

Corrigé Mines-Ponts PC 2005 maths 2

Ce corrigé à été réalisé par les élèves de la PC* du lycée Blaise Pascal d'Orsay durant la période de confinement de l'année 2020.

I. Préliminaires

1. Si x appartient à $\text{Ker}(\delta)$, alors $\delta(\delta(x)) = d(x) = \delta(0) = 0$ car δ est linéaire, donc $d(x) = 0 : x$ appartient à $\text{Ker}(d)$. On a donc

$$\text{Ker}(\delta) \subset \text{Ker}(d).$$

2. Soit $y \in \text{Im}(d)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = d(x)$ et d'après la relation entre δ et d , on a : $y = d(x) = \delta(\delta(x))$ et $\delta(x)$ appartient à E donc $y \in \text{Im}(\delta)$. On a donc

$$\text{Im}(d) \subset \text{Im}(\delta).$$

3. • *Sens direct.* La composée de deux automorphismes est un automorphisme. Or $d = \delta \circ \delta$, donc d est un automorphisme.
 • *Sens réciproque.*
 — L'application δ est linéaire (cf. énoncé, c'est un endomorphisme de E).
 — L'automorphisme d est injectif, donc $\text{Ker}(d) = \{0\}$, or $\text{Ker}(\delta) \subset \text{Ker}(d)$ donc $\text{Ker}(\delta) = \{0\}$ donc δ est injectif.
 — L'automorphisme d est surjectif, donc $\text{Im}(d) = E$, or $\text{Im}(d) \subset \text{Im}(\delta)$ donc $\text{Im}(\delta) = E$, donc δ est surjectif.
 Finalement, δ est un endomorphisme bijectif de E , c'est-à-dire un automorphisme de E .

4. Première solution : c'est le cours.

Deuxième solution : soit $\lambda \in \text{Sp}(d)$ et soit $x \in E_\lambda(d)$, montrons que $\delta(x) \in E_\lambda(d) = \text{Ker}(d - \lambda \text{id}_E)$. Or, comme δ et $d = \delta^2$ commutent

$$(d - \lambda \text{id}_E)(\delta(x)) = d(\delta(x)) - \lambda \delta(x) = \delta(d(x)) - \lambda \delta(x) = \delta(\lambda x) - \lambda \delta(x) = 0.$$

II. Dimension finie

5. Soit $f \in E$, donc il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x).$$

La fonction f est bien dérivable et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad d(f)(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x),$$

donc $d(f) \in E$, donc d est bien un endomorphisme de E .

De plus, on voit dans le calcul ci-dessus que $\text{Im}(d) = E$, donc d est surjectif (on aurait aussi bien pu constater que $\text{Ker}(d)$ est réduit à la fonction nulle). Comme E est de dimension finie, d est donc bijective, donc d est un automorphisme de E .

6. On trouve

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de D vaut $\chi_D = X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$, scindé à racines simples sur \mathbb{C} , donc D est diagonalisable, avec $\text{Sp}(D) = \{i; -i\}$.

7. On cherche à montrer que δ est aussi diagonalisable. On a vu que les multiplicités des racines de d valent 1 donc les sous-espaces propres associés sont des droites (supplémentaires). Si l'on prend un vecteur propre e d'un sous-espace propre de d alors $\delta(e)$ doit être colinéaire à e , car les sous-espaces propres de d sont stables par δ (question 4). On en déduit qu'une base propre de d est aussi une base propre de δ , donc δ est diagonalisable.

8. Soit \mathcal{B}' une base propre de d , dans laquelle la matrice de d est $\text{diag}(i, -i)$. On a montré à la question précédente que c'est aussi une base propre de δ , donc la matrice Δ de δ dans \mathcal{B}' est diagonale : il existe deux complexes α et β tels que

$$\Delta = \text{diag}(\alpha, \beta).$$

Par conséquent, si P est la matrice de passage de $(\cos x, \sin x)$ à une telle base \mathcal{B}' [l'énoncé nous assure que c'est le cas], la relation $\delta^2 = d$ est équivalente à

$$\Delta^2 = P^{-1}DP = \text{diag}(i, -i),$$

ou encore à

$$\begin{cases} \alpha^2 &= i, \\ \beta^2 &= -i. \end{cases}$$

On résout ces deux équations en posant $\omega = \exp(i\pi/4)$, et on trouve

$$\alpha = \pm\omega \quad \text{et} \quad \beta = \pm\bar{\omega}.$$

Pour le moment, les choix de signe pour α et β sont indépendants.

9. On note M la matrice d'un endomorphisme δ tel que $\delta^2 = d$ dans la base $(\cos x, \sin x)$. Comme P est la matrice de passage de la base $(\cos x, \sin x)$ vers une base où la matrice de δ est Δ , on a la relation $M = P\Delta P^{-1}$, soit (les lettres ε et ε' désignent les deux signes de la question précédente) :

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{-2i} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon\omega & 0 \\ 0 & \varepsilon'\bar{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon\omega & \varepsilon'\bar{\omega} \\ i\varepsilon\omega & -i\varepsilon'\bar{\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -i(\varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega}) & -(\varepsilon\omega - \varepsilon'\bar{\omega}) \\ \varepsilon\omega - \varepsilon'\bar{\omega} & -i(\varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega}) \end{pmatrix}, \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega} & -i(\varepsilon\omega - \varepsilon'\bar{\omega}) \\ i(\varepsilon\omega - \varepsilon'\bar{\omega}) & \varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Analyse. Par ailleurs, il faut que M soit à coefficients réels (d et δ sont des endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel), donc il faut en particulier que $\frac{\varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega}}{2} \in \mathbb{R}$, ce qui ne peut se produire que si

$$\varepsilon = \varepsilon',$$

(sinon, $\varepsilon = -\varepsilon'$ et on aurait $\frac{\varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega}}{2} = \varepsilon\frac{\omega - \bar{\omega}}{2} = i\varepsilon \text{Im}(\omega) \notin \mathbb{R}$).

Synthèse. Si $\varepsilon = \varepsilon'$, alors $\frac{\varepsilon\omega + \varepsilon'\bar{\omega}}{2} = \varepsilon\frac{\omega + \bar{\omega}}{2} = \varepsilon \text{Re}(\omega) = \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{i}{2}(\varepsilon\omega - \varepsilon'\bar{\omega}) = \varepsilon\frac{\omega - \bar{\omega}}{2i} = \varepsilon \text{Im}(\omega) = \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}$ est lui aussi réel. On conclut qu'il existe deux endomorphismes δ qui sont des racines carrées de la dérivation dans E , opposés, et donnés par leurs matrices dans la base $(\cos x, \sin x)$:

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut d'ailleurs vérifier que le carré de ces deux matrices vaut bien D .

III. Espace de Schwartz

10. On montre, par une récurrence facile, que pour tout j dans \mathbb{N} , il existe $P_j \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\varphi_\lambda(j) = P_j \varphi_\lambda.$$

On cherche donc λ réel tel que pour tout j et k dans \mathbb{N} ,

$$P_j(x) \exp(-\lambda x^2) (1 + |x|^k) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0.$$

Par théorème de croissance comparée, on trouve la condition nécessaire et suffisante

$$\lambda > 0.$$

11. Montrons que si $f \in \mathcal{S}$, alors pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}$ est intégrable sur \mathbb{R} et sa transformée de Fourier existe :

Comme f est de classe \mathcal{C}^∞ et pour tous $j, k \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(y)(1 + |y|^k) \rightarrow 0$ quand $|y| \rightarrow \infty$. En particulier pour $k = 2$, on obtient que $f^{(j)}(y)$ est négligeable en $\pm\infty$ devant $(1 + |y|^2)^{-1}$, qui est intégrable sur \mathbb{R} car continue et équivalente à $\frac{1}{y^2}$ en $\pm\infty$.

Par comparaison, comme $f^{(j)}$ est continue sur \mathbb{R} , elle est intégrable sur \mathbb{R} . Il est donc légitime de calculer sa transformée de Fourier. On effectue une intégration par parties formelle (pour le moment), consistant à intégrer $f^{(j)}$ et à dériver l'exponentielle, pour $j \geq 1$:

$$\widehat{f^{(j)}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j)}(x) e^{-ixy} dx = \left[f^{(j-1)}(x) e^{-ixy} \right]_{-\infty}^{+\infty} + iy \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(j-1)}(x) e^{-ixy} dx.$$

Comme $f \in \mathcal{S}$, la dérivée $f^{(j-1)}(x)$ est négligeable devant $\frac{1}{1+|x|}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, donc cette dérivée est de limite nulle en $+\infty$, donc la partie évaluée $[\cdot \cdot]_{-\infty}^{+\infty}$ converge et vaut zéro, donc les deux intégrales sont de même nature.

On vient de voir plus haut qu'elles sont convergentes, donc l'égalité formelle d'intégration par partie est en fait une égalité entre intégrales convergentes :

$$\widehat{f^{(j)}}(y) = (iy)\widehat{f^{(j-1)}}(y).$$

On lit ci-dessus que la suite $(\widehat{f^{(j)}}(y))_{j \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison iy , donc on conclut que

$$\widehat{f^{(j)}}(y) = (iy)^j \widehat{f}(y).$$

12. On pose

$$a = \frac{1+i}{2\pi\sqrt{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{i\pi/4} = \frac{\omega}{2\pi}$$

et on note $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$h(x, y) = r(y)\widehat{f}(y)e^{ixy},$$

de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta(f)(x) = a \int_{-\infty}^{+\infty} h(x, y) dy.$$

On note que la fonction h est continue par rapport à y puisque r l'est (c'est clair, y compris en zéro) et \widehat{f} aussi, puisque l'énoncé nous dit qu'une transformée de Fourier d'une fonction de \mathcal{S} est encore dans \mathcal{S} .

On utilise alors le théorème de dérivation des intégrales à paramètre :

- Hypothèse 1 : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x, y)$ est de classe C^∞ (car l'exponentielle l'est).
- Hypothèse 2 : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $j \in \mathbb{N}$, $y \mapsto \frac{\partial^j h}{\partial x^j}(x, y)$ est continue par morceaux (car cette dérivée partielle vaut $(iy)^j h(x, y)$ et h est continue par rapport à y).
- Hypothèse 3 : domination. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, et tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a l'égalité

$$\left| \frac{\partial^j h}{\partial x^j}(x, y) \right| = |y|^{j+1/2} |\widehat{f}(y)|,$$

où le second membre ne dépend plus de x . Comme la transformée de Fourier est une bijection de \mathcal{S} dans lui-même, $\widehat{f}(y)$ est négligeable devant $\frac{1}{|y|^{2+j+1/2}}$ quand $|y| \rightarrow +\infty$ (en appliquant la définition de l'espace de Schwartz avec $k = 2 + j + \frac{1}{2}$). On en déduit que $y \mapsto |y|^{j+1/2} |\widehat{f}(y)|$ est intégrable sur \mathbb{R} , ce qui fournit bien une domination de $\frac{\partial^j h}{\partial x^j}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

On en déduit que $\delta(f)$ est définie et indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} .

13. On fixe $y \in \mathbb{R}$. On souhaite utiliser un théorème d'intégration terme à terme permettant d'écrire que

$$\begin{aligned} \widehat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ixy) dx = \int_{-A}^{+A} f(x) \exp(-ixy) dx = \int_{-A}^{+A} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} f(x) \frac{(-ixy)^n}{n!}}_{g_n(x)} dx, \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-A}^{+A} f(x) \frac{(-ixy)^n}{n!} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-A}^{+A} f(x) x^n dx \right) \frac{(-i)^n}{n!} y^n. \end{aligned}$$

Sous réserve de la justification de l'égalité $=$ on a montré que \widehat{f} est développable en série entière en zéro, avec un rayon de convergence infini, les coefficients a_n de ce développement étant donnés par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \left(\int_{-A}^{+A} f(x) x^n dx \right) \frac{(-i)^n}{n!}.$$

Voici la justification : on utilise le théorème d'intégration termes à termes sur un segment.

- Chaque g_n est continue sur $[-A, A]$.
- La série de fonctions $\sum_{k \geq 0} g_k$ converge uniformément sur $[-A, A]$, car elle converge normalement. En effet, comme f est continue et $[-A, A]$ est un segment, le théorème de l'image compact affirme que f est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [-A, A]$, $|g_k(x)| \leq M \frac{|xy|^k}{k!} \leq M \frac{|Ay|^k}{k!}$, et le majorant est le terme général d'une série convergente.

14. En particulier, le coefficient $a_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ est nul car l'énoncé le suppose. On peut alors écrire que pour tout réel y , on a $\hat{f}(y) = yu(y)$ avec

$$u(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y^{n-1}.$$

La fonction u est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} , car elle est la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

15. On va effectuer deux intégrations par partie consécutives.

- On écrit d'abord formellement la première :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) dy = \left[y^{3/2} u(y) \frac{\exp(ixy)}{ix} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y) \right) e^{ixy} dy.$$

L'expression intégrée $y^{3/2} u(y) \frac{\exp(ixy)}{ix} = y^{1/2} \hat{f}(y) \frac{\exp(ixy)}{ix}$ est définie et vaut 0 en $y = 0$ grâce à la présence du facteur $y^{3/2}$. De plus, $|y^{3/2} u(y) \frac{e^{ixy}}{ix}| = |x|^{-1} y^{1/2} |\hat{f}(y)|$ tend aussi vers 0 (une limite finie) quand $y \rightarrow +\infty$ à x fixé, car \hat{f} appartient à l'espace de Schwartz d'après l'énoncé.

D'après le théorème d'intégration par partie, les deux intégrales ci-dessus sont de même nature. Il suffit de déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) dy$. Comme $y \mapsto y^{3/2} u(y)$ est continue sur $[0, +\infty[$ et comme $y^2 \times (y^{3/2} u(y)) = y^{5/2} \hat{f}(y)$ tend vers 0 quand $y \rightarrow +\infty$ (c'est encore l'appartenance de \hat{f} à \mathcal{S}), $\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) dy$ converge, donc l'égalité formelle devient une égalité de valeurs :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) dy = -\frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y) \right) e^{ixy} dy.$$

- On écrit ensuite formellement la deuxième intégration par partie :

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y) \right) e^{ixy} dy \\ &= -\frac{1}{ix} \left[\left(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y) \right) \frac{e^{ixy}}{ix} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{4} y^{-1/2} u(y) + 3y^{1/2} u'(y) + y^{3/2} u''(y) \right) e^{ixy} dy. \end{aligned}$$

L'expression intégrée $(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y)) \frac{e^{ixy}}{ix}$ est définie et vaut 0 en $y = 0$ grâce à la présence des facteurs $y^{1/2}$ et $y^{3/2}$.

De plus, $\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) = \frac{3\hat{f}(y)}{2y^{1/2}}$ tend vers 0 quand $y \rightarrow +\infty$, car $\hat{f} \in \mathcal{S}$. Enfin, le terme central

$$y^{3/2} u'(y) = y^{1/2} (yu'(y)) = y^{1/2} \left[\frac{d}{dy} (yu(y)) - u(y) \right] = y^{1/2} (\hat{f})'(y) - y^{1/2} u(y)$$

tend aussi vers 0 quand $y \rightarrow +\infty$, car $(\hat{f})' \in \mathcal{S}$ et car on vient de le prouver pour l'autre terme de la différence. D'après le théorème d'intégration par partie, les deux intégrales ci-dessus sont de même nature. Mais comme la première converge (c'est une conséquence de la première intégration par partie), l'égalité formelle devient une égalité de valeurs :

$$-\frac{1}{ix} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{2} y^{1/2} u(y) + y^{3/2} u'(y) \right) e^{ixy} dy = -\frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3}{4} y^{-1/2} u(y) + 3y^{1/2} u'(y) + y^{3/2} u''(y) \right) e^{ixy} dy.$$

Finalement, pour tout réel non nul x , l'identité suivante est satisfaite :

$$\int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) e^{ixy} dy = -\frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y} u'(y) + y^{3/2} u''(y) \right) e^{ixy} dy. \quad (1)$$

16. Grâce à la relation de Chasles, on écrit que $\delta(f) = \delta_1(f) + \delta_2(f)$, avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \delta_1(f)(x) = a \int_0^{+\infty} h(x, y) dy = a \int_0^{+\infty} \sqrt{y} \hat{f}(y) dy = a \int_0^{+\infty} y^{3/2} u(y) dy.$$

Les mêmes arguments qu'à la question 12 montrent que $\delta_1(f)$ est continue sur \mathbb{R} . On va ensuite montrer que $\delta_1(x)$ est dominé par $\frac{1}{x^2}$ quand $|x| \rightarrow +\infty$, ce qui prouvera son intégrabilité sur \mathbb{R} . Pour cela, on utilise la question précédente qui donne, pour $|x| \geq 1$ notamment :

$$\delta_1(f)(x) = -\frac{a}{x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y} u'(y) + y^{3/2} u''(y) \right) e^{ixy} dy.$$

Si l'on parvient à montrer que l'intégrale ci-dessus est absolument convergente, on aura terminé, car on pourra écrire que, pour tout réel x tel que $|x| \geq 1$,

$$|\delta_1(f)(x)| \leq \frac{|a|}{x^2} C,$$

où $C = \int_0^{+\infty} \left| \frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y}u'(y) + y^{3/2}u''(y) \right| dy$ est une constante (c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas de x). Malheureusement, cela ne résulte pas de la question précédente, car on sait que la convergence absolue n'est pas nécessairement préservée par intégration par partie¹. On va montrer séparément que les trois termes de la somme $\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} + 3\sqrt{y}u'(y) + y^{3/2}u''(y)$ définissent des fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$. Ces fonctions sont clairement continues sur l'intervalle considéré.

- Comme u est définie et continue en 0, on a $\frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$, donc le premier terme est intégrable sur $]0, 1]$. Il l'est aussi sur $[1, +\infty[$, car $y^{3/2} \times \frac{3u(y)}{4\sqrt{y}} = \frac{3}{4}\hat{f}(y)$ tend vers 0 quand $y \rightarrow +\infty$.
- Le deuxième terme est défini en zéro. Comme $u(y) = \frac{\hat{f}(y)}{y}$, il vaut $3y^{1/2}\left(\frac{\hat{f}'(y)}{y} - \frac{\hat{f}(y)}{y^2}\right)$, donc

$$y^2 \times (3\sqrt{y}u'(y)) = 3y^{3/2}(\hat{f})'(y) - 3y^{1/2}\hat{f}(y)$$

tend vers 0 quand $y \rightarrow +\infty$, par appartenance de \hat{f} à l'espace de Schwartz.

- Le troisième terme est lui aussi défini en zéro et il vaut $y^{3/2}\left(\frac{\hat{f}''(y)}{y} - 2\frac{\hat{f}'(y)}{y^2} - 2\frac{\hat{f}(y)}{y^3}\right)$, et on montre son intégrabilité comme pour le deuxième terme.

Finalement, $\delta_1(f)$ est bien intégrable sur \mathbb{R} .

La fonction $\delta_2(f)$ est définie et s'exprime ensuite de la manière suivante, grâce au changement de variable admissible $y = -t$:

$$\delta_2(f)(x) = a \int_{-\infty}^0 i\sqrt{-y}\hat{f}(y)e^{ixy} dy = ia \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\hat{f}(-t)e^{-ixt} dt.$$

Avec les notations et le résultat de la question... suivante, on reconnaît ci-dessus que

$$\delta_2(f) = i\widetilde{\delta_1(\tilde{f})}.$$

Comme \tilde{f} vérifie les mêmes hypothèses que f (appartenance à \mathcal{S} , nullité en dehors d'un segment, et nullité de son intégrale sur \mathbb{R}), la fonction $\delta_2(f)$ est elle aussi intégrable sur \mathbb{R} , donc $\delta(f)$ est intégrable sur \mathbb{R} en tant que somme de deux fonctions intégrables.

17. On note que si $f \in \mathcal{S}$, la fonction \tilde{f} appartient aussi à l'espace de Schwartz, ce qui justifie la notation $\hat{\tilde{f}}$. Par définition, pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\hat{\tilde{f}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)e^{-ixy} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-x)e^{-ixy} dx.$$

On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) := -t$, légitime car φ est de classe \mathcal{C}^1 et bijectif de \mathbb{R} sur lui-même. On trouve

$$\hat{\tilde{f}}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ity} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-it(-y)} dt = \hat{\tilde{f}}(y).$$

En d'autres termes, on a l'égalité de fonctions

$$\hat{\tilde{f}} = \tilde{\hat{f}}.$$

18. On remarque que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\widetilde{\delta(\tilde{f})}(x) = \delta(f)(-x) = a \int_{-\infty}^{+\infty} r(y)\hat{f}(y)e^{-ixy} dy = a\widehat{r\hat{f}}(x)$$

En d'autres termes, $\widetilde{\delta(\tilde{f})}$ est un multiple de la transformée de Fourier de $r\hat{f}$:

$$\widetilde{\delta(\tilde{f})} = a\widehat{r\hat{f}}.$$

1. Voir par exemple la formule classique prouvant la convergence de l'intégrale de Dirichlet (celle du sinus cardinal sur \mathbb{R}_+) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{1 - \cos t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt.$$

Le membre de gauche est une intégrale semi-convergente, alors que $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$ est absolument convergente (la fonction intégrée est positive).

Comme $f \mapsto \widetilde{f}$ est linéaire et involutive (sur tous les sous-espaces vectoriels sur lesquels elle est définie), on en déduit que

$$\delta(f) = \widetilde{\widetilde{\delta(f)}} = a r \widehat{f}.$$

La question précédente montre alors que

$$\delta(f) = \widehat{a r f}.$$

Comme $f \in \mathcal{S}$, la fonction $r\widehat{f}$ est intégrable sur \mathbb{R} (puisqu'on admet que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$), donc il en est de même de $\widehat{r\widehat{f}}$, donc on peut appliquer à cette dernière fonction la formule d'inversion de Fourier² admise en tête de l'énoncé : on obtient

$$\widehat{\delta(f)} = \widehat{\widehat{a r f}} = 2\pi a r \widehat{f} = \omega r \widehat{f},$$

où $\omega = e^{i\pi/4}$. En multipliant par r , on obtient donc $r\widehat{\delta(f)} = \omega r^2 \widehat{f}$. Compte-tenu de la définition de r et de l'égalité $\forall y \in \mathbb{R}_+, (i\sqrt{-y})^2 = y$, cette dernière relation s'écrit de manière plus parlante avec une variable, sous la forme

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \left(r\widehat{\delta(f)} \right) (y) = \omega y \widehat{f}(y).$$

La fonction $r\widehat{\delta(f)}$ est donc continue sur \mathbb{R} et dominée en $\pm\infty$ par $y \mapsto \frac{1}{y^2}$ (toujours parce que $\widehat{f} \in \mathcal{S}$), donc elle est intégrable sur \mathbb{R} .

19. On va commencer par démontrer que, si $f \in \mathcal{S}$ est nulle en dehors d'un segment et d'intégrale nulle sur \mathbb{R} , alors $\delta(\delta(f)) = d(f)$. La question précédente ayant démontré l'existence, la continuité et l'intégrabilité de $r\widehat{\delta(f)}$, il est possible de calculer, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$[\delta(\delta(f))](x) = a \int_{-\infty}^{+\infty} r(y) \widehat{\delta(f)}(y) e^{ixy} dy = a\omega \int_{-\infty}^{+\infty} y \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} y \widehat{f}(y) e^{ixy} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}'(y) e^{ixy} dy,$$

l'avant-dernière égalité résultant de ce que $\omega^2 = i$, et la dernière égalité résultant de la question 11. Or, comme f appartient à \mathcal{S} , sa dérivée aussi, et on peut donc lui appliquer la formule d'inversion de Fourier, qui s'écrit $2\pi f'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}'(y) e^{ixy} dy$. On en déduit le résultat partiel annoncé :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad [\delta(\delta(f))](x) = f'(x),$$

c'est-à-dire

$$\delta(\delta(f)) = d(f).$$

Le passage à $\delta^2 = d$ est douteux. En effet, pour pouvoir composer δ avec lui-même, il faut que son espace d'arrivée soit le même que celui de départ, à savoir \mathcal{S} . Or, si on a bien établi à la question 12 que $\delta(f)$ est de classe \mathcal{C}^∞ pour toute $f \in \mathcal{S}$, on n'a pas démontré que toutes ses dérivées sont négligeables devant toutes les puissances de sa variable en $\pm\infty$. Pour pouvoir calculer $\delta(\delta(f))$ — ce qui nécessite l'intégrabilité de $\delta(f)$ afin de définir sa transformée de Fourier puis l'intégrabilité de $r\widehat{\delta(f)}$ —, l'énoncé a choisi une autre voie : considérer uniquement les fonctions f du sous-ensemble \mathcal{K} de \mathcal{S} , avec

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{S}, f \text{ nulle en dehors d'un segment, } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0 \right\}.$$

On vérifie facilement que \mathcal{K} est bien un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} , et le problème est reporté sur \mathcal{K} : est-il stable par δ ? La question suivante montre que ce n'est pas le cas.

20. On raisonne par l'absurde, en supposant que $f \in \mathcal{K}$ n'est pas la fonction nulle. Alors \widehat{f} est développable en série entière en zéro avec un rayon de convergence infini d'après la question 13, et n'est pas non plus la fonction nulle, sinon la formule d'inversion de Fourier donnerait $f = 0$.

Les coefficients du développement en série entière ne sont donc pas tous nuls, et on note n_0 la valuation de ce développement : cela signifie qu'il existe une (unique) suite $(a_n)_{n \geq n_0}$ avec $a_{n_0} \neq 0$ telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(y) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n y^n.$$

2. Cette inversion s'écrit de manière concise sous la forme $2\pi \widetilde{h} = \widehat{\widehat{h}}$, pour les fonctions h convenables.

On suppose aussi que $\delta(f)$ est nulle en dehors d'un segment. La même question 13, qui ne nécessite pas la nullité de l'intégrale de la fonction étudiée, montre alors que $\widehat{\delta(f)}$ est développable en série entière. Comme $\widehat{\delta(f)} = \omega r\hat{f}$ d'après la question 18, il en résulte que $r\hat{f}$ est elle aussi développable en série entière en zéro de rayon de convergence $+\infty$, donc de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Or on a

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \quad (r\hat{f})(y) = \sqrt{y} \sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n y^n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \underbrace{a_n y^{n+1/2}}_{k_n(y)}.$$

Chaque k_n est de classe \mathcal{C}^{n_0} sur $[-1, 1]$ et, comme la série entière $\sum_{n \geq n_0} a_n y^n$ a un rayon de convergence $+\infty$, on vérifie facilement que pour tout $j \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$, les séries $\sum_{n \geq n_0} k_n^{(j)}$ convergent normalement sur $[-1, 1]$, donc le théorème de dérivation terme à terme³ s'applique : $r\hat{f}$ est de classe \mathcal{C}^{n_0} sur $[-1, 1]$ avec, pour tout $j \in \llbracket 1, n_0 \rrbracket$ et tout $y \in [-1, 1]$:

$$(r\hat{f})^{(j)}(y) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} k_n^{(j)}(y) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(n + \frac{1}{2} - j + 1\right) a_n y^{n+1/2-j}.$$

En particulier, on a

$$(r\hat{f})^{(n_0)}(y) \underset{y \rightarrow 0^+}{\sim} c \sqrt{y},$$

où c est la constante (non nulle) $(n_0 + \frac{1}{2})(n_0 - \frac{1}{2}) \cdots \frac{3}{2} \times a_{n_0}$, ce qui interdit à $(r\hat{f})^{(n_0)}$ d'être dérivable à droite en 0, puisque son taux d'accroissement en zéro à droite est équivalent à $\frac{c}{\sqrt{y}}$. On en déduit que $r\hat{f}$ n'est pas de classe \mathcal{C}^{n_0+1} sur \mathbb{R} . Cela contredit son caractère indéfiniment dérivable, et achève le raisonnement par l'absurde.

3. La série de fonctions $\sum_{n \geq n_0} k_n$ n'est pas une série entière, il faut donc utiliser les théorèmes généraux.