



Concours d'Admission 1976

MATHEMATIQUES II

- I Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien orienté, rapporté à une base orthonormée, directe,  $b = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , et  $A$  un espace affine associé, rapporté à un repère  $\tau = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit  $S$  le point défini par  $\vec{OS} = s\vec{k}$ , et  $C$  l'ellipse ensemble des points  $M$  définis par :  $\vec{OM} = a(1 + \cos \theta) \vec{i} + b \sin \theta \vec{j}$ ,  $s$ ,  $a$  et  $b$  désignant trois paramètres strictement positifs, et  $\theta$  une variable réelle.
- 1°) Etablir, dans  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ , l'équation cartésienne de l'ellipse  $C$ . L'ensemble des droites qui contiennent  $S$  et qui rencontrent  $C$  définit une surface conique  $\Sigma$ . Etablir son équation cartésienne dans  $\tau$ .
- 2°) Soit  $I$  le point défini par  $\vec{OI} = s \operatorname{tg} \psi \vec{i}$ , quand on donne au paramètre  $\psi$  une valeur choisie dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{4}[$ .  
On désigne par  $(\Sigma_{s, \psi})$  la famille des cônes de révolution de sommet  $S$ , qui contiennent la droite  $SO$ , et qui ont pour axes respectifs les droites  $SI$ . Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes liant  $a$ ,  $b$ ,  $s$  et  $\psi$ , pour que  $\Sigma$  appartienne à  $(\Sigma_{s, \psi})$ . En déduire la condition nécessaire et suffisante liant  $a$ ,  $b$  et  $s$ , pour que  $\Sigma$  soit de révolution.
- 3°) Dans le cas particulier où  $a = b$ ,  $C$  est un cercle. Montrer qu'il existe alors deux familles de cercles, intersections avec  $\Sigma$  des plans appartenant respectivement à deux familles de plans parallèles à  $(O; \vec{j})$ .
- 4°) On revient au cas général, où  $a$  et  $b$  ne sont pas nécessairement égaux. Déterminer, selon les valeurs relatives des paramètres  $a$ ,  $b$  et  $s$ , l'existence des familles de plans parallèles à  $(O; \vec{j})$  et coupant  $\Sigma$  suivant un cercle.
- II - Soit un solide, que l'on assimile à un espace affine euclidien  $A'$ . On considère l'ensemble  $\mathcal{M}$  des mouvements de  $A'$  relativement à  $A$  qui possèdent la propriété suivante :
- Il existe une droite  $D$  de  $A'$  qui passe constamment par  $S$  et il existe un point  $P$  de  $D$  qui décrit l'ellipse  $C$  suivant une loi définie par une fonction réelle, deux fois continûment dérivable du temps  $t$  :  $t \mapsto \theta(t)$ .
- 1°) En considérant un mouvement arbitraire appartenant à  $\mathcal{M}$  ( $a, b, s, \theta$ ), partie de  $\mathcal{M}$  définie par le choix des valeurs des paramètres  $a, b, s$ , et par le choix de la fonction  $t \mapsto \theta(t)$ , déterminer la vitesse  $\vec{V}_Q$  du point  $Q$  de  $D$  qui coïncide avec  $S$  à l'instant  $t$ .

.../...

- 2°) Déterminer les conditions imposées aux composantes des vecteurs  $\vec{\Omega}(t) = p(t)\vec{i} + q(t)\vec{j} + r(t)\vec{k}$  des rotations instantanées des mouvements appartenant à  $\mathcal{M}(a, b, s, \theta)$ . Exprimer  $p$  et  $q$  en fonction de  $r$ .  $\mu_1$  et  $\mu_2$  désignant deux mouvements appartenant à  $\mathcal{M}(a, b, s, \theta)$ , définis respectivement par  $t \mapsto r_1(t)$  et par  $t \mapsto r_2(t)$ , quel mouvement faut-il composer avec  $\mu_1$  pour obtenir  $\mu_2$  ?
- 3°) Dans l'hypothèse où  $\Sigma$  est de révolution, on considère le mouvement du mobile  $m$  dont la trajectoire par rapport à  $A$  est portée par un cercle  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , et dont la trajectoire par rapport à  $A'$  est portée par  $D$ . Montrer que la vitesse de  $m$  par rapport à  $A$  s'exprime simplement au moyen des vitesses  $V_U^{\vec{}}$  et  $V_Q^{\vec{}}$  par rapport à  $A$  des points  $U$  et  $Q$  de  $D$  qui coïncident, à l'instant  $t$ , respectivement avec  $m$  et avec  $S$ .  
Le point  $U$  étant défini par 
$$\vec{PU} = u \frac{\vec{PQ}}{\|\vec{PQ}\|} = u \vec{k}, \text{ calculer } V_U^{\vec{}} - V_P^{\vec{}}.$$
- 4°) Dans l'hypothèse où  $a = b$ , on considère le mouvement  $\mu_0$ , défini dans  $\mathcal{M}(a, a, s, \theta)$  en assujettissant un plan  $\Pi$ , contenant  $D$ , de  $A'$ , à demeurer constamment tangent au cercle  $C$  (et par conséquent tangent à  $\Sigma$ ). Déterminer le vecteur  $\vec{\Omega}_0(t)$  de la rotation instantanée de ce mouvement.

F I N  
