MATHS I du **C**oncours **C**entrale - **S**upélec 2010 filière TSI

(Les calculatrices étaient autorisées : Voir les « remarques **TI** » ci-dessous)

Partie I - Fonctions homographiques

I.A -

Etant donné un réel a , on considère l'équation différentielle (E_a) $(x-a)y''+2y'=0$.

Remarque **TI** n° 1 :

<< deSolve(y''*(x − a)+2y=0,x,y) ENTER>>

permet de trouver immédiatement toutes les solutions de (E_a) sur un intervalle ne contenant pas a car la réponse est de la forme $y=\dfrac{c_1x+c_2}{x-a}$.

I.A.1)

L'énoncé a demandé de poser $\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ce qui sous entend que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_nz^n$ est supérieur ou égal à R .

a) Le « **théorème de dérivation sous le signe Σ pour les séries entières** » donne

$\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ et $y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ d'où (grâce au « **théorème de linéarité pour les séries** ») $\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ (x-a)y''(x)+2y(x)=$

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}an(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=1}^{\infty}2na_nx^{n-1}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1+2)a_nx^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}an(n-1)a_nx^{n-2}\underset{\substack{n=p+1\text{ dans la première }\Sigma\\ n=p+2\text{ dans la deuxième }\Sigma}}{=}$$

$$\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)a_{p+1}x^p-\sum_{p=0}^{\infty}a(p+2)(p+1)a_{p+2}x^p\,.$$

$$\boxed{\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ (x-a)y''(x)+2y(x)=\sum_{p=0}^{\infty}(p+1)(p+2)(a_{p+1}-aa_{p+2})x^p}$$

b) Le « **théorème d'unicité du Développement en Série Entière** » donne

$\forall p\in[\![0\,,+\infty[\![\,,\ (p+1)(p+2)(a_{p+1}-aa_{p+2})=0$.

Ceci se traduit par $\boxed{\forall n\in[\![1\,,+\infty[\![\,,\ a_n-aa_{n+1}=0}$

Sachant que a est non nul on lit $\forall n\in[\![1\,,+\infty[\![\,,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{a}a_n$ ce qui caractérise une suite géométrique (à partir du rang 1) de raison $\dfrac{1}{a}$ et il vient $\boxed{\forall n\in[\![1\,,+\infty[\![\,,\ a_n=\dfrac{1}{a^{n-1}}a_1}$.

$$\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ y(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{n-1}}a_1x^n=a_0+a_1a\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\underset{\text{Si}\,|x/a|<1}{=}a_0+a_1a\frac{x/a}{1-(x/a)}$$

$$\boxed{\forall x\in\,]-R\,,R[\,,\ y(x)=a_0+a_1a\frac{x}{a-x}\text{ et ceci implique }R\leqslant a\,.}$$

c) La démarche du cours intitulée « recherche des solutions d'une Equation Différentielle Linéaire qui sont développables en séries entières en 0 » prouve que

$$\boxed{\text{Les solutions de } (E_a) \text{ qui sont D.S.E. en 0 sur }]-a\,,a[\text{ sont les } Y_{\lambda,\mu} : x \mapsto \lambda + \mu\frac{x}{a-x} \text{ où } (\lambda,\mu) \text{ est dans } \mathbb{R}^2 .}$$

Remarque : $\forall\, x \in\,]-a\,,a[\,,\ Y_{\lambda,\mu}(x) = \lambda + \dfrac{\mu(x-a)+\mu a}{a-x} = \lambda - \mu + \mu a\dfrac{1}{a-x} = \alpha + \beta\dfrac{1}{a-x}$

I.A.2)

(E_a) est une Equation Différentielle Linéaire Scalaire Homogène d'ordre 2 et sur l'intervalle $I_1 =]-\infty\,,a[$ le coefficient devant y'' ne s'annule pas . Le cours a montré que l'ensemble des solutions de (E_a) sur I_1 (noté ici $S_{(E_a)}(I_1)$) est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

Essayons les fonctions $Y_1 : x \mapsto 1$ et $Y_2 : x \mapsto \dfrac{1}{a-x}$:

$\forall\, x \in I_1\,,\ Y_1'(x) = 0$ et $Y_1''(x) = 0$ donc Y_1 vérifie bien (E_a) .

$\forall\, x \in I_1\,,\ Y_2'(x) = \dfrac{1}{(a-x)^2}$ et $Y_2''(x) = \dfrac{2}{(a-x)^3}$ d'où

$\forall\, x \in I_1\,,\ (x-a)Y_2''(x) + 2Y_2'(x) = \dfrac{-2}{(a-x)^2} + \dfrac{2}{(a-x)^2} = 0$. Donc Y_2 vérifie (E_a) .

Donc $S_{(E_a)}(I_1)$ contient $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Y_1\,,Y_2)$.

De plus si on suppose que $\alpha Y_1 + \beta Y_2 = 0_{\mathbb{R}^{I_1}}$ alors on obtient les phrases et implications suivantes :

$\forall\, x \in\,]-\infty\,,a[\,,\ \alpha + \beta\dfrac{1}{a-x} = 0 \Rightarrow \forall\, x \in\,]-\infty\,,a[\,,\ \alpha(a-x) + \beta = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty\,,a[\,,\ \alpha(a-x)+\beta = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} \alpha(a-x)+\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall\, x \in\,]-\infty\,,a[\,,\ \alpha(a-x) = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \underset{x \leftarrow a-1}{\Rightarrow} \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} .$$

Donc le système $(Y_1\,,Y_2)$ est libre sur $\mathbb{R}$ donc c'est une base de $S_{(E_a)}(I_1)$ et $S_{(E_a)}(I_1) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(Y_1\,,Y_2)$.

Le raisonnement est le même pour étudier (E_a) sur $I_2 =]a\,,+\infty[$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_a) \text{ sur chacun des intervalles } I_1 =]-\infty\,,a[\,,\ I_2 =]a\,,+\infty[\text{ est } \left\{ \begin{array}{l} Y_{\alpha,\beta} : I_j \to \mathbb{R} \\ \qquad\quad x \mapsto \alpha + \beta(a-x)^{-1} \end{array} \text{ telles que } (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} .}$$

Remarque : on peut aussi traiter (E_a) comme un Equation Différentielle Linéaire Scalaire Homogène d'ordre 1 en l'inconnue $z = y'$ et retrouver le résultat en utilisant uniquement le cours de 1$^{\text{ère}}$ année .

Etude de (E_a) sur $\mathbb{R}$:

ANALYSE : supposons que y soit solution de (E_a) sur $\mathbb{R}$.

D'après ce qui précède on doit poser $\forall\, x \in\,]-\infty\,,a[\,,\ y(x) = \alpha_1 + \beta_1\dfrac{1}{a-x}$ et

$\forall\, x \in\,]a\,,+\infty[\,,\ y(x) = \alpha_2 + \beta_2 \dfrac{1}{a-x}$.

Cependant y doit être continue en a .
Or si β_1 (respectivement β_2) est non nul alors on voit que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ <}} y(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ >}} y(x)$) est infinie . Donc nécessairement $\beta_1 = \beta_2 = 0$. De plus la continuité de y en a impose aussi $\alpha_1 = \alpha_2$.
SYNTHESE : posons $\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ y(x) = \alpha$ (constante réelle) .
On constate que y est bien solution de (E_a) sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Les seules solutions de } (E_a) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ sont les applications constantes .}}$

I.B - On pose $g(x) = \dfrac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$.

I.B.1)

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\delta/\gamma\}\,,\ g'(x) = \dfrac{\alpha\delta - \gamma\beta}{(\gamma x + \delta)^2}$.

Donc pour que g soit constante il est nécessaire que $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$.
Réciproquement supposons $\alpha\delta - \gamma\beta = 0$. Le **T**héorème des **A**ccroissements **F**inis a pour conséquence que g est constante sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty\,, -\delta/\gamma[$, $I_2 =]-\delta/\gamma\,, +\infty[$.

Or si $\alpha \neq 0$ alors la limite de g en $-\infty$ mais aussi en $+\infty$ est donnée par $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{\alpha x}{\gamma x} = \dfrac{\alpha}{\gamma}$.

Donc la constante sur I_1 égale celle sur I_2 et g est partout constante .

Si $\alpha = 0$ alors on constate que $g(x) \underset{x \to \pm\infty}{\sim} \dfrac{\beta}{\gamma x} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$ et là encore g est constante .

$\boxed{\text{Une Condition Nécessaire et Suffisante pour que } g \text{ soit constante est } \alpha\delta - \gamma\beta = 0 \text{ .}}$

I.B.2)

a) Pour x dans $\mathbb{R} \setminus \{-\delta/\gamma\}$ on a $g(x) = \dfrac{\dfrac{\alpha}{\gamma}x + \dfrac{\beta}{\gamma}}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}} = \dfrac{\dfrac{\alpha}{\gamma}\left(x + \dfrac{\delta}{\gamma}\right) + \dfrac{\beta}{\gamma} - \dfrac{\alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}} = \dfrac{\alpha}{\gamma} + \dfrac{\dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2}}{x + \dfrac{\delta}{\gamma}}$.

Donc on pose $\boxed{u = \dfrac{\alpha}{\gamma} \text{ et } v = \dfrac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2} \text{ et } w = \dfrac{\delta}{\gamma}}$.

b) Il en résulte $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-\delta/\gamma\}\,,\ g'(x) = -\dfrac{v}{(x+w)^2}$ lequel est du signe de $-v$ donc aussi du signe de $\alpha\delta - \beta\gamma$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } \alpha\delta - \beta\gamma > 0 \text{ (resp.} < 0\text{) alors } g \text{ est strictement croissante (resp. décroissante)} \\ \text{sur tout intervalle inclus dans } \mathbb{R} \setminus \{-\delta/\gamma\}.\end{array}}$$

Remarque : j'ai beaucoup de mal à percevoir l'intérêt de cette question après avoir traité I.B.1) ! !

I.B.3) Notons $(O, \vec{i}\,, \vec{j}\,)$ le repère évoqué par l'énoncé et notons M le point de coordonnées (génériques) $(x\,, y)$ dans ce repère .

a) L'équation de (D) se met sous la forme $\frac{x}{\sqrt{v}}\frac{y}{\sqrt{v}}=1 \Leftrightarrow x'y'=1$ et en notant M' le point de coordonnées $\left(\frac{x}{\sqrt{v}}, \frac{y}{\sqrt{v}}\right)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ on a l'équivalence $M \in (D) \Leftrightarrow M' \in (C)$ Or M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{\sqrt{v}}$.

(D) est l'image de (C) par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{v}$.

b) De même l'équation de (Γ) se met sous la forme $y-u=\frac{v}{x+w} \Leftrightarrow (y-u)(x+w)=v \Leftrightarrow y''x''=v$ et en notant M'' le point de coordonnées $(x+w\ ,\ y-u)$ dans $(O,\vec{i},\vec{j})$ on a l'équivalence $M \in (\Gamma) \Leftrightarrow M'' \in (D)$. Or M'' est l'image de M par la translation de vecteur $w\vec{i}-u\vec{j}$. On peut donc conclure (Γ) est l'image de (D) par la translation de vecteur $u\vec{j}-w\vec{i}$.

On peut noter t la translation de vecteur $u\vec{j}-w\vec{i}$.

c) L'application h est affine associée à l'homothétie vectorielle $H_{\sqrt{v}}$ et l'application t est affine associée à l'identité du plan vectoriel c'est à dire H_1 . Donc $t\circ h$ est une application affine associée à $H_{\sqrt{v}}\circ H_1 = H_{\sqrt{v}}$. Si $v=1$ alors $t\circ h = t$ est une translation . Sinon montrons que $t\circ h$ admet un point invariant I . La définition analytique de $t\circ h$ est $(x\ ,\ y)\mapsto(x\sqrt{v}-w\ ,\ y\sqrt{v}+u)$ donc on a les équivalences $t\circ h(M)=M \Leftrightarrow (x\ ,\ y)=(x\sqrt{v}-w\ ,\ y\sqrt{v}+u) \Leftrightarrow$

$$\left(x(\sqrt{v}-1)-w\ ,\ y(\sqrt{v}-1)+u\right)=(0\ ,\ 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{w}{\sqrt{v}-1} \\ y=\dfrac{-u}{\sqrt{v}-1} \end{cases} .$$

En notant I le point de coordonnées $\left(\frac{w}{\sqrt{v}-1}, \frac{-u}{\sqrt{v}-1}\right)$ on a $t\circ h(I)=I$ et

$\overrightarrow{It\circ h(M)} = \overrightarrow{t\circ h(I)t\circ h(M)} = H_{\sqrt{v}}\left(\overrightarrow{IM}\right)=\sqrt{v}\,\overrightarrow{IM}$.

En conclusion

Si $v\neq 1$ (et seulement dans ces cas) alors $t\circ h$ est l'homothétie de centre I (ayant $\left(\frac{w}{\sqrt{v}-1}, \frac{-u}{\sqrt{v}-1}\right)$ pour coordonnées) et de rapport $\sqrt{v}$.

I.B.4)

D'après les résultats de I.A.2) il faut poser $\boxed{a=-\frac{\delta}{\gamma}}$. Par ailleurs le résultat I.B.2) (comparé à celui de I.A.2)) montre qu'alors g est effectivement solution de (E_a) sur $]-\infty\ ,\ a[$,et sur $]a\ ,\ +\infty[$.

Partie II - Fractions continues

L'énoncé a défini la fonction f par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - E(x)}$ où E désigne la « fonction partie entière » .

II.A - Etude de f

II.A.1)

Soit x un réel . De deux choses l'une :

$\rightarrow$ ou bien x est un entier (relatif) et alors on a $x = E(x)$ et $f(x)$ n'existe pas ;

$\rightarrow$ ou bien x n'est pas entier et par conséquent on a $E(x) < x < E(x) + 1$ c'est à dire $0 < x - E(x) < 1$ et le nombre $x - E(x)$ existe et est non nul . Dans ce cas $f(x)$ existe dans $\mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Ensemble de définition de } f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}}$$

Soit x un réel quelconque . En notant $n = E(x)$ on a $n \leqslant x < n + 1$ donc $n + 1 \leqslant x + 1 < n + 1 + 1$. De plus $n + 1$ est encore dans $\mathbb{Z}$. Donc $n + 1 = E(x + 1)$.

En résumé $\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R} ,\ E(x + 1) = E(x) + 1}$

Soit x un réel non entier . Alors $x + 1$ reste réel et non entier et il vient

$$f(x + 1) = \frac{1}{x + 1 - E(x + 1)} = \frac{1}{x + 1 - (E(x) + 1)} = \frac{1}{x + 1 - E(x) - 1} = f(x) \ .$$

De même si $x + 1$ est réel non entier alors x l'est aussi ce qui complète C.Q.F.D. .

II.A.2)

$$\forall\, x \in]k , k + 1[,\ f(x) = \frac{1}{x - k} \quad \text{donc} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha \leftarrow 0 \text{ et } \beta \leftarrow 1 \\ \gamma \leftarrow 1 \text{ et } \delta \leftarrow k \end{cases}}$$

II.A.3)

$$\forall\, x \in]k , k + 1[,\ f'(x) = -\frac{1}{(x - k)^2} < 0 \quad \text{donc}$$

$$\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur tout intervalle }]k , k + 1[\text{ avec } k \text{ dans } \mathbb{Z} \ .}$$

<u>Remarque</u> :

On peut prolonger f par continuité à gauche en chaque n de $\mathbb{Z}$ car on observe que

$\displaystyle \lim_{\substack{x \to n \\ <}} \frac{1}{x - (n - 1)} = \frac{1}{1} = 1$. Si on pose $\forall\, n \in \mathbb{Z} ,\ f(n) = 1$ alors f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et continue à gauche en tout point de $\mathbb{Z}$. De plus , ainsi prolongée , f coïncide partout sur $]n - 1 , n]$ avec la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{1}{x - n + 1}$ donc elle est de classe C^∞ sur $]n - 1 , n]$ et en particulier la pente de la demie tangente à sa courbe représentative en le point d'abscisse n est égale à $-\dfrac{1}{1^2} = -1$.

$$\boxed{\text{Si on pose } \forall\, n \in \mathbb{Z} ,\ f(n) = 1 \text{ alors } \forall\, n \in \mathbb{Z} ,\ f'_g(n) = -1 \ .}$$

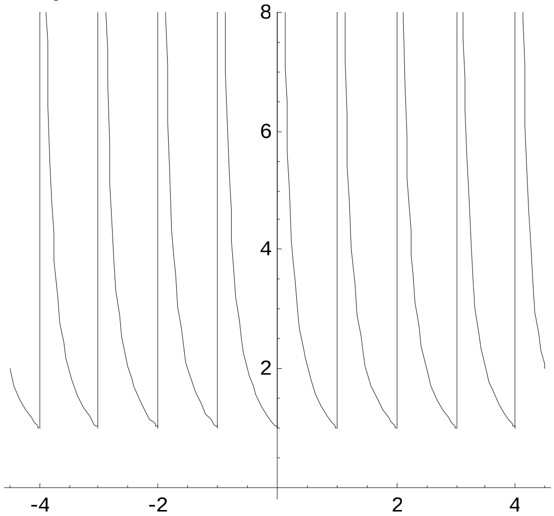
Par ailleurs avec n dans $\mathbb{Z}$ $\displaystyle \lim_{\substack{n \to n-1 \\ >}} \frac{1}{x - n + 1} = +\infty$ donc $\boxed{\forall\, k \in \mathbb{Z} ,\ \lim_{\substack{n \to k \\ >}} f(x) = +\infty}$

Le **T.V.I.** et la stricte monotonie de f sur $]k , k + 1[$ donne $\forall\, k \in \mathbb{Z} ,\ f(]k , k + 1[) =]1 , +\infty[$

donc $\boxed{f(\mathbb{R}) =]1 , +\infty[}$

Le dessin ci-dessous a été obtenu avec MATHEMATICA :

```
f[x_] := 1/(x - Floor[x]);
Dessin1 = Plot[f[x], {x, -4.5, 4.5}, PlotRange → {{-4.6, 4.6}, {-0.2, 8}},
  AspectRatio → Automatic]
```



Remarque **TI** n° 2 :
Si vous voulez obtenir un « bon » tracé avec **TI 89** (ou **Voyage 200**) alors il vous faut
1) sélectionner le mode graphique « fonction » : dans la fenêtre MODE , sélectionner **1 : FUNCTION**
2) entrer $1 / (x - \text{floor}(x))$ comme y1(x) dans la fenêtre Y= ;
3) paramétrer l'écran de sortie graphique dans la fenêtre WINDOW ;
4) à partir de la fenêtre WINDOW accéder au « Zoom » et sélectionner 5 : ZoomSqr ;
   pour obtenir un aspect « repère orthonormé » .
   Ceci a le bon goût de lancer immédiatement le tracé sans passer par ◊ Graph .

II.A.4)

Soit x un nombre rationnel non entier . On pose $x = \frac{p}{q}$ où p est dans $\mathbb{Z}^*$ et q est dans $\mathbb{N}^*$ mais ne divise pas p . On a , en posant $n = E(x) =$ quotient de la division euclidienne de p par q ,
$f(x) = \frac{1}{x - n} = \frac{q}{p - nq}$ dans lequel $p - nq$ est un entier strictement positif et q aussi .
Donc $f(x)$ est un rationnel . ½ C.Q.F.D. .
Soit x un nombre irrationnel . Le nombre $f(x)$ existe puisque x n'est pas entier . Supposons que $f(x)$ soit un rationnel . On peut alors poser $f(x) = \frac{p}{q}$ avec p dans $\mathbb{Z}$ et q dans $\mathbb{N}^*$.
En posant $n = E(x)$ on a les phrases et implications suivantes :
$\frac{1}{x - n} = \frac{p}{q} \Rightarrow x - n = \frac{q}{p} \Rightarrow x = n + \frac{q}{p} \Rightarrow x = \frac{np + q}{p} \underset{\text{si } p < 0}{=} \frac{-(np + q)}{-p}$. $np + q$ et $-(np + q)$ sont des entiers et p ou $-p$ est un entier strictement positif donc x doit être rationnel : c'est absurde .
Ainsi par l'absurde nous montrons que $f(x)$ est irrationnel . C.Q.F.D. .

II.B - Une suite récurrente

L'énoncé a donné x_0 dans $\mathbb{R}^{+*}$ et a défini la suite (éventuellement interrompue) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$.

II.B.1)

Soit x_0 un irrationnel (strictement positif suivant l'énoncé mais ce n'est pas utile ici) .

(1) Pour n dans $\mathbb{N}$ j'appelle (P_n) la phrase « x_n existe dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ »
(2) La phrase (P_0) est vraie par définition même de x_0 .
(3) Pour n donné dans $\mathbb{N}$, supposons (P_n) . Alors d'après II.A.4) , $f(x_n)$ existe et est irrationnel . D'où (P_{n+1}) .

C.Q.F.D. par le « **théorème de récurrence** » .
II.B.2)

Ici $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ est dans $\mathbb{Q}$ (avec u_0 dans $\mathbb{Z}$ et v_0 dans $\mathbb{N}^*$) .

a) Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On a $x_n = f(x_{n-1})$ donc $x_n > 1$ (propriété de f) .
De plus le II.A4) a démontré l'implication $x_{n-1} \in \mathbb{Q}$ et $f(x_{n-1})$ existe $\Rightarrow f(x_{n-1}) \in \mathbb{Q}$.
Donc un raisonnement par récurrence immédiat démontre que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n \in \mathbb{Q}$. Le cas de x_0 est traité par hypothèse . C.Q.F.D. .

b) (1) Pour n dans $\mathbb{N}$ j'appelle (P_n) la phrase « $v_n > 0$ et $x_n = \dfrac{u_n}{v_n}$ » .
(2) La phrase (P_0) est vraie par définition même de u_0 et v_0 .
(3) Supposons , pour un n donné dans $\mathbb{N}$, que (P_n) est vraie . Alors on peut poser $u_n = q_n v_n + v_{n+1}$ avec q_n dans $\mathbb{Z}$ et v_{n+1} dans $[\![0 , v_n [\![$. Donc

$$x_n \underset{\text{H.R.}}{=} \frac{u_n}{v_n} = \frac{q_n v_n + v_{n+1}}{v_n} = q_n + \frac{v_{n+1}}{v_n}$$ et (par construction) $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \in [0 , 1[$. Ceci démontre que $E(x_n) = q_n$. L'énoncé a supposé que tous les x_n existent , donc

$$x_n - q_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} \neq 0$$ et nécessairement $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} > 0 \underset{\text{H.R. donne } v_n > 0}{\Rightarrow} v_{n+1} > 0$.

De plus $x_{n+1} = f(x_n) = \dfrac{1}{x_n - q_n} = \dfrac{v_n}{v_{n+1}} \underset{\text{définition de } u_{n+1}}{=} \dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}}$. Ceci prouve (P_{n+1}) .

C.Q.F.D. par le « **théorème de récurrence** » .

c) Dans le b) on a prouvé que pour n dans $\mathbb{N}$, $f(x_n) = \dfrac{v_n}{v_{n+1}}$ donc $\dfrac{v_n}{v_{n+1}} > 1$ et donc (sachant $v_{n+1} > 0$) $v_n > v_{n+1}$ ce qui prouve que la suite des v_n est strictement décroissante .

La suite des v_n est strictement décroissante dès le rang 0 . De plus tous les v_n sont minorés par 0 donc , pour N quelconque dans $\mathbb{N}^*$ on a $0 \leqslant v_N < v_{N-1} < v_{N-2} < \ldots < v_1 < v_0$ donc les nombres $v_0 , v_1 , \ldots , v_N$ sont $N+1$ entiers distincts situés dans $[0 , v_0]$. En prenant $N = v_0 + 1$ on obtient une absurdité . <u>L'hypothèse</u> <u>du</u> <u>II.B.2)</u> <u>est</u> <u>impossible</u> .

Si $x_0 = \dfrac{u_0}{v_0}$ avec u_0 dans $\mathbb{Z}$ et v_0 dans $\mathbb{N}^*$ alors la suite des x_n n'est définie que pour (au plus) v_0 termes .

II.B.3)
D'après ce qui précède on peut conclure :

Pour que la suite des x_n soit définie sur tout $\mathbb{N}$ il faut et il suffit que x_0 soit irrationnel .

REMARQUE : l'hypothèse sur le signe de x0 est totalement inutile !

II.C - Le cas irrationnel

II.C.1)

Voici une solution MATHEMATICA :

```
FractionContinue[x0_, n_] :=
 FractionContinue[x0, n] =
  If[n == 0, {x0, Floor[x0]}, Module[{v, x}, v = FractionContinue[x0, n - 1][[1]];
   x = FullSimplify[1/(v - Floor[v])]; {x, Floor[x]}]]
  (*ATTENTION en réalité le résultat de cette fonction est {xn,an}*)
```

N.B. j'ai utilisé **FullSimplify** pour obtenir des résultats plus « compacts » et faciliter les calculs ultérieurs mais ce n'est pas indispensable .

Voici une solution sur **TI 89** (ou **TI 92+** ou **Voyage 200**) :

Ouvrir l'éditeur de programme avec la touche « APPS »

Demander la création d'une nouvelle fonction et taper les lignes suivantes :

(Les mots réservés sont en **gras** sauf certains signes comme $\rightarrow$ qui est atteint par $\boxed{\text{STO}\rangle}$.)

: fraconti **(**xx **,** nn **)**
: Func
: Local ii **,** a0 **,** r0 **,** x0 **,** list
: Floor (xx **)** $\rightarrow$ a0 **:** xx $-$ a0 $\rightarrow$ r0 **: {** x0 **}** $\rightarrow$ list
: 1 $\rightarrow$ ii
: While ii $\leq$ nn **and** r0 $\neq$ 0
: 1 / r0 $\rightarrow$ x0 **: Floor (** x0 **)** $\rightarrow$ a0 **:** x0 $-$ a0 $\rightarrow$ r0
: Augment (list , **{** a0 **})** $\rightarrow$ list
: ii + 1 $\rightarrow$ ii
: EndWhile
: list
: EndFunc

II.C.2)

a) Avec MATHEMATICA :

```
R1 = Table[FractionContinue[√2, n], {n, 0, 4}]
R2 = Table[FractionContinue[√2, n][[2]], {n, 0, 4}]
{{√2, 1}, {1 + √2, 2}, {1 + √2, 2}, {1 + √2, 2}, {1 + √2, 2}}
{1, 2, 2, 2, 2}
```

Avec **Voyage 200** (depuis l'écran « Home »)

fraconti ($\sqrt{\ }$ (2) , 4) ENTER

donne le résultat {1 2 2 2 2}

ce qui signifie que $a_0 = 1$ et que les a_i pour i allant de 1 à 4 valent 2 .

On peut donc conjecturer que , dans le cas où $x_0 = \sqrt{2}$,

« **la suite des** a_n **est stationnaire à partir du rang** 1 **et de valeur** 2 » .

b) $x_0 = \sqrt{2}$ donc $a_0 = E(1,414\ldots) = 1$ donc

$$x_1 = f(\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1 \approx 2,414$$ donc $a_1 = 2$ et il vient

$$x_2 = f(1+\sqrt{2}) \underset{\text{f est 1−périodique}}{=} f(\sqrt{2}) = 1+\sqrt{2} \ .$$

Si on suppose que $x_n = 1+\sqrt{2}$ alors $x_{n+1} = f(x_n) = f(x_1) = 1+\sqrt{2} = x_n$. Ceci établit que la suite des x_n est stationnaire à partir du rang 1 et donc la suite des a_n l'est aussi . C.Q.F.D. .

c) Cette question ne s'adresse qu'aux candidats qui utilisent une calculatrice non formelle car pour une calculatrice formelle en mode « exact » il n'y a de limite que la patience ou la durée de vie des piles !

fraconti ($\sqrt{}(2)$, 30) ENTER

ne prend que 5 secondes et donne le résultat {1 2 2 2 2 … 2} de longueur 31 évidemment !

Par contre si on remplace $\sqrt{2}$ par la (assez bonne) valeur approchée 1,4142135623731 alors effectivement on constate une dérive car on obtient , <u>à</u> <u>condition</u> <u>de</u> <u>travailler</u> <u>en</u> « <u>exact</u> »

{1 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 1 2 1 26 23 1 2 1 5 4 1 3}

Par contre en mode approché on obtient rigoureusement la même liste que ci-dessus avec $\sqrt{2}$ en exact ! Ceci prouve que même les utilisateurs de calculatrices non formelles pourraient ne pas voir « *les limites de la calculatrice* » ! !

d) On obtient (d'abord avec MATHEMATICA)

R3 = Table[FractionContinue[$\sqrt{3}$, n], {n, 0, 4}]

R4 = Table[FractionContinue[$\sqrt{3}$, n][[2]], {n, 0, 4}]

$\left\{\{\sqrt{3}, 1\}, \left\{\frac{1}{-1+\sqrt{3}}, 1\right\}, \{1+\sqrt{3}, 2\}, \left\{\frac{1}{-1+\sqrt{3}}, 1\right\}, \{1+\sqrt{3}, 2\}\right\}$

{1, 1, 2, 1, 2}

Avec **Voyage 200**

fraconti ($\sqrt{}(3)$, 4) ENTER

{1 1 2 1 2}

On peut supposer que

Si $x_0 = \sqrt{3}$ alors **la suite des** a_n **(et celle des** x_n **) est « périodique à partir du rang** 1 » .

On obtient successivement $a_0 = E(1,732\ldots) = 1$,

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \approx \frac{2,732}{2} \approx 1,37$ donc $a_1 = 1$.

$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{(\sqrt{3}-1)/2} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = 2f(\sqrt{3}) = \sqrt{3}+1$. Il en résulte que $a_2 = 2$ puis que

$x_3 = f(\sqrt{2}+1) = f(\sqrt{2}) = x_1$ donc $a_3 = a_1$. Partant de là il est clair que $x_4 = f(x_1) = x_2$ et $a_4 = a_2$. Supposons que pour p donné dans $\mathbb{N}^*$ on ait établi que $x_{2p-1} = x_1$ et $x_{2p} = x_2$.

On a alors $x_{2p+1} = f(x_2) = x_3 = x_1$ et $x_{2p+2} = f(x_{2p+1}) = f(x_1) = x_2$ donc on a prouvé (par récurrence) que , pour p quelconque dans $\mathbb{N}^*$, on a $x_{2p-1} = x_1$ et $x_{2p} = x_2$ donc

$a_{2p-1} = a_1 = 1$ et $a_{2p} = a_2 = 2$. C.Q.F.D.

II.C.3)

$p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$.

Pour n dans $[\![2, +\infty[\![$, $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$.

<u>Remarque</u> <u>préliminaire</u> : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = E(x_n) = E(f(x_{n-1}))$ et toutes les $f(x_{n-1})$ sont dans $]1, +\infty[$ donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n \in \mathbb{N}^*}$

a) Preuve par récurrence faible :

(1) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ j'appelle (P_n) la phrase « p_n et q_n sont dans $\mathbb{N}^*$ » .

(2) Par définition $q_1 = a_1 \in \mathbb{N}^*$ donc q_1 est dans $\mathbb{N}^*$.

Par définition encore $p_1 = a_0 a_1 + 1$ et $a_0 = E(x_0)$ est un entier . $x_0 > 0$ donc a_0 est dans $\mathbb{N}$. Donc $a_0 a_1$ est dans $\mathbb{N}$ et p_1 est dans $\mathbb{N}^*$. La phrase (P_1) est donc vraie .

(3) Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

Supposons toutes les phrases (P_1) , (P_2) , … , (P_n) vraies (**H**ypothèse de **R**écurrence) .

Dans le cas particulier où $n = 1$ on a $p_2 = a_2 p_1 + p_0$. a_2 et p_1 sont dans $\mathbb{N}^*$ donc

$a_2 p_1$ aussi . $a_0 = E(x_0)$ il est dans $\mathbb{N}$ car x_0 est dans $\mathbb{R}^{+*}$. Donc p_2 est dans $\mathbb{N}^*$.
De même $q_2 = a_2 q_1 + q_0 = a_2 a_1 + 1$ reste dans $\mathbb{N}^*$ (et même dans $[\![2 , +\infty [\![$) .
$p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1}$. Or a_{n+1} et p_n sont dans $\mathbb{N}^*$ donc $a_{n+1} p_n$ aussi et d'après **H.R.** p_{n-1} est dans $\mathbb{N}^*$. Donc p_{n+1} reste dans $\mathbb{N}^*$ (plus précisément dans $[\![2 , +\infty [\![$) .
$q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$ donc un raisonnement identique montre que q_{n+1} reste dans $\mathbb{N}^*$.
C.Q.F.D. .

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on lit $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} = a_{n+1} + \dfrac{q_{n-1}}{q_n}$. Même si $n = 1$ on a $q_{n-1} \geqslant 1$ et $q_n \geqslant 1$

donc $\dfrac{q_{n-1}}{q_n} > 0$ et il vient $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} > a_{n+1} > 1$ donc $\dfrac{q_{n+1}}{q_n} > 1$ donc $q_{n+1} > q_n$. C.Q.F.D. .

Remarque : on a de même $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant a_{n+1} > 1$ donc la conclusion est la même pour $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

On raisonne encore par récurrence sur n :
(1) Pour n dans $\mathbb{N}$ on appelle (P_n) la phrase « $q_n \geqslant n$ »
(2) Supposons établie la phrase (P_n) pour un certain n de $\mathbb{N}$.
Si $n = 0$ alors on étudie $(P_1) \Leftrightarrow q_1 \geqslant 1 \Leftrightarrow a_1 \geqslant 1$ et cette phrase est vraie .
Sinon on a $q_{n+1} > q_n$ et sachant que q_n et q_{n+1} sont entiers ceci donne
$q_{n+1} \geqslant q_n + 1 \underset{\textbf{H.R.}}{\geqslant} n + 1$ d'où (P_{n+1}) C.Q.F.D. .

<u>Remarque</u> : on a de même $x_0 > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} , p_n \geqslant n$ et $x_0 < 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} , p_n \leqslant -n$.

c) On raisonne là encore par récurrence : Ici $(P_n) \Leftrightarrow p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = (-1)^{n-1}$.

Etude de (P_1) : $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1) \times 1 - a_0 a_1 = 1 = (-1)^{1-1}$. C'est OK .
Supposons que (P_n) est vraie (avec un n dans $\mathbb{N}^*$)
Etudions (P_{n+1}) :

$$p_{n+1} q_n - p_n q_{n+1} \underset{n+1 \geqslant 2}{=} (a_{n+1} p_n + p_{n-1}) q_n - p_n (a_{n+1} q_n + q_{n-1}) =$$

$$a_{n+1} p_n q_n + p_{n-1} q_n - p_n a_{n+1} q_n - p_n q_{n-1} = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} \underset{\textbf{H.R.}}{=} -(-1)^{n-1} =$$

$(-1)^{(n+1)-1}$. Donc (P_{n+1}) est vraie . C.Q.F.D. .

d) On raisonne encore par récurrence : Ici $(P_n) \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}} \underset{\text{notation locale}}{=} \varphi(n)$.

Etude de (P_0) :

$$(P_0) \Leftrightarrow x_0 = \frac{p_0 + p_1 x_2}{q_0 + q_1 x_2} \Leftrightarrow x_0 = \frac{a_0 + (a_0 a_1 + 1) x_2}{1 + a_1 x_2} \Leftrightarrow x_0 = a_0 + \frac{x_2}{1 + a_1 x_2} \Leftrightarrow$$

$$x_0 - a_0 = \frac{x_2}{1 + a_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{1}{f(x_0)} = \frac{x_2}{1 + a_1 x_2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 + a_1 x_2}{x_2} \Leftrightarrow x_1 x_2 = 1 + a_1 x_2 \Leftrightarrow$$

$x_2 (x_1 - a_1) = 1 \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{x_1 - a_1} \Leftrightarrow x_2 = f(x_1)$ et ceci est vrai . Donc (P_0) est vérifiée .

Supposons que , pour un n dans $\mathbb{N}$ donné , la phrase (P_n) est vraie .

On a $\varphi(n+1) - \varphi(n) = \dfrac{p_{n+1} + p_{n+2} x_{n+3}}{q_{n+1} + q_{n+2} x_{n+3}} - \dfrac{p_n + p_{n+1} x_{n+2}}{q_n + q_{n+1} x_{n+2}} = \dfrac{\delta_n}{\Delta_n}$ avec

$$\delta_n = (p_{n+1} + p_{n+2} x_{n+3})(q_n + q_{n+1} x_{n+2}) - (p_n + p_{n+1} x_{n+2})(q_{n+1} + q_{n+2} x_{n+3}) =$$

$p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} + (p_{n+1}q_{n+1} - q_{n+1}p_{n+1})x_{n+2} + (p_{n+2}q_n - q_{n+2}p_n)x_{n+3} +$
$(p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1})x_{n+3}x_{n+2} \underset{\text{II.C.3)c) et définitions des } p_n, q_n}{=}$
$(-1)^n + (q_n(a_{n+2}p_{n+1} + p_n) - p_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n))x_{n+3} + (-1)^{n+1}x_{n+3}x_{n+2} =$
$(-1)^n\left(1 + a_{n+2}x_{n+3} - x_{n+2}x_{n+3}\right) = (-1)^n\left(1 - x_{n+3}(x_{n+2} - a_{n+2})\right) \underset{\text{déf. de } x_{n+3}}{=} 0$

Ceci démontre que $\varphi(n+1) = \varphi(n)$ d'où (P_{n+1}) . C.Q.F.D. .

II.C.4)

L'énoncé a posé (pour n dans $\mathbb{N}$) $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.

a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on a $r_n - r_{n-1} = \dfrac{p_n}{q_n} - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n}{q_n q_{n-1}} \underset{\text{II)C3) d)}}{=} \dfrac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}$.

b) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ on peut poser $r_n - r_{n-1} = U_n$ et on observe que

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, (-1)^n U_n = \dfrac{(-1)^{2n-1}}{q_{n-1}q_n} = -\dfrac{1}{q_{n-1}q_n} < 0$: $\sum U_n$ est alternée dès le rang 1 .

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|U_n\right| = \dfrac{1}{q_{n-1}q_n}$ et d'après II.C.3) b) (deuxième résultat) on a $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n = +\infty$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n-1} = +\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} q_{n-1}q_n = +\infty \times +\infty = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|U_n\right| = 0$

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \dfrac{\left|U_n\right|}{\left|U_{n+1}\right|} = \dfrac{q_n q_{n+1}}{q_{n-1}q_n} = \dfrac{q_{n+1}}{q_{n-1}}$ et d'après II. C. 3) b) (premier résultat)

$q_{n+1} > q_n > q_{n-1} > 0$ donc $\dfrac{q_{n+1}}{q_{n-1}} > 1$. Donc la suite des $\left|U_n\right|$ est décroissante .

Ainsi $\sum U_n$ vérifie les hypothèses du « **critère spécial des séries alternées** » , donc elle converge .

Remarque :

$\forall n \in [\![2, +\infty[\![, 0 \leqslant \left|U_n\right| = \dfrac{1}{q_n q_{n-1}} \underset{\text{II.C.3)b)}}{\leqslant} \dfrac{1}{q_{n-1}^2} \underset{\text{II.C.3)b)}}{\leqslant} \dfrac{1}{(n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2}$.

De plus la série de terme général $\dfrac{1}{(n-1)^2}$ est de même nature que la série de **RIEMANN** $\sum \dfrac{1}{n^2}$

laquelle est convergente ($\forall \alpha \in \mathbb{R}, \sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ CV $\Leftrightarrow \alpha > 1$) . Le « **théorème de convergence par majoration pour les séries** » montre que $\sum \left|U_n\right|$ est convergente . Donc $\sum U_n$ est absolument convergente donc convergente .

c) La série de terme général $r_n - r_{n-1}$ est convergente donc le théorème « **lien canonique entre suite et série** » montre que la suite des r_n est convergente et sa limite est donnée par

$r = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n - r_0 + r_0 = r_0 + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} r_k - r_{k-1}$. Posons $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} r_k - r_{k-1} = r_n - r_0$.

d) Le théorème qui vient d'être utilisé stipule que $\sum_{k=1}^{+\infty} r_k - r_{k-1}$ est compris entre s_n et s_{n+1}

donc r est compris entre $r_0 + s_n = r_n$ et $r_0 + s_{n+1} = r_{n+1}$. De plus l'amplitude de cet

encadrement est $\left| r_{n+1} - r_n \right| = \dfrac{1}{q_n q_{n+1}}$ donc $\left| r - r_n \right| \leqslant \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \underset{\text{II.C.3)b)}}{<} \dfrac{1}{q_n{}^2}$. C.Q.F.D. .

e) Avec MATHEMATICA :

ATTENTION le programme ci-dessous est destiné à fournir , pour chaque entier n , la liste $\{x_n , a_n , p_n , q_n , r_n\}$.

```
ApproxRationelle[x0_, 0] := Module[{a0}, a0 = Floor[x0]; {x0, a0, a0, 1, a0}];
ApproxRationelle[x0_, 1] := Module[{a1, x1, b, p1}, b = ApproxRationelle[x0, 0];
   x1 = Simplify[1/(b[[1]] - b[[2]])]; a1 = Floor[x1]; p1 = b[[2]] * a1 + 1; {x1, a1, p1, a1, p1/a1}];
ApproxRationelle[x0_, n_] :=
 ApproxRationelle[x0, n] =
  If[n > 1, Module[{b1, b2, xn, an, pn, qn}, b1 = ApproxRationelle[x0, n - 1];
    b2 = ApproxRationelle[x0, n - 2]; xn = Simplify[1/(b1[[1]] - b1[[2]])]; an = Floor[xn];
    pn = an * b1[[3]] + b2[[3]]; qn = an * b1[[4]] + b2[[4]]; {xn, an, pn, qn, pn/qn}]]
```

A l'aide de **TI 89** (**N.B.** ma calculatrice réserve le nom de variable q_1 ? !) :

```
: Approxra (x0 , n )
: Func
: Local  a0 , ii , a1 , aa , p0 , q0 , p1 , qq , tab , i , pn , qn
: Floor ( x0 )  → a0 : Floor ( 1/ (x0 − a0 ) → a1
: If  n=0  Then
: Return  { a0 }
: Else
: If  n = 1  Then
: Return  { a0 , a0 + 1 / a1 }
: Else
: fraconti ( x0,n) → aa
: a0 → p0 : 1 → q0 : a0 * a1 + 1 → p1 : a1 → qq
: { p0 , q0 , p1 , qq } → tab : 2 → i
: While  i ≤ n
: aa [ i + 1 ]  * tab [ 2i − 1] + tab [ 2i − 3 ] → pn
: aa [ i + 1 ]  * tab [ 2i ] + tab [ 2i − 2 ] → qn
: Augment ( tab , { pn , qn } ) → tab
: i + 1 →i
: EndWhile
: seq ( tab [ 2k − 1 ] / tab [ 2k ] , i , 1 , n + 1 )
: EndIf
: EndIf
: Endfunc
```

Application :

Avec MATHEMATICA

```
R1 = Table[ApproxRationelle[√2, n][[5]], {n, 0, 6}]
N[R1]
```

$\left\{1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \frac{99}{70}, \frac{239}{169}\right\}$ $\{1., 1.5, 1.4, 1.41667, 1.41379, 1.41429, 1.4142\}$

Avec **TI 89**

Approxra ($\sqrt{\ }(2)$, 6) ENTER

Approxra ($\sqrt{\ }(2)$, 6) ◊ ENTER

$\left\{1 \ 3/2 \ 7/5 \ 17/12 \ 41/29 \ 99/70 \ \frac{239}{169}\right\}$ puis $\{1. \ 1.5 \ 1.4 \ 1{,}4166 \ 1{,}41379 \ 1{,}41428 \ 1{,}41420\}$

Il est très probable que r soit égal à $\sqrt{2}$.

N.B. l'énoncé masque un peu la construction des r_n qui valent en fait $r_0 = a_0$, $r_1 = a_0 + \dfrac{1}{a_1}$,

$r_2 = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}}$ etc.. $r_n = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{a_3 + \dfrac{\cdots}{\cdots + \dfrac{1}{a_n}}}}}$. On peut montrer que si x_0 est rationnel alors il est égal au dernier des r_n qui existe et si x_0 est irrationnel alors la suite des r_n converge (très rapidement) vers x_0 : voir « **Annexe** » en fin de texte .

II.D -

II.D.1)

Ici $g : x \mapsto \dfrac{\alpha x + \alpha\delta + 1}{x + \delta} = \alpha + \dfrac{1}{x+\delta}$. x_0 est irrationnel donc il n'est pas entier donc $x_0 + \delta \neq 0$ et donc $g(x_0)$ existe dans $\mathbb{R}$. Si on suppose que $g(x_0)$ est rationnel alors on a les phrases et implications suivantes : $g(x_0) \underset{\text{avec } p \text{ et } q \text{ dans } \mathbb{Z}}{=} \dfrac{p}{q} \Rightarrow \dfrac{p - \alpha q}{q} = \dfrac{1}{x_0 + \delta} \Rightarrow \dfrac{q}{p - \alpha q} = x_0 + \delta \Rightarrow$ $\dfrac{q - \delta(p - \alpha q)}{p - \alpha q} = x_0 \Rightarrow x_0 = \dfrac{q - \delta p + \delta\alpha q}{p - \alpha q}$ et étant donné que $\mathbb{Z}$ est stable par + et $\times$ ceci montrerait que x_0 est rationnel . C'est FAUX donc $g(x_0)$ est irrationnel . C.Q.F.D. .

II.D.2)

Etant donné que α est un entier et que f est périodique de période 1 on obtient déjà

$f(y_0) = f\left(\dfrac{1}{x_0 + \delta}\right)$.

<u>1^{er} cas</u> $x_0 + \delta > 1$: alors $\dfrac{1}{x_0 + \delta} \in \,]0\,,1[$ donc $b_0 = 0$ et il vient $y_1 = f(y_0) = x_0 + \delta$ et puisque δ est un entier on obtient $y_2 = f(y_1) = f(x_0) = x_1$ et plus généralement $\forall\, n \in [\![2\,,+\infty[\![\,,\ y_n = x_{n-1}$ donc effectivement $\forall\, n \in [\![2\,,+\infty[\![\,,\ b_n = a_{n-1}$.

<u>$2^{ème}$ cas</u> $x_0 + \delta \in \,]0\,,1[$: alors nécessairement $\delta = -a_0$ et on obtient $f(y_0) = f\big(f(x_0)\big)$ c'est à dire que $y_1 = x_2$ et il vient $\forall\, n \in [\![1\,,+\infty[\![\,,\ y_n = x_{n+1}$ et dans ce cas l'énoncé est mis en défaut !

Les autres cas sont encore plus pénibles mais l'expérience montre que les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se ressemblent effectivement beaucoup .

Cependant **l'énoncé ment** probablement par omission :

au début de **II.D-** et à la place de « ... un nombre irrationnel x_0 ... » il aurait fallu lire « ... un nombre irrationnel et positif x_0 ... »

II.E - Le cas quadratique

Ici α et δ sont dans $\mathbb{N}^*$ et on pose $\Delta = (\delta+\alpha)^2 + 4$.

$\beta = 1 + \alpha\delta$ et $\gamma = 1$ donc $g : x \mapsto \alpha + \dfrac{1}{x+\delta}$.

II.E.1)

Supposons que Δ soit le carré d'un entier n . On pose donc $\Delta = n^2$ avec n dans $\mathbb{N}$.

$(\delta+\alpha)^2 + 4 = n^2 \Rightarrow 4 = n^2 - (\delta+\alpha)^2 \Rightarrow 4 = (n+\delta+\alpha)(n-\delta-\alpha)$. Or $n+\delta+\alpha$ et $n-\delta-\alpha$ sont des entiers et du fait que le premier est positif et que leur produit l'est aussi ils sont dans $\mathbb{N}^*$. De plus leur écart vaut $2(\delta+\alpha)$ qui est pair , donc ils sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs . Ce dernier cas est interdit car un produit de nombres impairs reste impair . Donc ils sont tous les deux pairs et on lit $1 = \dfrac{n+\delta+\alpha}{2}\dfrac{n-\delta-\alpha}{2}$ où les deux facteurs sont dans $\mathbb{N}^*$. Ceci impose $\dfrac{n+\delta+\alpha}{2} = \dfrac{n-\delta-\alpha}{2} = 1$ d'où $n+\delta+\alpha = n-\delta-\alpha$ donc $\delta+\alpha = 0$ ce qui est faux .

II.E.2)

Le discriminant de l'équation $x^2 + (\delta-\alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ s'écrit

$(\delta-\alpha)^2 + 4(\alpha\delta+1) = \delta^2 + \alpha^2 - 2\delta\alpha + 4\,\alpha\delta + 4 = \Delta \geqslant (1+1)^2 + 4 = 8 > 0$.

Donc les solutions sont réelles et s'écrivent $z_1 = \dfrac{1}{2}(\alpha - \delta - \sqrt{\Delta})$ et $z_0 = \dfrac{1}{2}(\alpha-\delta+\sqrt{\Delta})$.

Supposons que z_1 (ou z_0) est rationnel . On a

$$z_1 \in \mathbb{Q} \underset{\mathbb{Q}\text{ est stable pour }\times}{\Rightarrow} 2z_1 \in \mathbb{Q} \underset{\substack{\mathbb{Q}\text{ est stable pour }+\\ \text{et pour }-}}{\Rightarrow} 2z_1 + \delta - \alpha \in \mathbb{Q} \underset{\mathbb{Q}\text{ est stable pour }\times}{\Rightarrow} \sqrt{\Delta} \in \mathbb{Q}$$ et

cette dernière est fausse . Donc z_1 est irrationnel . Preuve analogue pour z_0 .

Le produit des racines $z_1 z_0$ vaut $-\alpha\delta - 1 < 0$ donc les deux racines sont de signes opposés et évidemment la plus grande , à savoir z_0 , est strictement positive .

II.E.3)

On a les équivalences suivantes :

$$z_0 = g(z_0) \Leftrightarrow z_0 = \alpha + \frac{1}{z_0+\delta} \underset{z_0 \notin \mathbb{Q}}{\Leftrightarrow} z_0(z_0+\delta) = \alpha(z_0+\delta) + 1 \Leftrightarrow$$

$z_0^{\,2} + (\delta-\alpha)z_0 - \alpha\delta - 1 = 0$. Or cette dernière phrase est vraie par définition de z_0 . C.Q.F.D. .

II.E.4)

Nous sommes dans les conditions d'application du II.D.2) en remplaçant x_0 par z_0 donc y_0 par $g(z_0)$ la phrase $\forall\, n \in [\![2, +\infty[\![\, , b_n = a_{n-1}$ donne (vu que $z_0 = g(z_0)$)

$\forall\, n \in [\![2, +\infty[\![\, , a_n = a_{n-1}$.

Le développement en fraction continue de z_0 est stationnaire à partir du rang 1 .

II.E.5)

Observons que $\sqrt{p^2+1} = \sqrt{4p^2+4}\,/2 = \sqrt{(p+p)^2+4}\,/2$ et posons $\alpha = \delta = p$. Alors $\sqrt{p^2+1}$ est la racine positive de l'équation $x^2 + (\delta-\alpha)x - \alpha\delta - 1 = 0$ et le II.E.4) s'applique

Le développement en fraction continue de $\sqrt{p^2+1}$ est stationnaire à partir du rang 1 .

Annexe : Pour dans $\mathbb{N}$ on obtient

$$x_0 - r_n \underset{\text{II.C.3)d)}}{=} \frac{p_n + p_{n+1}x_{n+2}}{q_n + q_{n+1}x_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n q_n + p_{n+1}q_n x_{n+2} - p_n q_n - p_n q_{n+1}x_{n+2}}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} =$$

$$\frac{(p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1})x_{n+2}}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} \underset{\text{II.C.3)c)}}{=} \frac{(-1)^n x_{n+2}}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} .$$

Donc $\left|x_0 - r_n\right| \underset{\substack{x_{n+2} > 1 > 0 \\ \text{tous les } q_n \text{ sont dans } [\![1, +\infty[\![}}{=} \dfrac{x_{n+2}}{(q_n + q_{n+1}x_{n+2})q_n} \underset{q_n \geqslant 0}{\leqslant} \dfrac{x_{n+2}}{(q_{n+1}x_{n+2})q_n}$

$0 \leqslant \left|x_0 - r_n\right| \leqslant \dfrac{1}{q_n q_{n+1}} \underset{\text{II.C.3)b)}}{\leqslant} \dfrac{1}{n^2} \underset{n \to +\infty}{\to} 0$. $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = x_0}$ par le « **théorème des gendarmes** ».