma(y)}{-\sin\left(\frac{\pi}{T}(x - y)\right)} = -S_\Gamma(x, y)$$

tandis que, si $x - y = kT$ avec k entier relatif, alors

$$S_\Gamma(x + T, y) = S_\Gamma(y + (k + 1)T, y) = (-1)^{k+1} \frac{T}{\pi} \Gamma'(y) = -S_\Gamma(y + kT, y) = -S_\Gamma(x, y) .$$

Dans les deux cas, $S_\Gamma(x, y + T) = S_\Gamma(y + T, x) = -S_\Gamma(y, x) = -S_\Gamma(x, y)$.

- 23.** Soit $\varphi :] - T, T[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)$ pour $t \neq 0$ et $\varphi(0) = \frac{\pi}{T}$. La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] - T, T[$ (et même sur $\mathbb{R}$) puisqu'elle est développable en série entière. Comme elle ne s'annule pas sur $] - T, T[$, la fonction $\psi = \frac{1}{\varphi}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. La fonction $h : U \rightarrow] - T, T[$, définie par $h(x, y) = x - y$ est évidemment de classe $\mathcal{C}^\infty$. La fonction composée $\psi \circ h$ est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et elle prolonge F . On a donc un prolongement de F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur U en posant $F(x, x) = \psi(0) = \frac{T}{\pi}$.

- 24.** Pour $x \neq y$, on a

$$G(x, y) = \frac{1}{x - y} \int_y^x \Gamma'(t) dt = \int_0^1 \Gamma'(y + u(x - y)) du \quad (*)$$

grâce au changement de variable affine $t = y + u(x - y)$. Il semble alors logique de poser $G(x, x) = \Gamma'(x)$ pour que l'égalité (*) soit vraie pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Considérons alors la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \quad ; \quad (x, y, u) \mapsto \Gamma'(y + u(x - y)) .$$

Cette fonction g admet des dérivées partielles

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y, u) = u \Gamma''(y + u(x - y)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y, u) = (1 - u) \Gamma''(y + u(x - y))$$

qui sont continues sur $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$; si K est un compact de $\mathbb{R}^2$, alors les fonctions continues $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ sont bornées sur le compact $K \times [0, 1]$, on en déduit une condition de domination

qui permet d'affirmer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout compact K de $\mathbb{R}^2$, et donc sur $\mathbb{R}^2$ (en étendant un tout petit peu au cas de deux paramètres les théorèmes du cours sur les intégrales dépendant d'un paramètre).

- 25.** On vérifie aisément que $\forall (x, y) \in U \quad S_\Gamma(x, y) = G(x, y) F(x, y)$, en dissociant les cas $x \neq y$ et $x = y$. La fonction S_Γ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur U comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. La relation $S_\Gamma(x + T, y) = -S_\Gamma(x, y)$ montre, par translation, que S_Γ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur la bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x - y < 2T\}$ puis, par translations successives, sur toutes les bandes $V_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid kT < x - y < (k + 2)T\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Tout point de $\mathbb{R}^2$ étant intérieur à au moins une de ces bandes, la fonction S_Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction S_Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, donc son gradient $(x, y) \mapsto \overrightarrow{\text{grad}} S_\Gamma(x, y)$ est une application continue sur $\mathbb{R}^2$, donc bornée sur tout compact de $\mathbb{R}^2$, et notamment sur le pavé $P = [-T, T]^2$. De plus, l'application S_Γ est "bipériodique" :

$$S_\Gamma(x + 2T, y) = S_\Gamma(x, y + 2T) = S_\Gamma(x, y) ;$$

il en est donc de même de son gradient qui est alors borné sur $\mathbb{R}^2$. Des inégalités d'accroissements finis :

$$|S_\Gamma(x', y') - S_\Gamma(x, y)| \leq M \|(x', y') - (x, y)\|_2 ,$$

avec $M = \max_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \|\overrightarrow{\text{grad}} S_\Gamma(u, v)\|_2 = \max_{(u, v) \in P} \|\overrightarrow{\text{grad}} S_\Gamma(u, v)\|_2$, on déduit que S_Γ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$.

- 26.** L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \text{Re}(\Gamma(t))$, est continue et T -périodique, donc atteint un minimum.

Si ce minimum est atteint en a , alors $\text{Re}(\Gamma'(a)) = (\text{Re}(\Gamma))'(a) = 0$ et $S_\Gamma(a, a) = \frac{T}{\pi} \Gamma'(a)$ est imaginaire pur. Quitte à reparamétriser l'arc (translation du paramètre t), on peut toujours supposer que $a = 0$.

- 27.** Par définition (T -périodicité) de u_0 , on a $u_0(T) = u_0(0) = \frac{S_\Gamma(P_0(0))}{|S_\Gamma(P_0(0))|} = \frac{S_\Gamma(0, 0)}{|S_\Gamma(0, 0)|}$. Or, $S_\Gamma(P_0(T)) = S_\Gamma(T, T) = -S_\Gamma(0, T) = S_\Gamma(0, 0)$ d'après la question **22.**, donc $u_0(T) = \frac{S_\Gamma(P_0(T))}{|S_\Gamma(P_0(T))|}$.

On vérifie facilement (en faisant un dessin ?) que l'application P_0 est continue sur $[0, T]$. La fonction u_0 est bien définie car S_Γ ne s'annule pas, elle est à valeurs dans $\mathcal{U}$, T -périodique, continue sur $[0, T[$ comme composée de fonctions continues, continue à gauche au point T d'après ce qui précède, donc continue sur $\mathbb{R}$; finalement, $u_0 \in \mathcal{F}_T$.

- 28.** On sait que $S_\Gamma(0, 0) = S_\Gamma(a, a) \in i\mathbb{R}$, donc $u_0(0) = \frac{S_\Gamma(0, 0)}{|S_\Gamma(0, 0)|} \in \{-i, i\}$.

Pour $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$, on a $P_0(t) = (0, 2t)$ et $S_\Gamma(0, 2t) = \frac{\Gamma(2t) - \Gamma(0)}{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)}$, avec $0 < \frac{2\pi t}{T} < \pi$, donc

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) > 0. \text{ Alors } \text{Re}(S_\Gamma(P_0(t))) = \text{Re}(S_\Gamma(0, 2t)) = \frac{\text{Re}(\Gamma(2t)) - \text{Re}(\Gamma(0))}{\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)} \geq 0$$

puisque $\operatorname{Re}(\Gamma(0)) = \min_{t \in \mathbb{R}} \operatorname{Re}(\Gamma(t))$. Donc $\operatorname{Re}(u_0(t)) \geq 0$ pour tout $t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[$, et aussi

pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$ par continuité de u_0 .

Si $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, alors $P_0(t) = (0, 2t)$ et $P_0\left(t + \frac{T}{2}\right) = (2t, T)$, donc

$$S_\Gamma \circ P_0\left(t + \frac{T}{2}\right) = S_\Gamma(2t, T) = S_\Gamma(T, 2t) = -S_\Gamma(0, 2t) = -S_\Gamma \circ P_0(t).$$

Donc $u_0\left(t + \frac{T}{2}\right) = -u_0(t)$.

29. L'application $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue (vérifier le raccordement au point $\frac{T}{2}$). Des questions

3. et **28.**, on déduit que $u_0 = e^{if}$ sur $\left[0, \frac{T}{2}\right]$. De plus, $u_0\left(\frac{T}{2}\right) = -u_0(0) \in \{-i, i\}$, donc

$2 \arcsin\left(\operatorname{Im}\left(u_0\left(\frac{T}{2}\right)\right)\right) \in \{-\pi, \pi\}$ et, pour tout $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, on a $f\left(t + \frac{T}{2}\right) = \pm\pi + f(t)$, donc

$$e^{if\left(t + \frac{T}{2}\right)} = -e^{if(t)} = -u_0(t) = u_0\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Ainsi, f est un relèvement de u_0 sur $[0, T]$.

On a $f\left(\frac{T}{2}\right) = \arcsin\left(\operatorname{Im}\left(u_0\left(\frac{T}{2}\right)\right)\right) = \arcsin\left(\operatorname{Im}(-u_0(0))\right) = -f(0)$ et

$$f(T) = 2 \arcsin\left(\operatorname{Im}\left(u_0\left(\frac{T}{2}\right)\right)\right) - \arcsin\left(\operatorname{Im}(u_0(0))\right) = -3f(0).$$

Donc $f(T) - f(0) = 2f\left(\frac{T}{2}\right) - 2f(0) = -4f(0)$.

Enfin, $d_T(u_0) = \frac{1}{2\pi}(f(T) - f(0)) = -\frac{2}{\pi}f(0) \in \{-1, 1\}$ car $f(0) = \pm\frac{\pi}{2}$.

30. Les applications P_0 et P_1 sont bornées sur $[0, T]$ (car continues sur le segment $[0, T]$) : si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on a $\|P_0(t)\|_\infty \leq T$ et $\|P_1(t)\|_\infty \leq T$ sur $[0, T]$. Avec le même choix de norme sur $\mathbb{R}^2$, l'application P_1 est 1-lipschitzienne sur $[0, T]$ et l'application P_0 est 2-lipschitzienne sur $[0, T]$ (*faire un dessin*). Pour $(\lambda, t) \in [0, 1] \times [0, T]$ et $(\mu, s) \in [0, 1] \times [0, T]$, on peut décomposer

$$|X(\mu, s) - X(\lambda, t)| \leq |X(\mu, s) - X(\lambda, s)| + |X(\lambda, s) - X(\lambda, t)|,$$

avec

$$\begin{aligned} \|X(\mu, s) - X(\lambda, s)\| &= \|P_\mu(s) - P_\lambda(s)\| = \|(\mu - \lambda)(P_1(s) - P_0(s))\| \\ &\leq |\mu - \lambda|(\|P_1(s)\| + \|P_0(s)\|) \leq 2T|\mu - \lambda|. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|X(\lambda, s) - X(\lambda, t)\| &= \|P_\lambda(s) - P_\lambda(t)\| \\ &= \|\lambda P_1(s) + (1 - \lambda)P_0(s) - \lambda P_1(t) - (1 - \lambda)P_0(t)\| \\ &\leq \lambda\|P_1(s) - P_1(t)\| + (1 - \lambda)\|P_0(s) - P_0(t)\| \\ &\leq \|P_1(s) - P_1(t)\| + \|P_0(s) - P_0(t)\| \leq 3|s - t|. \end{aligned}$$

Finalement, $|X(\mu, s) - X(\lambda, t)| \leq 2T |\mu - \lambda| + 3 |s - t| \leq (2T + 3) \|(\mu, s) - (\lambda, t)\|_\infty$, et l'application X est lipschitzienne de $[0, 1] \times [0, T]$ vers $\mathbb{R}^2$.

On a toujours $S_\Gamma \circ P_\lambda(T) = S_\Gamma(T, T) = S_\Gamma(0, 0) = S_\Gamma \circ P_\lambda(0)$, donc $\varphi_\lambda(T) = \frac{S_\Gamma(P_\lambda(T))}{|S_\Gamma(P_\lambda(T))|}$, ce qui prouve la continuité sur $\mathbb{R}$ des applications partielles φ_λ . De cette continuité partielle et du caractère lipschitzien de l'application X (et donc aussi de l'application $S_\Gamma \circ X$ par composition), on déduit la continuité de $\varphi : (\lambda, t) \mapsto \varphi_\lambda(t)$ sur $[0, 1] \times [0, T]$, puis sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ (*pas envie de détailler*). On a $\varphi_0(t) = \frac{S_\Gamma(P_0(t))}{|S_\Gamma(P_0(t))|} = u_0(t)$ et

$$\varphi_1(t) = \frac{S_\Gamma(P_1(t))}{|S_\Gamma(P_1(t))|} = \frac{S_\Gamma(t, t)}{|S_\Gamma(t, t)|} = \frac{\Gamma'(t)}{|\Gamma'(t)|} = \vec{T}_\Gamma(t).$$

Pour $\lambda \in [0, 1]$ fixé, l'application partielle φ_λ est T -périodique, continue, à valeurs dans $\mathcal{U}$ donc appartient à $\mathcal{F}_T$ ce qui donne la condition (i). Enfin, l'application $S_\Gamma \circ X$ est lipschitzienne sur $[0, 1] \times [0, T]$ comme composée d'applications lipschitziennes ; de plus elle est continue sur un compact et ne s'annule pas, donc il existe m et M strictement positifs tels que $m \leq |S_\Gamma \circ X| \leq M$ et l'application $z \mapsto \frac{z}{|z|}$ est lipschitzienne sur la couronne $\{z \in \mathbb{C} \mid m \leq |z| \leq M\}$ (car de classe $\mathcal{C}^1$ sur un compact) ; par composition encore, φ est lipschitzienne sur $[0, 1] \times [0, T]$ ce qui garantit la condition (ii). Donc φ est une homotopie entre u_0 et $\vec{T}_\Gamma$.

Finalement, $i_T(\Gamma) = d_T(\vec{T}_\Gamma) = d_T(u_0) \in \{-1, 1\}$.