

X-ENS 2015

Un corrigé

Partie I

1. On remplace $f(x)$ par $f_1(x) + if_2(x)$ dans (E_α) et on identifie les parties réelle et imaginaire. Pour tout réel x , on obtient

$$f_1''(x) = \frac{x}{2}f_2'(x) - \frac{f_1(x)}{2}(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1)$$

$$f_2''(x) = -\frac{x}{2}f_1'(x) - \frac{f_2(x)}{2}(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1)$$

2. Posons

$$g = |f'|^2 + \frac{1}{4\alpha}(\alpha|f|^2 + 1)^2 = (f_1')^2 + (f_2')^2 + \frac{1}{4\alpha}(\alpha(f_1^2 + f_2^2) + 1)^2$$

g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$g'(x) = 2f_1'(x)f_1''(x) + 2f_2'(x)f_2''(x) + (f_1(x)f_1'(x) + f_2(x)f_2'(x))(\alpha(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) + 1)$$

Si on remplace f_1'' et f_2'' par les expressions trouvées ci-dessus, on obtient $g' = 0$. g est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Comme $g(0) = \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)|^2 + \frac{1}{4\alpha}(\alpha|f(x)|^2 + 1)^2 = \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$$

3. Comme $|f'(x)|^2 \geq 0$, on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{4\alpha}(\alpha|f(x)|^2 + 1)^2 \leq \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$$

Multiplier par $4\alpha > 0$ ne change pas le sens de l'inégalité et passer à la racine carrée est une opération croissante. Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\alpha|f(x)|^2 + 1| \leq |\alpha + 1|$$

Comme $\alpha|f(x)|^2 + 1$ et $\alpha + 1$ sont positifs, on peut supprimer les modules pour obtenir l'inégalité $\alpha|f(x)|^2 \leq \alpha$ puis (toujours comme $\alpha > 0$)

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1$$

De façon similaire, l'inégalité de la question précédente donne $|f'(x)|^2 \leq \frac{(\alpha+1)^2}{4\alpha}$ et, en passant à la racine carrée,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}(\alpha + 1)$$

4. (a) On procède comme en question 2 en introduisant la fonction h définie par

$$\begin{aligned} h(x) &= \Im \left(f'(x) \overline{f(x)} \right) + \frac{x}{4}|f(x)|^2 - \frac{1}{4} \int_0^x |f(t)|^2 dt \\ &= -f_1'(x)f_2(x) + f_2'(x)f_1(x) + \frac{x}{4}(f_1(x)^2 + f_2(x)^2) - \frac{1}{4} \int_0^x (f_1(t)^2 + f_2(t)^2) dt \end{aligned}$$

Comme $f_1^2 + f_2^2$ est continue sur l'intervalle $\mathbb{R}$ et $0 \in \mathbb{R}$, le théorème fondamental indique que $x \mapsto \int_0^x |f|^2$ est une primitive de $|f|^2$ sur $\mathbb{R}$. h est ainsi dérivable et le calcul donne (après première salve de simplification)

$$h'(x) = -f_1''(x)f_2(x) + f_2''(x)f_1(x) + \frac{x}{2}(f_1'(x)f_1(x) + f_2'(x)f_2(x))$$

En utilisant les expressions trouvées en question **2** pour f_1'' et f_2'' , on obtient $h' = 0$. h est donc constante sur $\mathbb{R}$. Elle est nulle en 0 et ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Im \left(f'(x) \overline{f(x)} \right) + \frac{x}{4} |f(x)|^2 - \frac{1}{4} \int_0^x |f(t)|^2 dt = 0$$

(b) Le théorème fondamental évoqué ci-dessus donne (pour $x > 0$)

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 \right) = \frac{1}{x} |f(x)|^2 - \frac{1}{x^2} \int_0^x |f|^2 \quad (*)$$

En remplaçant $\int_0^x |f|^2$ dans le membre de droite par l'expression trouvée en question **4b**, on en déduit que

$$\forall x > 0, \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 \right) = -\frac{4}{x^2} \Im \left(f'(x) \overline{f(x)} \right)$$

(c) Comme $\left| \Im \left(f'(x) \overline{f(x)} \right) \right| \leq |f'(x)| \cdot |f(x)|$, avec la question **3** on obtient que

$$\forall x > 0, \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 \right) \right| \leq \frac{1}{x^2} \frac{\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

La fonction $H : x \mapsto \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 \right)$ est donc intégrable au voisinage de $+\infty$ (comparaison aux fonctions de Riemann). Comme elle est continue sur $[1, +\infty[$, elle est intégrable sur $[1, +\infty[$. En particulier, son intégrale sur $[1, +\infty[$ existe. En notant ℓ' sa valeur, on a

$$\ell' = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x H(t) dt$$

Mais, $F : x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x |f|^2$ est une primitive de H sur $[1, +\infty[$ et ceci s'écrit donc

$$\ell' = \lim_{x \rightarrow +\infty} (F(x) - F(1))$$

On a ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 = \ell \text{ avec } \ell = \ell' + F(1)$$

On a bien sûr $\ell \geq 0$ puisque c'est la limite d'une fonction positive sur $\mathbb{R}^{+*}$.

(d) En reprenant les notations qui précèdent, on a

$$|F(x) - \ell| = \left| \int_1^x H - \int_1^\infty H \right| = \left| \int_x^\infty H \right|$$

Comme H est intégrable sur $[x, +\infty[$ (pour $x > 0$) on peut majorer par inégalité triangulaire et en utilisant l'inégalité (*) de la question précédente (en remarquant que le majorant est aussi intégrable sur $[x, +\infty[$) on obtient

$$\forall x > 0, |F(x) - \ell| \leq M \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \text{ avec } M = \frac{\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}}$$

ce qui s'écrit directement

$$\forall x > 0, \left| \frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 - \ell \right| \leq \frac{M}{x}$$

(e) Avec le résultat de **4a** on a

$$|f(x)|^2 - \ell = \frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 - \ell - \frac{4}{x} \Im \left(f'(x) \overline{f(x)} \right)$$

En passant au module et en utilisant les questions précédentes, on a alors

$$||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M}{x} + \frac{4}{x} \frac{\alpha + 1}{2\sqrt{\alpha}} = \frac{M_0}{x} \quad \text{avec} \quad M_0 = M + \frac{2(\alpha + 1)}{\sqrt{\alpha}}$$

5. (a) En reprenant le résultat de la question **2**, on a (factorisation $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$)

$$|f'(x)|^2 = \frac{1}{4}(1 - |f(x)|^2)(\alpha + 2 + \alpha|f(x)|)$$

Comme $|f(x)| \leq 1$, on en déduit que

$$|f'(x)|^2 \leq \frac{\alpha + 1}{2} ||f(x)|^2 - 1|$$

Avec l'hypothèse $\ell = 1$, on a alors

$$|f'(x)| \leq \frac{K}{\sqrt{x}} \quad \text{avec} \quad K = \sqrt{\frac{M_0(\alpha + 1)}{2}}$$

On peut alors raffiner **4c** et obtenir

$$\forall x > 0, \left| \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f|^2 \right) \right| \leq \frac{K}{x^{5/2}}$$

puis améliorer **4d** en

$$\forall x > 0, |F(x) - 1| \leq K \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^{5/2}} = \frac{M'}{x^{3/2}} \quad \text{avec} \quad M' = \frac{2K}{3}$$

et **4e** en

$$||f(x)|^2 - 1| \leq \frac{M'}{x^{3/2}} + \frac{4K}{x^{3/2}} = \frac{M_1}{x^{3/2}} \quad \text{avec} \quad M_1 = M' + 4K$$

(b) Comme $|f(x)| \leq 1$, on a aussi $|f(x)|^2 \leq 1$ et, en passant à la limite $\ell \leq 1$.

Supposons, par l'absurde, que $\ell = 1$. L'égalité de la question **2** montre alors que $|f'(x)| \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$ ce qui montre que $\Im(f'(x)\overline{f(x)}) \rightarrow 0$.

Par ailleurs, la question précédente montre que $1 - |f(x)|^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ et donc sur $\mathbb{R}^+$ (elle est continue sur $\mathbb{R}^+$). En posant $I = \int_0^{+\infty} (1 - |f|^2)$, on a alors

$$\int_0^x |f|^2 = x - I + o(1)$$

En injectant ces renseignements dans l'égalité de **4a**, on trouve

$$|f(x)|^2 = 1 - \frac{I}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $1 - |f(x)|^2$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit alors que $I = 0$. $1 - |f|^2$ est continue, positive d'intégrale nulle sur $\mathbb{R}^+$ et est alors constante sur $\mathbb{R}^+$. L'équation (E_α) donne alors $1 + \alpha = 0$ ce qui contredit $\alpha > 0$. On a montré que ℓ ne peut être égal à 1 et même que

$$\ell < 1$$

6. $|f|$ admet $\sqrt{\ell}$ comme limite en $+\infty$. Si c'est une fonction périodique, elle doit être constante égale à $\sqrt{\ell}$ et on doit avoir $\sqrt{\ell} = 1$ c'est à dire $\ell = 1$, ce qui est exclus. On a donc montré par l'absurde que $|f|$ ne saurait être périodique.

7. (a) Soit $t > 0$. On a

$$\forall y \in \mathbb{R}, f_\alpha(y) = \sqrt{t} \Psi_\alpha(t, y\sqrt{t})$$

Si, par l'absurde, $\Psi_\alpha(t, \cdot)$ était T -périodique, alors f_α serait $T/\sqrt{t}$ périodique. $|f_\alpha| = |f|$ serait donc périodique et ceci est faux. On peut donc affirmer que $\Psi_\alpha(t, \cdot)$ n'est périodique pour aucun $t > 0$.

- (b) Le calcul donne directement

$$\begin{aligned} f'_\alpha(x) &= \exp\left(i\frac{x^2}{2}\right) \left(f'(x) + \frac{ix}{2}f(x)\right) \\ f''_\alpha(x) &= \exp\left(i\frac{x^2}{2}\right) \left(f''(x) + ix f'(x) + \frac{2i - x^2}{4}f(x)\right) \\ |f_\alpha(x)| &= |f(x)| \end{aligned}$$

- (c) Comme f_α est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$ on a les régularités souhaitées pour Ψ_α par théorèmes d'opérations. Le calcul donne, en posant $y = x/\sqrt{t}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t, x) &= -\frac{1}{2t^{3/2}}f_\alpha(y) - \frac{x}{2t^2}f'_\alpha(y) \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(i\frac{y^2}{2}\right) \left(-\frac{2 - iy^2}{4}f(y) - \frac{y}{2}f'(y)\right) \\ \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{1}{t^{3/2}}f''_\alpha(y) \\ &= \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(i\frac{y^2}{2}\right) (f''(y) + iy f'(y) + \frac{2i - y^2}{4}f(y)) \end{aligned}$$

Ainsi, en tenant compte de l'expression de $f''(y)$ donnée par (E_α) ,

$$i\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2}(t, x) = \frac{1}{t^{3/2}} \exp\left(i\frac{y^2}{2}\right) \left(-\frac{f(y)}{2}(\alpha|f(y)|^2 + 1)\right)$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{2}\Psi_\alpha(t, x) \left(\alpha|\Psi_\alpha(t, x)|^2 + \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}}f_\alpha(y) \left(\frac{\alpha}{t}|f(y)|^2 + \frac{1}{t}\right)$$

et on constate que

$$i\frac{\partial \Psi_\alpha}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi_\alpha}{\partial x^2}(t, x) = -\frac{1}{2}\Psi_\alpha(t, x) \left(\alpha|\Psi_\alpha(t, x)|^2 + \frac{1}{t}\right)$$

8. (a) On a $|a_k e^{-ik^2 t + ikx}| = |a_k|$. De plus $k^2 a_k \rightarrow 0$ (série convergente donc terme général de limite nulle) et ainsi $a_k = o(1/k^2)$ est le terme général d'une série absolument convergente. Ceci justifie l'existence de $\Phi_0(t, x)$.

- (b) Posons $u_k : (x, t) \mapsto a_k e^{-ik^2 t + ikx}$. Il s'agit ici d'utiliser le théorème de régularité des sommes de séries de fonctions. Comme on a convergence simple de la série de fonctions de la variable t ($u_k(\cdot, x)$), il nous suffit de vérifier que la série dérivée (variable t , x fixé) est uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$. Or,

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial t}(t, x) \right| = k^2 |a_k|$$

Le majorant étant indépendant de t et terme général d'une série convergente, on a normale convergence sur tout $\mathbb{R}$ (ce qui entraîne la convergence uniforme). $\Phi_0(., x)$ est donc de classe C^1 (et sa dérivée s'obtient terme à terme). On a de même

$$\left| \frac{\partial u_k}{\partial x}(t, x) \right| = k|a_k|$$

$$\left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(t, x) \right| = k^2|a_k|$$

ce qui permet aussi de conclure que $\Phi_0(t, .)$ est de classe C^2 . Les dérivations terme à terme donnent

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t, x) = -i \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t, x) = - \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a_k e^{-ik^2 t + ikx}$$

(c) Tout d'abord, comme $\sum k^2 e^{ik^2} k$ converge absolument, on peut poser

$$\Phi_0(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{ik^2} e^{-ik^2 t + ikx}$$

Avec les calculs précédents, on a alors

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}, \quad i \frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t, x) = 0$$

Notons g l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'(t) = -\frac{i}{2t}y(t)$ telle que $y(1) = 1$ (on a bien existence et unicité de y par théorème de Cauchy-Lipschitz) et posons

$$\Psi_0(t, x) = g(t)\Phi_0(t, x)$$

Pour tout $t > 0$, $\Psi_0(t, .)$ est immédiatement 2π -périodique et pour tout réel x , on a $\Psi_0(1, x) = \Phi_0(1, x) = f_0(x)$. En outre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_0}{\partial t}(t, x) &= g'(t)\Phi_0(t, x) + g(t)\frac{\partial \Phi_0}{\partial t}(t, x) \\ &= \frac{i}{2t}\Psi_0(t, x) + ig(t)\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x^2}(t, x) \\ &= \frac{i}{2t}\Psi_0(t, x) + i\frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial x^2}(t, x) \end{aligned}$$

ce qui montre que Ψ_0 est solution de l'EDP proposée.

Partie II

9. On a $M^2 = \begin{pmatrix} -m^2 I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc (récurrence quasi immédiate)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad M^{2n} = \begin{pmatrix} (-1)^n m^{2n} & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n m^{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{n+1}m^{2n+1} & 0 \\ (-1)^n m^{2n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par combinaisons linéaires, on voit alors apparaître les sommes partielles des DSE de cos et sin ce qui nous permet de voir (convergence coordonnée par coordonnée) que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(t) = R(mt)$$

10. On traduit matriciellement le produit scalaire. Comme $F(t)^T = R(mt)^T = R(-mt) = F(-t)$, on a

$$F(t)X.Y = (F(t)X)^TY = X^TF(t)^TY = X^TF(-t)Y = X.F(-t)Y$$

La relation suivante traduit que $F(t)$ conserve le produit vectoriel. On pourrait faire un calcul direct pour le justifier, mais il est ici demandé une déduction. . . Pour prouver que deux vecteurs U et V sont égaux, il suffit de montrer que pour tout Z on a $U.Z = V.Z$. Je me donne donc un Z quelconque et je forme

$$F(t)(X \wedge Y).Z = (X \wedge Y).F(-t)(Z) = \det(X, Y, F(-t)Z)$$

où le déterminant est pris dans la base canonique orthonormée. Multiplier par $\det(F(t)) = 1$ ne change rien et si A est la matrice de colonnes $X, Y, F(-t)Z$, $F(t)A$ est la matrice de colonnes $F(t)X, F(t)Y, F(t)F(-t)Z = Z$. Ainsi

$$F(t)(X \wedge Y).Z = \det(F(t)X, F(t)Y, Z) = (F(t)(X) \wedge F(t)(Y)).Z$$

Ceci étant vrai pour tout Z , on a bien

$$F(t)(X \wedge Y) = F(t)(X) \wedge F(t)(Y)$$

11. On a

$$F(t)\mathcal{M} = \begin{pmatrix} -m \sin(mt) & -m \cos(mt) & 0 \\ m \cos(mt) & -m \sin(mt) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F'(t)$$

12. Cette fois,

$$\mathcal{M}X.X = X^T\mathcal{M}^TX = -X^T\mathcal{M}X$$

ce qui donne

$$\mathcal{M}X.X = 0$$

On peut interpréter $\mathcal{M}X$ comme $mE_3 \wedge X$ où $E_3 = (0, 0, 1)$. Je ne vois pas quelle interprétation géométrique supplémentaire de $\mathcal{M}$ est attendue.

13. Le polynôme caractéristique de $\mathcal{M} + I_3$ est $X((X-1)^2 + m^2)$. On est amenés à distinguer deux cas.

- Si $m = 0$ alors $(\mathcal{M} + I_3)^n = I_3$ et $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n \geq 0}$ est convergente de limite I_3 .
- Sinon, $\mathcal{M} + I_3$ admet trois valeurs propres complexes distinctes $1, 1 + im$ et $1 - im$. Cette matrice est donc $\mathbb{C}$ -diagonalisable (à sous-espaces propres de dimension 1). Il existe une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}(\mathcal{M} + I_3)P = D = \text{diag}(1, 1 + im, 1 - im)$. On a alors $D^n = P^{-1}(\mathcal{M} + I_3)^nP$. Si $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n \geq 0}$ est convergente, il en est alors de même de D^n (dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$) et donc de la suite complexe $((1 + im)^n)$. Il faut donc que $|1 + im| \leq 1$ et donc que $m = 0$.

La suite $((\mathcal{M} + I_3)^n)_{n \geq 0}$ est convergente si et seulement si $m = 0$.

Partie III

14. Posons $N(x) = T(x).T(x)$ pour tout réel x . N est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, N'(x) = 2T(x).T'(x) = 2G'(x).G''(x)$$

Comme $a \wedge b$ est orthogonal à b , l'équation vérifiée par G montre que $G'(x)$ et $G''(x)$ sont orthogonaux. N est donc de dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est donc constante. En 0, elle vaut 1 et on a donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|T(x)\| = \sqrt{N(x)} = 1$$

15. Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $Y = (I_3 + \mathcal{M})G(x)$ de sorte que $2G''(x) = Y \wedge G'(x)$. Par formule du double produit vectoriel, on a

$$\begin{aligned} 2G'(x) \wedge G''(x) &= G'(x) \wedge (Y \wedge G'(x)) \\ &= (G'(x).G'(x))Y - (G'(x).Y)G'(x) \\ &= Y - (G'(x).Y)G'(x) \end{aligned}$$

Posons alors $\phi(x) = G'(x).Y = G'(x).((I_3 + \mathcal{M})G(x))$. ϕ est dérivable et

$$\phi'(x) = G''(x).((I_3 + \mathcal{M})G(x)) + G'(x).((I_3 + \mathcal{M})G'(x))$$

Par le même argument qu'en question précédente, $G''(x).((I_3 + \mathcal{M})G(x)) = 0$. De plus $(I_3 + \mathcal{M})Z.Z = Z.Z$ d'après la question **12**. On en déduit que

$$\phi'(x) = G'(x).G'(x) = 1$$

Il existe donc une constante c telle que $\phi(x) = c$ pour tout x . Comme $\phi(0) = 0$, $c = 0$ et finalement,

$$2G'(x) \wedge G''(x) = (I_3 + \mathcal{M})G(x) - xG'(x)$$

16. Toutes les fonctions mises en jeu sont régulières (au moins de classe C^2) sur leurs domaines et la régularité demandé pour G provient des théorèmes d'opérations. Le calcul donne facilement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, t) &= F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \\ \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

La question **10** indique alors que

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \left(G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \wedge G''\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right)$$

et la question précédente donne alors

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) \left((I_3 + \mathcal{M})G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{\sqrt{t}} G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) \right)$$

Par ailleurs (formule $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$) on a

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) + \frac{1}{2\sqrt{t}} F'\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right) - \frac{x}{2t} F\left(\frac{\ln(t)}{2}\right) G'\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$$

Compte-tenu de la relation de la question **11**, on a bien

$$\frac{\partial \tilde{G}}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial \tilde{G}}{\partial x}(x, t) \wedge \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial x^2}(x, t)$$

17. On a $|G'_1(x)| \leq \|G'(x)\| \leq 1$. On en déduit (inégalité des accroissements finis) que $|G_1(x)| = |G_1(x) - G_1(0)| \leq |x|$, et ce pour tout réel x .
18. On montre par récurrence que G est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $\mathbb{N}$.
- Initialisation : c'est vrai aux rangs 0, 1, 2 par hypothèse.
 - Hérédité : soit $n \geq 2$ tel que le résultat soit vrai au rang n . Comme $2G'' = G \wedge G'$, G'' est alors de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ (car G et G' le sont et il suffit d'utiliser les théorèmes généraux en revenant à la formule du produit vectoriel). G est donc de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, ce qui prouve le résultat au rang $n+1$.
19. Si A et B sont deux fonctions de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, il est aisé de prouver (en revenant aux coordonnées) que $A \wedge B$ est dérivable avec $(A \wedge B)' = A' \wedge B + A \wedge B'$. Ici, on a $2G'' = G \wedge G'$ et donc

$$2G^{(3)} = G' \wedge G' + G \wedge G'' = 0 + \frac{1}{2}G \wedge (G \wedge G') = \frac{G \cdot G'}{2}G - \frac{G \cdot G}{2}G'$$

Comme $2G'' = G \wedge G'$, $G''(x)$ est orthogonal à $G(x)$ et à $G'(x)$ et ainsi

$$\forall x, G''(x) \cdot G^{(3)}(x) = 0$$

Si on pose $N(x) = T'(x) \cdot T'(x)$, on a $N'(x) = 2T'(x) \cdot T''(x) = 2G''(x) \cdot G^{(3)}(x) = 0$ et N est constante sur $\mathbb{R}$. Comme $T'(0) = G''(0) = \frac{1}{2}G(0) \wedge G'(0) = (0, \lambda, 0)$, la valeur de la constante est λ^2 . On a ainsi prouvé que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|T'(x)\| = \lambda$$

20. (a) Avec la méthode de dérivation évoqué en question **19**, on a

$$b'(x) = T'(x) \wedge n(x) + T(x) \wedge n'(x) = 0 + \frac{1}{\lambda}G'(x) \wedge G^{(3)}(x)$$

Avec l'expression de $G^{(3)}$ trouvée en question **19**, on en déduit que

$$b'(x) = \frac{G(x) \cdot G'(x)}{4\lambda}G'(x) \wedge G(x)$$

Mais avec $2G'' = G \wedge G'$, ceci s'écrit aussi

$$b'(x) = -\frac{G(x) \cdot G'(x)}{2\lambda}G''(x) = -\frac{1}{2}(G(x) \cdot G'(x))n(x)$$

On utilise maintenant la question **15** en prenant le produit scalaire avec $G'(x)$ ce qui donne $G(x) \cdot G'(x) - xG'(x) \cdot G'(x) = 0$ et donc $G(x) \cdot G'(x) = x$ (on a $\|G'(x)\| = 1$). On a finalement montré que

$$2b'(x) = -xn(x)$$

- (b) $(T(x), n(x), b(x))$ formant une b.o.n directe, le produit vectoriel de deux des vecteurs donne plus ou moins le troisième et on obtient aisément le signe en regardant le sens. On part de $n(x) = b(x) \wedge T(x)$ que l'on dérive :

$$\begin{aligned} n'(x) &= b'(x) \wedge T(x) + b(x) \wedge T'(x) \\ &= -\frac{x}{2}n(x) \wedge T(x) + b(x) \wedge (\lambda n(x)) \\ &= \frac{x}{2}b(x) - \lambda T(x) \end{aligned}$$

- (c) Comme $n = G''/\lambda$ la relation précédente devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda}G^{(3)}(x) &= -\lambda G'(x) + \frac{x}{2}T(x) \wedge n(x) \\ &= -\lambda G'(x) + \frac{x}{2\lambda}G'(x) \wedge G''(x) \end{aligned}$$

Comme $2G'' = G \wedge G'$, la formule du double produit vectoriel donne (on a vu que $G(x).G'(x) = x$ plus haut)

$$2G'(x) \wedge G''(x) 2((G'(x).G'(x))G(x) - (G'(x).G(x))G'(x)) = 2G(x) - xG'(x)$$

En utilisant ceci dans l'expression de $G^{(3)}(x)$, on trouve que

$$G^{(3)}(x) + \left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) G'(x) - \frac{x}{4} G(x) = 0$$

21. (a) On introduit l'inconnue $X = (Y_1, Y_1', Y_1'', Y_2, Y_2', Y_2'', Y_3, Y_3', Y_3'')$ où les Y_i sont les coordonnées de Y . On a bien $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{9,1}(\mathbb{R}))$ puisque chaque Y_i est de classe C^3 (et même C^∞ avec la question 18). Les Y_i vérifiant la même équation différentielle, on va pouvoir écrire que X vérifie une équation différentielle du type

$$X' = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} X$$

Comme pour le passage d'une équation scalaire d'ordre 2 à un système vectoriel d'ordre 1, on a

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{x}{4} & -\left(\lambda^2 + \frac{x^2}{4}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Posons $H(x) = G(-x)$; on a $H'(x) = -G'(-x)$, $H''(-x) = G''(-x)$ et $H'''(x) = -G'''(-x)$ et on en déduit que H est solution de la même équation que G . De plus, l'application définie par $K(x) = (-G_1(x), G_2(x), G_3(x))$ est aussi solution de la même équation (chaque coordonnée étant solution).

Par ailleurs, le cours nous indique que le système obtenu en question précédente admet une unique solution X si on fixe $X(0)$. Pour conclure que $H = K$, il nous suffit donc de remarquer que $H(0) = K(0)$, $H'(0) = K'(0)$ et $H''(0) = K''(0)$ ce qui est immédiat (on a $G(0) = (0, 0, 2\lambda)$, $G'(0) = (1, 0, 0)$ et $G''(0) = \frac{1}{2}(G(0) \wedge G'(0)) = (0, \lambda, 0)$). Nous avons donc

$$\forall x, G_1(-x) = -G_1(x), G_2(-x) = G_2(x), G_3(-x) = G_3(x)$$

- (c) Posons $N(x) = \|G(x)\|^2 = G(x).G(x)$. N est régulière et

$$N'(x) = 2G(x).G'(x) \text{ et } N''(x) = 2\|G'(x)\|^2 + 2G(x).G''(x) = 2$$

Il existe donc une constante c telle que $N'(x) = 2x + c$ et la valeur $N'(0) = 0$ indique que $c = 0$. Il existe donc une constante d telle que $N(x) = x^2 + d$ et la valeur de $N(0) = 4\lambda^2$ donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \|G(x)\|^2 = x^2 + 4\lambda^2$$

- (d) Supposons que $G(x) = G(y)$. La question précédente donne alors $|x| = |y|$. Si on avait $x = -y$, on aurait alors $G_1(x) = G_1(-x)$ ce qui impliquerait $G(x) = 0$ (car G_1 est impaire et $G_1(-x) = -G_1(x)$) et donc $x = 0$ (puisque l'on suppose que G_1 ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$) et donc aussi $x = y$. Dans tous les cas, on a $x = y$. On a donc injectivité de G .

22. (a) D'après 20.c, G'_1 est solution de l'équation différentielle

$$y''(x) + \lambda^2(x) = \frac{x}{4}(G_1(x) - xG'_1(x))$$

Notons r le second membre de l'équation. D'après l'énoncé, on a

$$G_1'(x) = \cos(\lambda x)G_1'(0) + \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda}G_1''(0) + \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s)) ds$$

Or, $G_1'(0) = 1$ et $G_1''(0) = 0$ (fonction impaire) ce qui donne

$$G_1'(x) - \cos(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} \int_0^x r(s) \sin(\lambda(x-s)) ds$$

On remarque (avec les questions **17** et **14**) que

$$|r(s)| \leq \frac{|s|}{4}|G_1(s)| + \frac{s^2}{4}|G_1'(s)| \leq \frac{s^2}{4} + \frac{s^2}{4} = \frac{s^2}{2}$$

et une majoration grossière (inégalité triangulaire) donne (attention au sens des bornes, l'énoncé ne semble pas le voir)

$$|G_1'(x) - \cos(\lambda x)| \leq \frac{1}{\lambda} \int_{[0,x]} |r(s)| ds = \frac{|x|^3}{6\lambda}$$

(b) Soit $x \geq 0$. Par théorème fondamental, on a $G_1(x) = \int_0^x G_1'(t) dt$ et donc

$$\left| G_1(x) - \frac{\sin(\lambda x)}{\lambda} \right| = \left| \int_0^x (G_1'(t) - \cos(\lambda t)) dt \right| \leq \int_0^x \frac{t^3}{6\lambda} dt = \frac{x^4}{24\lambda}$$

En particulier, on a

$$G_1\left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right) \leq -\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{24\lambda} \left(\frac{3\pi}{2\lambda}\right)^4 \quad (a)$$

$$G_1\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right) \geq \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{24\lambda} \left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)^4 \quad (b)$$

Dans (a), le membre de droite équivaut au voisinage de $+\infty$ à $-1/\lambda$ et est localement négatif. Dans (b), le membre de droite est de même localement positif au voisinage de $+\infty$. Ainsi, pour λ assez grand, G_1 change de signe. Par théorème des valeurs intermédiaires (G_1 est continue), G_1 s'annule donc pour λ assez grand, ce qui était demandé.

23. La question **20** donne $k_G = \lambda$ (fonction constante) et $\tau_G(x) = \frac{x}{2}$. On a ainsi

$$\Psi(t, x) = \frac{\lambda}{\sqrt{t}} \exp\left(i \frac{x^2}{4t}\right)$$

Le calcul donne aisément

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad |\Psi(t, x)|^2 = \frac{\lambda^2}{2}$$

En posant $\alpha = -\frac{1}{\lambda^2}$, on obtient l'EDP voulue.