

Concours X Ens 2006 - PSI - Maths (4H)

Première Partie

1. (a) La fonction indicatrice de l'intervalle $] -1, 1[$ est continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, positive, ne prend pas la valeur 0 sur l'intervalle $] -1, 1[$ et vérifie évidemment la propriété (iii).
- (b) La fonction $x \mapsto P(x)Q(x)w(x)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions continues par morceaux. D'après l'hypothèse (iii) la fonction $x \mapsto x^2 P(x)Q(x)w(x)$ est de limite nulle en $+\infty$ et en $-\infty$, donc la fonction $x \mapsto P(x)Q(x)w(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (règle de Riemann).
- (c) L'application $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle_w$ est bilinéaire par linéarité de l'intégrale; elle est de manière évidente symétrique. Si P n'est pas le polynôme nul, la fonction $x \mapsto P^2(x)w(x)$ est continue par morceaux et positive; si son intégrale sur $\mathbb{R}$ est nulle, elle est nulle sauf peut-être aux discontinuités de w ; comme P a un nombre fini de zéros, la fonction w est nulle partout sauf peut-être en un nombre fini de points sur chaque segment réel; cela entre en contradiction avec l'hypothèse qu'il existe un intervalle ouvert non vide sur lequel la fonction w ne prend pas la valeur 0; on en déduit que la forme bilinéaire symétrique $(P, Q) \mapsto \langle P | Q \rangle_w$ est définie positive; c'est donc un produit scalaire.
2. (a) On peut choisir pour P_0 le polynôme constant qui est de norme 1 et > 0 ; pour $n > 0$, l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension 1. On peut prendre pour P_n le polynôme de norme 1 dans cet orthogonal dont le coefficient dominant est > 0 . Le degré de P_n est exactement n car P_n ne peut pas être dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. La suite (P_n) est alors une suite w -orthonormale échelonnée.
La suite $P_0 \dots P_{n-1}$ étant supposée connue, la projection orthogonale de X^n sur l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est :

$$U_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle X^n | P_k \rangle_w P_k$$

le polynôme U_n n'est pas nul, il est de degré exactement n et il est proportionnel à P_n . Avec notre définition (polynôme de norme 1 et de coefficient dominant > 0) :

$$P_n = \frac{U_n}{\|U_n\|_w}$$

- (b) Pour $n = 0$ les polynômes P_n et Q_n sont constants non nuls; pour $n > 0$ les polynômes P_n et Q_n sont tous les deux non nuls dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, et cet orthogonal est de dimension 1.

3. Le réel a_n est tout simplement le coefficient dominant de P_n , le coefficient b_n est le “sous-dominant”, ce qui a un sens pour $n > 0$ (par convention $b_0 = 0$).
- (a) Il est clair par définition que $\langle XP_n | Q \rangle_w = \langle P_n | XQ \rangle_w$, et comme XQ est de degré $< n$, par définition de P_n , $\langle P_n | XQ \rangle_w = 0$.
- (b) La famille $(P_k)_{k=0..n+1}$ est une base orthogonale de l'espace $\mathbb{R}_{n+1}[X]$, on peut donc écrire (de manière unique) :

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} \lambda_k P_k$$

avec pour $k = 0..n+1$:

$$\langle XP_n | P_k \rangle_w = \lambda_k \|P_k\|_w^2$$

La propriété à démontrer est naturellement vérifiée pour $n = 0$ et $n = 1$. Si $n \geq 2$, Comme XP_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-2}[X]$ les coordonnées λ_k pour $k \leq n-2$ sont toutes nulles, cqfd.

- (c) Dans l'égalité (1) l'égalité des coefficients de X^{n+1} donne $a_n = \alpha_n a_{n+1}$, soit $\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, cette égalité est vraie aussi pour $n = 0$; l'égalité des coefficients de X^n donne $b_n = \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n$ soit :

$$\beta_n = \frac{1}{a_n} \left(b_n - \frac{a_n}{a_{n+1}} b_{n+1} \right) = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

En prenant le produit scalaire avec P_{n-1} dans l'égalité (1), comme la famille (P_k) est orthogonale on trouve :

$$\langle XP_n | P_{n-1} \rangle_w = \gamma_n \|P_{n-1}\|_w^2$$

et :

$$\langle XP_n | P_{n-1} \rangle_w = \langle P_n | XP_{n-1} \rangle_w = \langle P_n | \alpha_{n-1} P_n + \beta_{n-1} P_{n-1} + \dots \rangle_w$$

donc :

$$\gamma_n = \alpha_{n-1} \frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2} = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{\|P_n\|_w^2}{\|P_{n-1}\|_w^2}$$

Deuxième Partie

4. (a) Le polynôme Q_n ne peut être que P_n/R_n ; il s'agit donc de montrer que ce quotient, qui est bien un polynôme dans tous les cas, “a un signe constant sur J ”.

Dans tous les cas ce polynôme n'a pas de zéros d'ordre impair sur J ; dans la décomposition de Q_n en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ les facteurs sont, soit une constante, soit irréductibles du second degré, de signe constant, soit de la forme $(X-t)^{2k+1}$ avec $t \notin J$, de signe constant sur J , soit de la forme $(X-t)^{2k}$ (où $t \in J$ n'est pas exclu) qui est “de signe constant” sur J . Le produit est donc “de signe constant” sur J .

- (b) Comme r_n est dans tous les cas le degré de R_n , si $r_n < n$, le polynôme P_n est orthogonal à R_n . Cela impliquerait :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_n(x) R_n^2(x) w(x) dx = \int_J Q_n(x) R_n^2(x) w(x) dx$$

En supposant par exemple que Q_n est ≥ 0 sur J , la fonction sous l'intégrale reste ≥ 0 sur J ; comme elle est continue par morceaux, elle est nécessairement nulle, sauf peut-être aux discontinuités, qui sont en nombre fini sur tout segment dans J ; comme Q_n et R_n n'ont qu'un nombre fini de zéros, cela impliquerait que w est nulle sauf peut-être en un nombre fini de points sur tout segment inclus dans J . Or il existe un intervalle ouvert non vide, nécessairement inclus dans J , sur lequel w reste > 0 ; un tel intervalle ouvert non vide contient un segment non trivial contenant une infinité de points où $w > 0$. Cela étant contradictoire on en déduit que $r_n < n$ est exclu.

Par conséquent le polynôme P_n a au moins n zéros distincts dans J et, comme il est de degré n , il a exactement n zéros, tous simples, qui sont tous dans J .

5. (a) Si (P_n) est une suite w -orthogonale échelonnée, pour toute suite (ε_n) à valeurs dans $\{-1, 1\}$ la suite $(\varepsilon_n P_n / \|P_n\|_w)_n$ est orthonormale et échelonnée.
- (b) En utilisant les égalités de la question 3 b) et les égalités $\gamma_n = \alpha_{n-1}$ pour $n \geq 1$, on trouve que toutes les lignes de la matrice colonne produit sont nulles, sauf la dernière qui vaut :

$$\gamma_{n-1} P_{n-2}(\lambda) + \beta_{n-1} P_{n-1}(\lambda) - \lambda P_{n-1}(\lambda) = -\alpha_{n-1} P_n(\lambda)$$

- (c) Pour tout zéro λ de P_n le vecteur colonne $(P_0(\lambda), \dots, P_{n-1}(\lambda))$ est un vecteur propre de T_n de valeur propre λ (non nul car P_0 est constant non nul). Les zéros de P_n sont donc des valeurs propres de T_n . Comme T_n a au plus n valeurs propres et que les zéros de P_n sont au nombre de n (4.b), les zéros de P_n sont les valeurs propres de T_n .
6. Il faut remarquer qu'on identifie $\mathbb{R}^n$ avec l'espace réel des matrices colonnes de n lignes.

- (a) On sait que pour toute matrice inversible M , $M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t \text{Com}(M)$, où $\text{Com}(M)$ est la comatrice de M . Comme $xI_{n-1} - B$ est la matrice mineure d'indices (n, n) de la matrice $xI_n - A$, le coefficient (n, n) de ${}^t \text{Com}(xI_n - A)$ est $(-1)^{n+n} \det(xI_{n-1} - B)$. On en déduit que le coefficient (n, n) de $(xI_n - A)^{-1}$ est

$$\frac{\det(xI_{n-1} - B)}{\det(xI_n - A)} = r(x)$$

D'autre part $(xI_n - A)^{-1} e_n$ est la dernière colonne de la matrice $(xI_n - A)^{-1}$ et son produit scalaire avec e_n est sa coordonnée suivant

e_n , puisque (e_k) est une base orthonormée. D'où l'égalité demandée :

$$r(x) = \langle (xI_n - A)^{-1} e_n | e_n \rangle$$

- (b) Comme les valeurs propres de A sont au nombre de n , ses espaces propres sont des droites deux à deux orthogonales puisque A est symétrique réelle. La famille (u_i) est donc orthogonale. Le vecteur e_n se décompose dans cette base orthogonale sous la forme :

$$e_n = \sum_{k=1}^n \mu_k u_k \quad \text{avec} \quad \mu_k = \frac{\langle e_n | u_k \rangle}{\langle u_k | u_k \rangle}$$

On peut remarquer que pour tout x qui n'est pas valeur propre de A :

$$(xI_n - A)u_i = (x - \lambda_i)u_i \quad \text{d'où} \quad (xI_n - A)^{-1}u_i = \frac{1}{x - \lambda_i}u_i$$

On a donc :

$$\langle (xI_n - A)^{-1} e_n | e_n \rangle = \sum_{i,j} \frac{\mu_i \mu_j}{x - \lambda_i} \langle u_i | u_j \rangle = \sum_i \frac{\mu_i^2}{x - \lambda_i} \langle u_i | u_i \rangle$$

En tenant compte de la valeur de μ_i :

$$r(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x - \lambda_i} \frac{\langle e_n | u_i \rangle^2}{\langle u_i | u_i \rangle}$$

- (c) Sur chaque intervalle réel ne contenant aucune valeur propre de A on a :

$$r'(x) = - \sum_i \frac{1}{(x - \lambda_i)^2} \frac{\langle e_n | u_i \rangle^2}{\langle u_i | u_i \rangle} < 0$$

La fonction r est donc strictement décroissante sur chaque intervalle ne contenant pas de valeur propre de A .

- (d) Pour k variant de 1 à $n - 1$, $r(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers λ_k par valeurs supérieures, et vers $-\infty$ quand x tend vers λ_{k+1} par valeurs inférieures ; ceci est une conséquence de l'hypothèse $\langle e_n | u_i \rangle \neq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction continue r prend au moins une fois sur l'intervalle $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ la valeur 0. Il existe donc dans chacun de ces $n - 1$ intervalles une valeur propre de la matrice B . Comme la matrice B a $n - 1$ lignes et $n - 1$ colonnes, on en déduit que B a exactement $n - 1$ valeurs propres, toutes zéro simple du polynôme caractéristique (et le sous-espace propre est de dimension 1) et que dans chacun des intervalles $]\lambda_k, \lambda_{k+1}[$ il y a exactement une valeur propre de B . Si on note μ_k cette valeur propre, les suites (μ_k) et (λ_k) vérifient les conditions de l'énoncé.

7. (a) D'après les égalités de la question 3.b, si P_{n+1} et P_n avaient un zéro commun ce serait aussi un zéro commun de P_n et P_{n-1} ($\gamma_n \neq 0$) et par récurrence un zéro de P_0 , ce qui est impossible puisque P_0 est constant non nul.

On peut appliquer la question 6 en remplaçant la matrice A par la matrice T_n . Le spectre de T_n est la suite $(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)})$ et un vecteur propre $u_i^{(n)}$ de valeur propre $\lambda_i^{(n)}$ est le vecteur colonne $(P_0(\lambda_i^{(n)}), \dots, P_{n-1}(\lambda_i^{(n)}))$. Son produit scalaire avec le vecteur e_n est $P_{n-1}(\lambda_i^{(n)})$ qui n'est pas nul puisque P_n et P_{n-1} n'ont pas de zéro commun. La matrice B est ici la matrice T_{n-1} et les inégalités à démontrer sont donc celles de la question 6.d.

- (b) Si (P_n) est une suite w -orthogonale échelonnée, la suite $(Q_n) = (P_n/\|P_n\|)$ est orthonormale échelonnée et on peut lui appliquer les résultats de la question 7. Comme P_n et Q_n ont les mêmes zéros, on en déduit qu'on peut appliquer les résultats de la question 7 à la suite P_n .

Troisième partie

8. Posons $P_i = \prod_{j \neq i} (X - x_j)$. Ce polynôme est bien élément de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il est nul en tous les x_j pour $j \neq i$ et non nul en x_i . Si (λ_j) est une famille de scalaires telle que $\sum_j \lambda_j \varphi_j = 0$, alors pour tout i :

$$\sum_j \lambda_j \varphi_j(P_i) = \sum_j \lambda_j P_i(x_j) = \lambda_i P_i(x_i) = 0 \quad \text{d'où} \quad \lambda_i = 0$$

La famille (φ_j) est donc libre, et comme l'espace est de dimension n et que le cardinal de l'ensemble des indices est aussi n , c'est une base de l'espace.

9. (a) Posons $U = DP_n + R$ où $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (division euclidienne). Comme les $\lambda_i^{(n)}$ sont des zéros de P_n , U et R prennent les mêmes valeurs sur ces réels. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange il y a unicité d'un tel polynôme.

- (b) On observe que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} U(x)w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} (D(x)P_n(x) + R(x))w(x)dx = \\ &= \langle D | P_n \rangle_w + \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)dx = \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)dx \end{aligned}$$

En effet le polynôme D est nécessairement de degré $\leq n-1$, donc orthogonal à P_n .

- (c) L'application $R \mapsto \int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)dx$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc une combinaison linéaire des formes $\varphi_i^{(n)}$, où $\varphi_i^{(n)}$ est la forme linéaire $R \mapsto R(\lambda_i^{(n)})$. Il existe par conséquent une famille (c_i) de

scalaires, les coordonnées de cette forme, telle que pour tout $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$\int_{\mathbb{R}} R(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^{(n)}(R) = \sum_{i=1}^n c_i R(\lambda_i^{(n)})$$

Cette égalité s'étend aux polynômes de degré $\leq 2n - 1$ d'après les questions a) et b).

(d) Posons

$$Q_j^{(n)} = \prod_{i \neq j} (X - \lambda_i^{(n)})$$

Ce polynôme est nul en les $\lambda_i^{(n)}$ pour $i \neq j$ et non nul en $\lambda_j^{(n)}$; il est de degré $n - 1$. On peut appliquer le c) à son carré, de degré $2n - 2 \leq 2n - 1$. On obtient :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(Q_j^{(n)}(x) \right)^2 w(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i \left(Q_j^{(n)}(\lambda_i^{(n)}) \right)^2 = c_j \left(Q_j^{(n)}(\lambda_j^{(n)}) \right)^2$$

Autrement dit :

$$c_j = \frac{\langle Q_j^{(n)} | Q_j^{(n)} \rangle_w}{\left(Q_j^{(n)}(\lambda_j^{(n)}) \right)^2} > 0$$

10. (a) Fixons un réel $\varepsilon > 0$ tel que $s + \varepsilon < t - \varepsilon$. Pour tout réel positif K introduisons la fonction continue affine par morceaux A_K qui vaut -1 à l'extérieur de $[s, t]$ et qui vaut K sur $[s + \varepsilon, t - \varepsilon]$. Cette fonction prend ses valeurs dans l'intervalle $[-1, K]$. Comme w est positive, on a :

$$\int_a^b A_K(x)w(x)dx \geq - \int_a^{s+\varepsilon} w(x)dx + K \int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} w(x)dx - \int_{t-\varepsilon}^b w(x)dx$$

Comme $\int_{s+\varepsilon}^{t-\varepsilon} w(x)dx > 0$ on peut trouver K assez grand de telle sorte que :

$$\int_a^b A_K(x)w(x)dx > \int_a^b w(x)dx$$

D'après le théorème de Weierstrass il existe un polynôme V qui approche uniformément A_K à moins de 1 (strictement). Il est alors certain que V est strictement négatif à l'extérieur de $[s, t]$ et d'autre part :

$$\int_a^b V(x)w(x)dx \geq \int_a^b A_K(x)w(x)dx - \int_a^b w(x)dx > 0$$

- (b) Un intervalle ouvert non vide contenu dans J est de la forme $]s, t[$ avec $a \leq s < t \leq b$. Soit V un polynôme vérifiant les conditions du a) et n entier tel que $V \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$. Supposons qu'aucun des réels $(\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)})$ n'est dans $]s, t[$; ils sont dans J d'après 4.b) donc les valeurs de V en ces réels sont strictement négatives. L'égalité de la question 9.c) donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(x)w(x)dx = \int_a^b V(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i V(\lambda_i^{(n)})$$

D'après 9.d) les constantes c_i sont strictement positives ; on en déduit :

$$\int_a^b V(x)w(x)dx < 0$$

ce qui est contradictoire.

On en déduit que l'intervalle $]s, t[$ coupe Λ .

Quatrième partie

11. (a) Comme J est un segment et f continue sur J , il existe une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément vers f sur J . Comme les fonctions f et w sont bornées sur J (w est continue par morceaux), il est clair que la suite de fonctions $(fP_n w)$ converge uniformément vers $f^2 w$ sur le segment J ; on en déduit que la suite $(\int_J fP_n w)$, qui est la suite nulle, converge vers $\int_J f^2 w$ qui est donc nulle.
- (b) La fonction $f^2 w$ est continue par morceaux positive d'intégrale nulle ; elle donc nulle sauf peut-être aux discontinuités de w qui sont en nombre fini dans J ; comme w reste > 0 sur J on en déduit que f est nulle sur J sauf peut-être en un nombre fini de points donc partout puisqu'elle est continue.
- La fonction w a donc bien la propriété (D_J) .
12. (a) La fonction $f_{\mu, \alpha, n}$ sous l'intégrale est bien continue par théorèmes généraux sur $[0, +\infty[$. Son module est la fonction :

$$g_{\mu, \alpha, n} : x \mapsto e^{-x^\mu \cos \alpha} x^n$$

Comme $\cos \alpha > 0$, par croissance comparée $x^2 g_{\mu, \alpha, n}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$; par conséquent $f_{\mu, \alpha, n}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (règle de Riemann).

- (b) L'application $x \mapsto x^\mu$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de $]0, +\infty[$ sur lui-même ; on peut donc poser dans l'intégrale $y = x^\mu$ ou $x = y^{1/\mu}$; on obtient :

$$I_n(\mu, \alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n}{\mu}} \frac{1}{\mu} y^{\frac{1}{\mu}-1} dy = \frac{1}{\mu} \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} dy$$

L'égalité de l'énoncé s'en déduit sans difficulté ; la convergence de l'intégrale définissant $K_n(\mu, \alpha)$ est une conséquence du théorème de

changement de variable dans les intégrales sur des intervalles quelconques.

(c) Il suffit de montrer la continuité et la dérivabilité de l'application :

$$\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} dy$$

L'application $h: (\alpha, y) \mapsto e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur le domaine ouvert $] -\pi/2, +\pi/2[\times]0, +\infty[$. Si $\alpha_0 \in] -\pi/2, +\pi/2[$ est fixé, pour tout $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ et $y > 0$ on a la majoration :

$$|h(\alpha, y)| = e^{-y \cos \alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} \leq e^{-y \cos \alpha_0} y^{\frac{n+1}{\mu}-1}$$

La fonction majorante est intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} h(\alpha, y) dy$ est continue sur $] -\pi/2, +\pi/2[$.

On a aussi dans les mêmes conditions :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, y) &= -y i e^{i\alpha} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} = -i e^{i\alpha} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}} \\ \left| \frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, y) \right| &= e^{-y \cos \alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}} \leq e^{-y \cos \alpha_0} y^{\frac{n+1}{\mu}} \end{aligned}$$

La fonction majorante est bien intégrable sur $]0, +\infty[$. On en déduit que la fonction $\alpha \mapsto \int_0^{+\infty} h(\alpha, y) dy$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\pi/2, +\pi/2[$.

(d) De plus la dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme ; par conséquent, pour tout $\alpha \in] -\pi/2, +\pi/2[$ on a l'égalité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_n}{\partial \alpha}(\mu, \alpha) &= \\ i \frac{n+1}{\mu} e^{i \frac{n+1}{\mu} \alpha} \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} dy - e^{i \frac{n+1}{\mu} \alpha} \int_0^{+\infty} i e^{i\alpha} e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}} dy &= \\ = i e^{i \frac{n+1}{\mu} \alpha} \int_0^{+\infty} e^{-ye^{i\alpha}} \left(\frac{n+1}{\mu} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} - e^{i\alpha} y^{\frac{n+1}{\mu}} \right) dy & \end{aligned}$$

On reconnaît sous l'intégrale la dérivée de la fonction

$$y \mapsto e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}}$$

On en déduit (en particulier car $-y \cos \alpha \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} -\infty$) :

$$\frac{\partial K_n}{\partial \alpha}(\mu, \alpha) = i e^{i \frac{n+1}{\mu} \alpha} \left[e^{-ye^{i\alpha}} y^{\frac{n+1}{\mu}} \right]_{y \rightarrow 0}^{y \rightarrow +\infty} = 0$$

La fonction $\alpha \mapsto K_n(\mu, \alpha)$ est donc constante sur $] -\pi/2, +\pi/2[$.

(e) On a donc pour tout $\alpha \in]-\pi/2, +\pi/2[$ l'égalité :

$$K_n(\mu, \alpha) = K_n(\mu, 0) = \int_0^{+\infty} e^{-y} y^{\frac{n+1}{\mu}-1} dy = \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) \in \mathbb{R}$$

Par conséquent :

$$I_n(\mu, \alpha) = \frac{1}{\mu} e^{-i\frac{n+1}{\mu}\alpha} \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right)$$

En particulier on voit que si $\alpha = \pi\mu$, avec $\mu < 1/2$, ce qui implique $\alpha \in]0, \pi/2[$:

$$I_n(\mu, \pi\mu) = \frac{1}{\mu} e^{-i(n+1)\pi} \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{\mu} \Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) \in \mathbb{R}$$

La partie imaginaire de $I_n(\mu, \pi\mu)$ est donc nulle.

(f) On a :

$$I_n(\mu, \pi\mu) = \int_0^{+\infty} e^{-x^\mu (\cos \pi\mu + i \sin \pi\mu)} x^n dx$$

La partie imaginaire est nulle donc :

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^\mu \cos \pi\mu} \sin(x^\mu \sin \pi\mu) x^n dx$$

Par linéarité de l'intégrale, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a aussi :

$$0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^\mu \cos \pi\mu} \sin(x^\mu \sin \pi\mu) P(x) dx$$

Posons $\varphi_\mu : x \mapsto e^{-x^\mu \cos \pi\mu} \sin(x^\mu \sin \pi\mu)$ sur $J = [0, +\infty[$. Pour toute fonction continue $w \in \mathcal{W}_J$ (il en existe, par exemple $x \mapsto e^{-x}$), pour tout polynôme P :

$$0 = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi_\mu(x)}{w(x)} P(x) w(x) dx$$

La fonction φ_μ/w est bien définie et continue sur J puisque w est supposée continue et > 0 , elle n'est visiblement pas identiquement nulle. On en déduit qu'aucune fonction continue élément de $\mathcal{W}_J$ n'a la propriété (D_J) .