

Olivier HALGAND

I - Série de Fourier à deux variables

1. Pour tout entier relatif m , on a :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u_m(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y) e^{-imx} dx.$$

• Puisque u est doublement 2π -périodique, elle est 2π -périodique par rapport à sa deuxième variable, donc

u_m est 2π -périodique.

• La fonction u_m est une intégrale à paramètre sur un segment telle que :

- ◇ $\forall y \in \mathbb{R}, x \mapsto u(x, y) e^{-imx}$ est continue et intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$;
- ◇ $\forall x \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R} \mapsto u(x, y) e^{-imx}$ est continue.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres sur un segment,

u_m est continue sur \mathbb{R} .

• De la même manière :

- ◇ $\forall y \in \mathbb{R}, x \mapsto u(x, y) e^{-imx}$ est continue et intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$;
- ◇ $\forall x \in [0, 2\pi], y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) e^{-imx}$ est continue ;
- ◇ $\forall y \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) e^{-imx}$ est continue et intégrable sur le segment $[0, 2\pi]$.

Donc, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres sur un segment,

u_m est de classe \mathcal{C}^1 , donc dérivable, sur \mathbb{R} .

On en déduit donc que la série de Fourier de u_m est normalement convergente sur \mathbb{R} vers u_m :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad u_m(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} e^{-iny},$$

$$\begin{aligned} \text{avec : } \forall n \in \mathbb{Z}, c_{m,n} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_m(y) e^{-iny} dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y) e^{-imx} dx \right) e^{-iny} dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy \quad \text{d'après le théorème de Fubini} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}, \quad c_{m,n} = a_{m,n}(u).$$

On peut donc conclure, d'après l'égalité de Parseval :

$$\int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2 dy = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2.$$

2. De la même manière, si on se fixe $y \in \mathbb{R}$, alors la fonction $u_y : x \mapsto u(x, y)$ est 2π -périodique et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , donc la série de Fourier de u_y converge normalement vers u_y sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_y(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{-imx},$$

$$\text{avec : } \quad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_y(x) e^{-imx} dx = u_m(y).$$

On peut donc conclure, d'après l'égalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_y(x)|^2 dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m(y)|^2,$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x, y)|^2 dx = \sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m(y)|^2.}$$

3. D'après **1.**, on sait que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2$ converge et que sa somme est : $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2 dy$. On a donc, pour tout $M \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^M \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 \right) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m=0}^M |u_m(y)|^2 \right) dy && \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m(y)|^2 \right) dy && \text{par croissance de l'intégrale} \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x, y)|^2 dx \right) dy && \text{d'après 2.} \end{aligned}$$

On en déduit que la série à termes positifs $\sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 \right)$ est majorée ; elle est donc convergente. On fait de même pour la série $\sum_{m=1}^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{-m,n}(u)|^2 \right)$ et donc, d'après les définitions données :

$$\boxed{\text{la série double } \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 \text{ converge.}}$$

On a donc, d'après **1.** :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 \right) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u_m(y)|^2 dy \right).$$

Or, les fonctions u_m sont continues sur \mathbb{R} et intégrables sur $[0, 2\pi]$, donc il en est de même des fonctions $|u_m|^2$. De plus, la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m|^2$ converge en tout point de $[0, 2\pi]$. On peut donc intégrer terme à terme, ce qui donne l'égalité :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} |u_m(y)|^2 \right) dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x, y)|^2 dx \right) dy,$$

et donc :

$$\boxed{\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(x, y)|^2 dx dy.}$$

4. D'après l'hypothèse, il existe $A \in \mathbb{R}_+$:

$$\forall(m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad |a_{m,n}(u) e^{imx+iny}| = |a_{m,n}(u)| \leq \frac{A}{(1+|m|)^2(1+|n|)^2}.$$

Or, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|n|)^2}$ converge : c'est une série de Riemann (pour $n \in \mathbb{N}$ et $-n \in \mathbb{N}$) ; notons α sa somme. On en déduit que la série à termes positifs $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_{m,n}(u)|$ converge et est majorée par $\frac{A}{\alpha} \frac{1}{(1+|m|)^2}$. Or, la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(1+|m|)^2}$ converge (vers α puisque c'est la même série que précédemment). On en déduit donc que :

la série double $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{imx+iny}$ converge absolument, donc est sommable.

5. • Soit $m \in \mathbb{Z}$ et considérons $v_m : (x, y) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{imx+iny}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x, y) \mapsto a_{m,n}(u) e^{imx+iny}$ est continue sur \mathbb{R}^2 , et la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{imx+iny}$ converge normalement d'après 4. D'après le **théorème 1.** donné dans l'énoncé, v_m est continue sur \mathbb{R}^2 .

• Mais de même, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, v_m est continue sur \mathbb{R}^2 et la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} v_m(x, y)$ converge normalement donc :

la fonction v est définie et continue sur \mathbb{R}^2 .

6. Pour tous entiers m et n , l'application $v_{m,n} : (x, y) \mapsto a_{m,n}(u) e^{imx+iny}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et :

$$\forall(k, l) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) = (im)^k (in)^l a_{m,n}(u) e^{imx+iny}.$$

Donc, d'après l'hypothèse, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\left| \frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) \right| \leq \frac{A|m|^k |n|^l |a_{m,n}(u)|}{(1+|m|)^{k+2}(1+|n|)^{l+2}}.$$

Or, de même qu'en 4., la série double $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{A|m|^k |n|^l |a_{m,n}(u)|}{(1+|m|)^{k+2}(1+|n|)^{l+2}}$ converge, donc la série :

$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial^{k+l} v_{m,n}}{\partial x^k \partial y^l}(x, y)$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{R}^2 . Donc :

v est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 et : $\forall(k, l) \in \mathbb{N}^2, \quad \frac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial y^l}(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (im)^k (in)^l a_{m,n}(u) e^{imx+iny}.$

7. Puisque la série $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{m,n}(x, y)$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$, on peut écrire pour tout $y \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x, y) e^{-ikx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{imx+iny} \right) e^{-ikx} dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{iny} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-ikx} dx \right) \end{aligned}$$

Or, sur l'espace vectoriel E des fonctions 2π -périodiques à valeurs complexes, la famille des $\varepsilon_k : x \mapsto e^{ikx}$ forment une base orthonormée pour la forme hermitienne positive :

$$\forall(f, g) \in E^2, \quad \langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \overline{g(x)} dx.$$

On a donc :

$$\forall (m, k) \in \mathbb{Z}^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-ikx} dx = \delta_{m,k} \quad \text{symbole de Kronecker}$$

On en tire :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x, y) e^{-ikx} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{k,n}(u) e^{iny}.$$

8. De même que précédemment, on a pour tout couple $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} a_{k,l}(v) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} v(x, y) e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) e^{imx} e^{iny} e^{-ikx} e^{-ily} dx dy \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imx} e^{-ikx} dx \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{iny} e^{-ily} dy \right) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u) \delta_{m,k} \delta_{n,l} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{k,l}(v) = a_{k,l}(u).$$

9. Ainsi, puisque u et v sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 et qu'elles ont les mêmes coefficients de Fourier, on en déduit que :

$$u = v.$$

II - Application

10. Puisque u_0 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 , on a pour tout couple $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$:

$$\begin{aligned} a_{m,n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) e^{-imx} dx \right) e^{-iny} dy \end{aligned}$$

avec, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) e^{-imx} dx = \left[u_0(x, y) e^{-imx} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} u_0(x, y) (-im) e^{-imx} dx = im \int_0^{2\pi} u_0(x, y) e^{-imx} dx.$$

On obtient donc :

$$a_{m,n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = im \times \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0(x, y) e^{-imx} e^{-iny} dx dy,$$

soit :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, \quad a_{m,n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) = im a_{m,n}(u_0).$$

11. Soit $(k, l) \in \mathbb{N}^2$. Puisque u_0 est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^2 , on a d'après 10. :

$$|a_{m,n}(u_0)| = \frac{1}{|m|} \left| a_{m,n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right) \right| = \dots = \frac{1}{|m|^k} \left| a_{m,n} \left(\frac{\partial^k u_0}{\partial x^k} \right) \right|,$$

et donc, de la même manière :

$$|a_{m,n}(u_0)| = \frac{1}{|m|^k |n|^l} \left| a_{m,n} \left(\frac{\partial^{k+l} u_0}{\partial x^k \partial y^l} \right) \right|.$$

Donc :

$$|a_{m,n}(u_0)| (1 + |m|)^k (1 + |n|)^l = \frac{(1 + |m|)^k}{|m|^k} \frac{(1 + |n|)^l}{|n|^l} \left| a_{m,n} \left(\frac{\partial^{k+l} u_0}{\partial x^k \partial y^l} \right) \right|.$$

Or, d'une part :

$$\lim_{|m| \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |m|)^k}{|m|^k} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{|n| \rightarrow +\infty} \frac{(1 + |n|)^l}{|n|^l} = 1.$$

Et, d'autre part, la série double $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| a_{m,n} \left(\frac{\partial^{k+l} u_0}{\partial x^k \partial y^l} \right) \right|^2$ converge d'après **3.**, donc la suite double $\left(a_{m,n} \left(\frac{\partial^{k+l} u_0}{\partial x^k \partial y^l} \right) \right)_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2}$ converge vers 0 (lorsque m ou/et n tendent vers $\pm\infty$) et est donc bornée. Finalement :

la suite double $|a_{m,n}(u_0)| (1 + |m|)^k (1 + |n|)^l$ est bornée.

12. Cherchons u de la forme :

$$u(t, x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_{m,n}(t) \alpha_{m,n} e^{imx+iny}.$$

• Alors, u doit vérifier l'égalité (4), c'est-à-dire : $\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(t, x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_{m,n} e^{imx+iny} \left[\varphi'_{m,n}(t) + (m^2 + n^2) \varphi_{m,n}(t) \right] = 0.$$

On en déduit que : $\varphi'_{m,n}(t) + (m^2 + n^2) \varphi_{m,n}(t) = 0$, et donc : $\varphi_{m,n}(t) = K e^{-(m^2+n^2)t}$. On obtient donc :

$$u(t, x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} K e^{-(m^2+n^2)t} \alpha_{m,n} e^{imx+iny}.$$

• u doit aussi vérifier l'égalité (3), c'est-à-dire : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(0, x, y) = u_0(x, y)$. Or, puisque $u_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ est doublement 2π -périodique par hypothèse, elle vérifie l'hypothèse démontrée en **11.** et on peut donc utiliser les résultats de la partie **I.** :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad u_0(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{m,n}(u_0) e^{imx+iny}.$$

Ainsi : $\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, $K \alpha_{m,n} = a_{m,n}(u_0)$.

• Les autres conditions étant respectées de manière évidente, on obtient finalement,

$$u(t, x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-(m^2+n^2)t} a_{m,n}(u_0) e^{imx+iny} \text{ est une solution au problème posé.}$$

13. On considère dans cette question les deux fonctions :

$$A_u : t \mapsto \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(t, x, y)|^2 dx dy \quad \text{et} \quad B_u = \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(s, x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(s, x, y) \right|^2 dx dy \right) ds.$$

• **Continuité :**

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \mapsto |u(t, x, y)|^2$ est continue sur $[0, +\infty[$;

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |u(t, x, y)|^2$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]^2$;

- pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $r > 0$ tel que $[a - r, a + r] \subset \mathbb{R}_+^*$ et alors u est continue sur le compact $[a - r, a + r] \times [0, 2\pi]^2$ et y est donc bornée : l'hypothèse de domination est donc vérifiée. De même si $a = 0$ avec l'intervalle $[0, a + r]$.

Ainsi, A_u est continue en tout $a \in \mathbb{R}_+$ et donc sur \mathbb{R}_+ . De plus, par définition, B_u est une primitive d'une fonction continue, donc elle est continue. Ainsi :

$$\boxed{E_u \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ .}$$

• **Dérivabilité :**

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |u(t, x, y)|^2$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]^2$;

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \frac{\partial |u|^2}{\partial t}(t, x, y) = \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y)$ est continue sur $[0, +\infty[$;

- $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y)$ est continue et intégrable sur $[0, 2\pi]^2$;

- de même que précédemment, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $r > 0$ tel que $[a - r, a + r] \subset \mathbb{R}_+^*$ et alors $\left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ est continue sur le compact $[a - r, a + r] \times [0, 2\pi]^2$ et y est donc bornée : l'hypothèse de domination est donc vérifiée.

Ainsi, A_u est dérivable en tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et donc sur \mathbb{R}_+^* . De plus, par définition, B_u est une primitive d'une fonction continue, donc elle est dérivable. Ainsi :

$$\boxed{E_u \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^* .}$$

On peut alors écrire, pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+^*$:

$$E'_u(t) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y) dx dy + \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) \right|^2 dx dy,$$

donc :

$$\boxed{E'_u(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y) + \left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial u}{\partial y}(t, x, y) \right|^2 dx dy .}$$

14. Pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) (t, x, y) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + u \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) (t, x, y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{u}{2} \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \right) + \frac{\bar{u}}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right) (t, x, y) \end{aligned}$$

Or u , et donc \bar{u} , vérifient (4) donc on obtient :

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) (t, x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{u}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y) .}$$

15. On a bien sûr, pour tout $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x, y) \right|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)}(t, x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(t, x, y),$$

et de même avec les dérivées partielles par rapport à y . La formule obtenue en **13.** devient donc :

$$E'_u(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{u}{2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\bar{u}}{2} \frac{\partial u}{\partial t} \right) (t, x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}(t, x, y) + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}(t, x, y) dx dy.$$

Donc, en utilisant la formule obtenue en 14. :

$$E'_u(t) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) (t, x, y) \, dx \, dy.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} E'_u(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \, dx \right] \, dy + \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right) (t, x, y) \, dy \right] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} \right]_0^{2\pi} \, dy + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[u \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{u} \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0^{2\pi} \, dx = 0 \end{aligned}$$

car u et \bar{u} sont doublement 2π -périodiques. Donc, puisque E_u est continue sur \mathbb{R}_+ , on en déduit qu'elle est constante sur \mathbb{R}_+ , c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E_u(t) = E_u(0).}$$

16. Soient u et v deux solutions au problème posé, et considérons la fonction $u - v$. Celle-ci vérifie alors les conditions a), b), c) et d) du problème et de plus :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (u - v)(0, x, y) = 0,$$

et :

$$\forall (t, x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial(u - v)}{\partial t}(t, x, y) - \frac{\partial^2(u - v)}{\partial x^2}(t, x, y) - \frac{\partial^2(u - v)}{\partial y^2}(t, x, y) = 0.$$

Donc, $u - v$ est solution du problème posé dans le cas particulier où u_0 est la fonction nulle. On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad E_{u-v}(t) = E_{u-v}(0) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |0|^2 \, dx \, dy = 0.$$

D'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \int_0^t \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial(u - v)}{\partial x}(s, x, y) \right|^2 + \left| \frac{\partial(u - v)}{\partial y}(s, x, y) \right|^2 \, dx \, dy \right) \, ds = 0.$$

Tous les termes étant positifs, et les fonctions intégrées étant continues, on en déduit que :

$$\forall (s, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial(u - v)}{\partial x}(s, x, y) = \frac{\partial(u - v)}{\partial y}(s, x, y) = 0.$$

On en déduit que $u - v$ est constante vis-à-vis des variables x et y et donc, puisque $u - v$ vérifie aussi l'égalité (4), vis-à-vis de la variable t . Donc, $u - v$ est constante. En particulier, pour $s = 0$ on obtient : $u - v = 0$. Finalement, $u = v$ et donc :

$$\boxed{\text{le problème posé possède au plus une solution.}}$$