

Préambule

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = X, \quad \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad \dots \quad \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ où x est une variable réelle et $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle.

Partie I

On étudie dans cette partie quelques propriétés des polynômes Γ_k .

- 1) Montrer que pour tout entier relatif x , $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif. Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.
- 2) Établir pour tout entier $n \geq 1$ les formules :

$$\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n(X) = \Gamma_{n-1}(X), \quad n\Gamma_n(X) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X).$$

- 3) Soit un polynôme Q de degré n . Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.
 - Pour tout entier relatif x , $Q(x)$ est un entier relatif.
 - Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, \dots, x_n$ tels que les $Q(x_i)$ soient des entiers relatifs.
 - Il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $Q(X) = a_0 + a_1\Gamma_1(X) + \dots + a_n\Gamma_n(X)$.
 On pourra observer que tout polynôme est une combinaison linéaire des polynômes Γ_k , et raisonner par récurrence sur le degré de Q .
- 4) Soit une fraction rationnelle $F = P/Q$, où P et Q sont deux polynômes réels. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout n entier au moins égal à N , $F(n)$ soit entier relatif. Montrer que F est un polynôme satisfaisant aux conditions de 3). On pourra utiliser une récurrence sur d , d désignant le degré de F , c'est-à-dire la différence entre le degré de P et le degré de Q .

Partie II

- 1) Soit f une application de $[\alpha, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, où $\alpha \leq 0$.
 - a) Montrer qu'il existe une suite de réels (a_n) et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n , la fonction $f(x) - \sum_{k=0}^n a_k \Gamma_k(x)$ est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots, n$.
La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ sera dite suite associée à la fonction f .
 - b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$ ($b > 0$) est $a_n = (b-1)^n$.
- 2) a) On suppose de plus ici que f est de classe infinie. On donne un réel $x \geq \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N , un réel θ tel que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^N a_k \Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta).$$

On pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe $f(t) - \sum_{k=0}^N a_k \Gamma_k(t) - A\Gamma_{N+1}(t)$ où A est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle.

- b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel positif λ_n tel que $a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$.

- 3) Caractériser les nombres réels r possédant la propriété suivante : pour tout entier strictement positif n , n^r est un entier. On pourra, p étant un entier naturel, utiliser la suite associée à la fonction $x \mapsto (p+x)^r$, et faire tendre p vers $+\infty$.

Partie III

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite donnée de nombres réels. On lui associe la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$. Dans cette partie, on étudie les propriétés de cette série.

- 1) Soit x un réel fixé, non égal à un entier naturel. On considère la suite $(\mu_n)_{n \geq 0}$ définie par $\mu_n = n^\rho |\Gamma_n(x)|$.
- Étudier, selon le réel ρ , la nature de la série de terme général $u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$.
 - Que peut-on en conclure pour la suite μ_n ? Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$, tel que l'on ait, quand n tend vers $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{x+1} |\Gamma_n(x)| = K(x).$$

On ne cherchera pas à calculer $K(x)$.

- 2) Soit f une application de classe infinie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier naturel n_0 , tel que pour tout y positif et tout entier n supérieur ou égal à n_0 , $|f^{(n)}(y)| \leq Mn$, M étant une constante strictement positive.

- Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ la suite associée à f , selon la définition donnée en **II-1a**). Montrer que l'on a pour tout réel positif x : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$.
- Que peut-on dire de f si cette fonction est nulle pour tout entier naturel ?

- 3) Soient x et y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. Que dire de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(y)$ si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ converge absolument ?

- 4) Soit x_0 un réel non entier naturel, b un entier strictement supérieur à $|x_0|$. Soit x un réel appartenant à $]x_0, b]$. On pose $w_n(x) = \Gamma_n(x)/\Gamma_n(x_0)$.

- Établir que la suite $(w_n(x))_{n \geq b}$ est monotone et tend vers zéro.
- En déduire l'existence d'une constante K telle que, pour tout x appartenant à $[x_0, b]$, et pour tout $n \geq b$, $|\Gamma_n(x)| \leq K |\Gamma_n(x_0)|$.
- Montrer que, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x_0)$ converge absolument, alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.

- 5) On admet le théorème (T) suivant :

Soit une série numérique convergente $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ et une suite $(V_n)_{n \geq 0}$ d'applications d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$, telle que :

- pour tout x de I , la suite $n \mapsto V_n(x)$ est décroissante
- il existe M réel tel que, pour tout x de I et tout n entier naturel : $|V_n(x)| \leq M$,

alors la série de fonctions $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n V_n(x)$ converge uniformément dans I .

- Déduire de ce théorème que, si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$ converge en un point x_0 (x_0 non entier naturel), alors elle converge uniformément sur tout compact de $[x_0, +\infty[$.
- Montrer de plus qu'il y a convergence absolue sur $]x_0 + 1, +\infty[$.

- 6) On considère, dans cette question, la série $\sum_{n=0}^{\infty} h^n \Gamma_n(x)$.

- On suppose $|h| < 1$. Pour quels x la série est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?
- Que se passe-t-il lorsque $|h| > 1$?
- On prend $h = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que la somme est égale à 2^x . On pourra appliquer **II-2a**) et s'en servir pour déterminer le signe de $2^x - \sum_{k=0}^n \Gamma_k(x)$.

- On prend $h = -1$. Pour quels x la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma_n(x)$ est-elle absolument convergente ? Pour quels x est-elle convergente ? Soit $\sigma(x)$ sa somme ; donner $\sigma(x)$ lorsque x est entier naturel.

- e) On fixe x strictement positif, et l'on pose, t décrivant $[0, 1]$: $\varphi_x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \Gamma_n(x)$. Reconnaître, pour $t \neq 1$, cette fonction. Établir que la série ci-dessus converge normalement en t sur $[0, 1]$. En déduire $\sigma(x)$.

Partie IV

On considère dans cette partie des fonctions de la forme $f(x) = \int_{-1}^0 (1+t)^x h(t) dt$ où h est une application continue de $[-1, 0]$ dans $\mathbb{R}$.

- 1) Montrer que, pour $x > 0$, on a la relation : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{-1}^0 t^n h(t) dt \right) \Gamma_n(x)$. (1)
- 2) h désigne une fonction définie et continue sur $[-1, 0]$. On suppose $x > -1$. Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale la relation, pour tout entier N

$$(1+t)^x = \sum_{0 \leq n \leq N} t^n \Gamma_n(x) + R_N(t, x) \text{ où } R_N(t, x) = (N+1) \Gamma_{N+1}(x) \int_0^t \left(\frac{t-u}{1+u} \right)^N (1+u)^{x-1} du.$$

- 3) Conservant les hypothèses du 2) on étudie ici $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^0 h(t) R_N(t, x) dt$.

a) Montrer que l'intégrale $\int_{-1}^0 h(t) R_N(t, x) dt$ converge.

b) À l'aide du changement de variable $s = \frac{t-u}{1+u}$ établir pour $|t| < 1$

$$R_N(t, x) = (N+1) \Gamma_{N+1}(x) (1+t)^x \int_0^t (s+1)^{-x-1} s^N ds.$$

- c) En posant $r_N(t) = \int_0^t (s+1)^{-x-1} s^N ds$ et $H(t) = \int_{-1}^t (1+s)^x h(s) ds$, établir, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_{-1}^0 R_N(t, x) h(t) dt = -(N+1) \Gamma_{N+1}(x) \int_{-1}^0 H(t) (1+t)^{-x-1} t^N dt.$$

- 4) Montrer que l'application $t \mapsto |H(t)(1+t)^{-x-1}|$ est bornée. En déduire que la relation (1) est vérifiée pour $x > -1$.

- 5) On prend ici $h(t) = (1+t)^\lambda$, où $\lambda \geq 0$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant f a-t-elle un sens ?

b) Calculer $a_n = \int_{-1}^0 t^n h(t) dt$ pour tout n entier naturel.

c) Établir, pour $x > -1$ la relation : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma_n(x)$. (2)

d) En utilisant les pôles et les zéros de la différence $f(x) - \sum_{n=0}^N a_n \Gamma_n(x)$ déterminer les valeurs réelles de x pour lesquelles la relation (2) est valable.